Antonín Zelenka

Versicherungsmathematische Werte bei Zinsfussänderungen

Aktuárské vědy, Vol. 6 (1936), No. 1, 9–20

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144648

Staatsbeamten beibehielt. Natürlich kann man nicht mit Sicherheit erwarten, daß eine so summarische Konstantenbestimmung auch in anderen Fällen genügen wird.

Die Frage, ob die Bedingung (35) erfüllt ist, kann jetzt mit wenig Rechnung entschieden werden. Mit der Bezeichnung (40) schreiben wir die Bedingung auf die Form

$$l_{x_0}{}^{\beta} - h_x \mu_x < l_x{}^{\beta}, \tag{43}$$

wo in dem vorliegenden Fall $x_0 = 15$ ist.

Es ist zunächst, indem wir nur mit 3 Dezimalen zu rechnen brauchen,

$$l_{15}{}^{\beta} - h_{15}\mu_{15} = 9{,}267 < l^{\beta}{}_{44} = 9{,}277,$$

und da $h_x\mu_x$ immer wächst, $l_x{}^{\beta}$ immer abnimmt, ist (43) in dem Interva $15 \leqq x \leqq 44$ befriedigt.

Es ist demnächst

$$l_{15}{}^{\beta} - h_{44}\mu_{44} = 8{,}060 < l_{58}{}^{\beta} = 8{,}172,$$

so daß (43) auch für $44 \leqq x \leqq 58$ erfüllt ist.

Es ist endlich

$$l_{15}{}^{\beta} - h_{58}\mu_{58} = 2{,}756 < l_{70}{}^{\beta} = 3{,}011,$$

so daß (43) für $58 \leqq x \leqq 70$ erfüllt ist; und da $l_{15}{}^{\beta} - h_{70}\mu_{70}$ negativ ist, wird (43) für alle $x \geqq 15$ befriedigt sein.

Es ist natürlich vorzuziehen, die Widerspruchslosigkeit in dieser Weise im Voraus festzustellen, um nicht die etwas umständliche Berechnung der Invaliditätstafel vergeblich machen zu müssen.

Kommutationswerte zu 4% auf der obigen Grundlage findet man in meinem (dänisch geschriebenen) Buche „Forsikringsmatematik“.[6])

Versicherungsmathematische Werte bei Zinsfussänderungen.

(Vortrag im „Spolek pro pěstování aktuárských věd“, 24. 4. 1936.)

Dr. *Ant. Zelenka.*

I.

Die versicherungsmathematischen Werte der Lebensversicherung sind einerseits von der Absterbeordnung, anderseits von der Zinsintensität abhängig. Beide Größen μ_x resp. δ werden als unabhängig von der Zeit d. h. als fest für die in Betracht kommende Zeitperiode angenommen.

---

[6]) Die Funktion $\mu_x{}^{a}$ ist dort aus typografischen Rücksichten mit $\mu_x{}^{\varkappa}$ bezeichnet worden.

Diese Voraussetzung entspricht zwar nicht den Tatsachen, ist aber Gepflogenheit und schließlich ist das Studium dieser Abhängigkeit nicht Gegenstand dieses Referates.

Die Aufgabe, mit der wir uns beschäftigen wollen, ist folgende:

Es ist eine vollständige Tabelle der versicherungsmathematischen Werte für eine bestimmte Zinsintensität gegeben und es sollen für eine andere Zinsintensität einige Werte berechnet werden. Es handelt sich um keine vollständige Tabelle für den neuen Zinsfuß, sonst wäre es am bequemsten und rechnerisch am einfachsten neue Kommutationszahlen zu berechnen. Für die Feststellung eines oder nur weniger Werte ist jedoch die Berechnung neuer Kommutationszahlen zu kostspielig, sodaß eine Approximationformel gefunden werden soll, die rechnerisch keine allzugroße Arbeit erforden würde. Diese approximative Berechnung kann selbstverständlich keine genauen Resultate ergeben; die Aufgabe kann jedoch als gelöst betrachtet werden, wenn die gefundene Formel praktisch gut anwendbare Resultate erbringt.

Diese Aufgabe ist heute praktisch durch Arbeiten von Steffensen, Palmquist, Meidell, Poukka und Borch in der „Skandinavisk Aktuarietidskrift" und von Christen in den „Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker" (1930) gelöst; in dieser letzten Abhandlung ist auch ein erschöpfender Überblick und ein Literaturverzeichnis enthalten.

In diesem Vortrage will ich zunächst einige schon bekannte Resultate aus einer Reihe für $\bar{a}_x$ und eine Näherungsformel für $\overset{\leq}{a}_x$ ableiten und dann einige Resultate auf den in der Sozialversicherungsmathematik wichtigsten Werte a_x^{ai} applizieren.

II.

Den Ausgangspunkt aller weiteren Betrachtungen bildet die Entwicklung der Funktion $\bar{a}_x$ in einer Potenzreihe von δ. In der Formel

für
$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \frac{l_{x+t}}{l_x} e^{-\delta t}\, dt$$

kann $e^{-\delta t}$ in der bekannten gleichmäßig konvergenten Potenzreihe entwickelt werden; die Integration ergibt eine ebenso gleichmäßig konvergente Reihe

$$a_x = \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\delta^k}{k!} \int_0^\infty t^K l_{x+t}\, dt.$$

Das erste Glied dieser Reihe

$$\frac{1}{l_x}\int_0^\infty l_{x+t}\,\mathrm{d}t = \bar{e}_x$$

ergibt die durchschnittliche Lebensdauer. Die anderen Koeffizienten dieser Potenzreihe hängen sehr einfach zusammen; nach der Formel

$$\frac{1}{k!}\int_0^{x_0}(z-x)^K f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{x_0}\mathrm{d}z\int_z^{x_0}\mathrm{d}z\ldots\int_z^{x_0} f(z)\,\mathrm{d}z\ldots\overline{k+1}\text{ Integrationen ist}$$

$$\frac{1}{k!}\int_0^\infty t^k\;l_{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{d}t\int_t^\infty \mathrm{d}t\ldots\int_t^\infty l_{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

Wenn wir die Bezeichnung

$$\int_0^\infty l_{x+t}\,\mathrm{d}t = {}^1l_x,\quad \int_0^\infty {}^kl_{x+t}\,\mathrm{d}t = {}^{k+1}l_x$$

einführen, ist

$$\frac{1}{k!}\int_0^\infty t^k\,l_{x+t}\,\mathrm{d}t = {}^{k+1}l_x.$$

Bezeichnen wir weiter

$${}^kl_x : l_x = {}^k\bar{e}_x.$$

Dann bekommt unsere Potenzreihe die sehr einfache Form

$$\bar{a}_x = \bar{e}_x - \delta\,{}^2\bar{e}_x + \delta^2\,{}^3\bar{e}_x + \ldots + (-1)^K\,\delta^K\,{}^{K+1}\bar{e}_x + \ldots \tag{1}$$

Diese Reihe ist an sich selbst ganz interessant und kann außer als Ausgangspunkt für verschiedene Betrachtungen über das Verhalten der Funktion $\bar{a}_x$, auch zur ersten Orientierung über den Einfluß der Änderung des Zinsfußes dienen. Die Reihe (1) ist gleichmäßig konvergent, wie bereits anfangs festgestellt wurde, und da sie außerdem eine alternierende Reihe ist, kann man überdies stets beide Grenzen der Annäherung sehr leicht feststellen. Zu direkten Berechnungen kann sie jedoch nicht verwendet werden, da hiezu mehrere Reihenglieder benötigt werden und die Koeffizienten ${}^k\bar{e}_x$ gewöhnlich nicht tabelliert sind. Um einen Überblick über diese Werte zu erhalten, wurden diese für einige Alter aus der Tabelle E_8^M (English Life Table No 8 Males) berechnet — mittels mechanischer Integration —. Die Ergebnisse sind in der Tabelle No 1 zusammengestellt.

Mit Hilfe dieser Koeffizienten werden die Summen der ersten Glieder der Potenzreihe (1) berechnet und in der Tabelle No 2 angeführt, um die fortschreitende Annäherung an die tatsächlichen Werte beurteilen zu können.

Tabelle No 1.

x	${}^{1}e_x$	${}^{2}e_x$	${}^{3}e_x$	${}^{4}e_x$
0	51,51	1.740,99	41.238,—	756.561,—
10	53,08	1.561,55	32.323,—	520.626,—
20	44,21	1.106,29	19.657,—	273.384,—
30	35,81	742,75	11.075,—	130.266,—
40	27,74	461,29	5.608,—	54.314,—
50	20,29	258,88	2.473,—	19.183,—
60	13,78	127,43	911,9	5.442,—
70	8,53	53,30	270,2	1.170,—
80	4,89	19,48	66,85	209,6
90	2,84	7,35	17,28	37,55
100	1,57	2,03	2,26	2,37

Tabelle No 2.

x	Annäherungswert unter Benützung der 1 Glieder der Reihe (1)	2	3	4	$\overline{a}_x$
	3%, $\delta = 0{,}0295588$				
20	44,214	11,513	28,688	21,634	23,473
30	35,811	13,856	23,532	20,172	20,943
40	27,742	14,107	19,006	17,605	17,881
50	20,290	12,638	14,798	14,304	14,385
60	13,775	10,008	10,805	10,665	10,684
	$3\frac{1}{2}$%, $\delta = 0{,}0344014$				
20	44,214	6,156	29,420	18,293	21,548
30	35,811	10,259	23,367	18,065	19,437
40	27,742	11,873	18,510	16,299	16,791
50	20,290	11,384	14,311	13,530	13,678
60	13,775	9,391	10,470	10,249	10,285

Die untersuchte Potenzreihe kann transformiert werden, um eine raschere Konvergenz herbeizuführen; durch die Lindelöf-lische Transformation

$$z = \frac{\delta}{\alpha + \delta}, \quad \delta = \alpha\,(z + z^2 + \ldots)\ \alpha \neq 0,$$

wo α so gewählt wird, daß der Koeffizient bei z^2 gleich 0 ist, erhält man unter Weglassung der höheren Potenzen in der transformierten

Reihe die Annäherungsformel

$$\bar{a}_x \doteq \bar{e}_x - \frac{\delta\, {}^2\bar{e}_x}{1 + \delta \frac{{}^3\bar{e}_x}{{}^2\bar{e}_x}} \dots \tag{2}$$

In der Tabelle 3 sind diese Werte berechnet und der Vergleich mit den genau berechneten Werten $\bar{a}_x$ zeigt, daß diese Annäherung schon zufriedenstellend ist.

Tabelle No 3.

x	$\bar{a}_x$	Annäherungswert nach Formel (2)	Abweichung in %
		$i = 3\%$	
20	23,473	22,774	— 2,98
30	20,943	20,573	— 1,77
40	17,881	17,711	— 0,95
50	14,385	14,323	— 0,43
60	10,684	10,666	— 0,17
		$i = 3\tfrac{1}{2}\%$	
20	21,548	20,594	— 4,43
30	19,437	18,923	— 2,64
40	16,791	16,553	— 1,42
50	13,678	13,587	— 0,67
60	10,285	10,257	— 0,27

Nebenbei ist zu erwähnen, daß man mit Hilfe der Potenzreihe (1) auch die von Steffensen abgeleitete bekannte Approximationsformel für das kontinuierliche $\bar{a}_x$ beweisen kann.

III.

Führen wir die Bezeichnung ein*):

$$\overset{(k)}{\bar{a}_x} = \int_0^\infty t^k \frac{l_{x+t}}{l_x} l^{-\delta t}\, dt.$$

Wird in dieser Formel $e^{-\delta t}$ in einer unendlichen Reihe entwickelt und dann die Integration durchgeführt, erhalten wir die gleichmäßig

*) Diese Werte — jedoch nicht kontinuierlich — habe ich bereits in meiner früheren Arbeit „On grouping of Reserves Values" II. Jg benützt.

konvergente Reihe

$$\overset{\leq(k)}{a}_x = k!\,{}^{k+1}\bar{e}_x - \frac{(k+1)!}{1!}\,\delta\,{}^{k+2}\bar{e}_x + \ldots$$

$$+ (-1)^r \frac{(k+r)!}{r!}\,\delta^r\,{}^{k+r+1}\bar{e}_x + \ldots \qquad (4)$$

Aus der Reihe (1) folgt, daß

$$\frac{\mathrm{d}^k \bar{a}_x}{\mathrm{d}\delta^k} = (-1)^k\,\overset{\leq(k)}{a}_x \text{ ist,}$$

sodaß wir für $\bar{a}'_x$ — wobei der Strich die Einführung der neuen Zinsintensität $\delta' = \delta + h$ bedeutet — die Taylorische Reihe

$$\bar{a}'_x = \bar{a}_x - \frac{h}{1!}\overset{\leq(1)}{a}_x + \frac{h^2}{2!}\overset{\leq(2)}{a}_x - \ldots + (-1)^k \frac{h^k}{k!}\overset{\leq(k)}{a}_x + \ldots \qquad (5)$$

erhalten. Diese Reihe (5) kann aber auch direkt aus der Formel

$$\bar{a}'_x = \int_0^\infty \frac{l_{x+t}}{l_x}\, l^{-(\delta+h)t}\,\mathrm{d}t$$

abgeleitet werden, wenn in derselben l^{-ht} in einer Reihe entwickelt wird. Auch diese Potenzreihe ist gleichmäßig konvergent.

Die Reihe (5) kann noch ein wenig umgewandelt werden, damit sie auch formell mit der Reihe (1) übereinstimmt. Der Koeffizient

$$\frac{1}{k!}\overset{\leq(k)}{a}_x = \frac{1}{k!}\,\frac{1}{D_x}\int_0^\infty t^k D_{x+t}\,\mathrm{d}t$$

unter Berücksichtigung der Relation

$$\frac{1}{k!}\int_0^\infty t^k\, D_{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{d}t \int_t^\infty \mathrm{d}t \ldots \int_t^\infty \bar{N}_{x+t}\,\mathrm{d}t = \bar{S}_x^{(k)}$$

(k Integrationen) kann als

$$\bar{S}_x^{(k)} : D_x$$

bezeichnet werden. Die Symbole $\bar{S}_x^{(k)}$ bedeuten eine Verallgemeinerung der bekannten Kommutationszahlen

$$\bar{S}_x = \bar{S}_x^{(1)} = \int_0^\infty \bar{N}_{x+t}\,\mathrm{d}t$$

und können auch numerisch leicht berechnet werden. Die Reihe (5) erhält dadurch folgende Form:

$$\overline{a}'_x = \overline{a}_x - h\frac{\overline{S}_x}{D_x} + h^2\frac{\overline{S}_x^{(e)}}{D_x} - \ldots + (-1)^k h^k \frac{\overline{S}_x^{(k)}}{D_x} + \ldots \tag{6}$$

Die Potenzreihe (6) stimmt nicht nur vollkommen mit der Reihe (1) — was selbstverständlich ist, denn wenn in der Reihe (6) $\delta = 0$, $h = \delta$ gesetzt wird, muß man die Reihe (1) bekommen —, sondern auch mit der Reihe für nicht kontinuierliche $\overline{a}'_x$, die Poukka in der „Skandinavisk Aktuarietidskrift 1923" abgeleitet hat.

Durch eine ähnliche Transformation, die auf die Reihe (1) appliziert wurde, wird aus der Reihe (6) folgende Näherungsformel abgeleitet:

$$a'_x \doteq a_x - \frac{h\frac{\overline{S}_x}{D_x}}{1 + h\frac{\overline{S}_x^{(2)}}{D_x}}. \tag{7}$$

Diese Formel stimmt vollkommen mit derjenigen, die Poukka für nicht kontinuierliche $\overline{a}'_x$ abgeleitet hat; Poukka hat rein numerisch an einem Beispiel gezeigt, daß

$$\beta(x) = \frac{S_x^{(2)}}{S_x} : \frac{S_x}{N_x}$$

ganz unbedeutend von x und δ abhängig ist und daß $\beta(x) \doteq \beta$, d. i. einer Konstante gleich ist; für die H^M Tabelle (Text — book) findet er, daß $\beta \doteq 0{,}84$ ist. Dadurch erhält die Formel (7) die Form

$$a'_x \doteq a_x - \frac{h\frac{\overline{S}_x}{D_x}}{1 + \beta h\frac{\overline{S}_x}{\overline{N}_x}} = \overline{a}_x\left(1 - \frac{h\overset{\le}{a}_x}{\overline{a}_x + \beta h\overset{\le}{a}_x}\right).$$

Die mittels dieser Formel berechneten Näherungswerte sind für gewöhnliche Zinsfüße zwischen 3%—5% sehr genau; ihre Genauigkeit hängt wesentlich von der Konstanz der Funktion $\beta(x)$ ab. H. Christen hat in den „Mitteilungen der schw. V. M. 1930" nachgewiesen, daß diese Konstanz herbeigeführt wird, da man die $S_x^{(k)}$ für $k = 1, 2 \ldots$ usw. durch eine Parabel

$$S_x^{(k)} = \frac{N_x(\omega - x)^{k-1}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+k-1)}\left(\frac{\omega - x}{m+k} + \frac{k}{2}\right)\ldots \tag{8}$$

ausdrücken kann; dabei bedeutet ω das Schlußalter, sodaß $l_\omega = 0$ ist; m ist eine von der Absterbeordnung abhängige Konstante. F. Borch hat in der „Skandinavisk Aktuarietidskrift 1933' nachgewiesen, daß diese Annäherungparabel nur dann in Betracht kommen kann, wenn die D_x — Kurve durchaus konvex verläuft; da jedoch die l_x — Kurve nicht durchaus konvex ist, kann diese Bedingung nur dann erfüllt werden, wenn die Zinsintensität δ so groß ist, daß die Ungleichung

$$\mu_x{}^2 - \mu'_x + 2\delta\mu_x + \delta^2 > 0$$

für alle Werte von x befriedigt ist. Bei den in der Praxis vorkommenden Zinsfüßen, die höher als 3% sind, ist diese Bedingung erfüllt.

Durch einen ähnlichen Vorgang kann auch eine Annäherungsformel für $\overset{\le}{a}_x$ abgeleitet werden. In der für $\overset{\le}{a}'_x$ geltenden Integralformel

$$\int_0^\infty t\,\frac{l_{x+t}}{l_x}\,e^{-(\delta+h)t}\,dt$$

wird e^{-ht} in einer unendlichen Reihe entwickelt; daraus wird die gleichmäßig konvergente Reihe

$$\overset{\le}{a}'_x = \overset{\le}{a}_x - \frac{h}{1!}\overset{\le(2)}{a}_x + \ldots + (-1)^k\frac{h^k}{h!}\overset{\le(k+1)}{a} + \ldots$$

abgeleitet, die auch in der Form

$$\overset{\le}{a}'_x = \frac{\overline{S}_x}{D_x} - 2h\,\frac{\overline{S}_x^{(2)}}{D_x} + 3h^2\,\frac{\overline{S}_x^{(3)}}{D_x} - \ldots + (-1)^k\,(k+1)\,h^k\,\frac{\overline{S}_x^{(k+1)}}{D_x} + \ldots \tag{9}$$

ausgedrückt werden kann.

Durch die schon früher angewandte Lindelöf-lische Transformation erhält man die Annäherungsformel

$$\overset{\le}{a}'_x \doteq \overset{\le}{a}_x\left(1 - 2h\,\frac{\overline{S}_x^{(2)} : \overline{S}_x^{(3)}}{1 + h\,\dfrac{3\overline{S}_x^{(3)}}{2\overline{S}_x^{(2)}}}\right).$$

Mit Benützung der Funktion $\beta(x)$ und der neuen Funktion $\alpha(x)$, die durch die Relation:

$$\alpha(x) = \frac{\overline{S}_x^{(3)}}{\overline{S}_x^{(2)}} : \frac{\overline{S}_x}{\overline{N}_x}$$

definiert ist, wird diese Formel in folgende Form umgewandelt:

$$\overset{\le}{a}'_x \doteq \overset{\le}{a}_x\left(1 - 2h\,\frac{\beta(x)\,\overset{\le}{a}_x}{\overline{a}_x + \frac{3}{2}h\alpha(x)\,\overset{\le}{a}_x}\right). \tag{10}$$

Nun ist es aber leicht zu beweisen, daß unter den von Christen und Borch abgeleiteten Bedingungen auch $\alpha(x)$ annährend konstant wird und daß ferner zwischen den beiden Konstanten β und α die Relation

$$\frac{2\beta - 1}{1 - \beta} \doteq \frac{3\alpha - 1}{1 - \alpha} \tag{11}$$

besteht. Man muß daher keine neuen Berechnungen zur Feststellung der Konstante α durchführen. Wenn auf Grund der Werte $\beta(x)$ die Konstante $\beta \doteq 0{,}84$ gesetzt wird, folgt aus der Gleichung (11), daß $\alpha \doteq 0{,}70$ ist. Einen Überblick über den tatsächlichen Verlauf der Funktion $\alpha(x)$ gibt die Tabelle No 4.

Tabelle No 4.

x	$i = 3\%$		$i = 3\frac{1}{2}\%$		$i = 4\%$	
	$\beta(x)$	$\alpha(x)$	$\beta(x)$	$\alpha(x)$	$\beta(x)$	$\alpha(x)$
			E^M_8			
21	0,81	0,69	0,83	0,70	0,84	0,72
31	0,81	0,68	0,82	0,70	0,83	0,71
41	0,81	0,69	0,82	0,70	0,83	0,71
51	0,82	0,70	0,82	0,71	0,89	0,72
61	0,83	0,72	0,84	0,73	0,84	0,74
71	0,87	0,77	0,87	0,78	0,87	0,78
81	0,91	0,84	0,91	0,85	0,91	0,85
			H^M			
21	0,82	0,69	0,83	0,71	0,85	0,73
31	0,81	0,69	0,82	0,70	0,84	0,72
41	0,81	0,69	0,82	0,70	0,83	0,71
51	0,81	0,69	0,82	0,70	0,83	0,71
61	0,83	0,72	0,83	0,72	0,84	0,73
71	0,86	0,76	0,86	0,76	0,86	0,77
81	0,90	0,82	0,90	0,82	0,90	0,83

In der Tabelle 5 sind einige Werte für $\overset{\leq}{a}{}'_x$ zusammengestellt, die nach der Formel (11) unter der Voraussetzung berechnet wurden, daß $\beta = 0{,}82$ und $\alpha = 0{,}70$ ist. Es ist noch zu erwähnen, daß die Werte für das kontinuierliche $\overset{\leq}{a}_x$ mit Hilfe des nichtkontinuierlichen $\overset{<}{a}_x$ nach der Formel $\overset{\leq}{a}_x = \overset{<}{a}_x - a_x + \frac{1}{4}$ ermittelt wurden.

IV.

In der Sozialversicherungsmathematik hat der Wert a_x^{ai} d. i. der Wert der jährlichen Renteneinheit, die einem heute aktiven Versicherten im Falle der Invalidität zur Auszahlung gebracht wird, grundlegende Bedeutung.

Tabelle No 5.

x	$\overset{\leq}{a'}_x$	Näherungswert nach der Formel (11)	Abweichung	
			absolut	in %
		$i = 3\%,\ i' = 3\frac{1}{2}\%$		
20	370,90	369,78	1,12	0,30
30	293,05	291,99	1,06	0,36
40	214,05	213,22	0,83	0,39
50	140,55	140,20	0,35	0,28
60	80,29	80,20	0,09	0,11
70	38,39	38,41	— 0,02	— 0,05
80	15,70	15,72	— 0,02	— 0,13
		$i = 3\frac{1}{2}\%,\ i' = 4\%$		
20	324,71	324,28	0,43	0,13
30	261,08	260,46	0,62	0,24
40	194,12	193,70	0,42	0,22
50	129,91	129,65	0,26	0,20
60	75,57	75,50	0,07	0,09
70	36,75	36,76	— 0,01	— 0,03
80	15,23	15,25	— 0,02	— 0,13
		$i = 3\%,\ i' = 4\%$		
20	324,71	322,53	2,18	0,67
30	261,08	259,27	1,81	0,69
40	194,12	192,80	1,32	0,68
50	129,91	129,27	0,64	0,49
60	75,57	75,40	0,17	0,22
70	36,75	36,78	— 0,03	— 0,08
80	15,23	15,29	— 0,06	— 0,39

Wird ν_x als Intensität der Invalidisierung und l_x^i als Ausscheideordnung der Invaliden bezeichnet, so ist

$$\overline{a}_x^{ai} = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{l_{x+t}^{aa}}{l_x^{aa}} \nu_{x+t} \frac{l_{x+t+\tau}^i}{l_{x+t}^i} e^{-\delta(t+\tau)}\, dt\, d\tau.$$

Wird $e^{-\delta(t+\tau)}$ in einer Reihe entwickelt, erhalten wir

$$\overline{a}_x^{ai} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\delta)^k}{k!} \int_0^\infty \int_0^\infty p_{x,t}^{aa}\, \nu_{x+t}\, p_{x+t,\tau}^i\, (t+\tau)^k\, dt\, d\tau.$$

Wird schließlich

$$\frac{1}{k!}\int_0^\infty\int_0^\infty p_{x,t}^{aa}\, v_{x+t}\, p_{x+t,\tau}^{i}\, (t+\tau)^k dt\, d\tau = {}^{k+1}\overline{e}_x^{ai}$$

gleichgesetzt, erhalten wir für $\overline{a}_x^{ai}$ die Reihe

$$\overline{a}_x^{ai} = {}^1\overline{e}_x^{ai} - \delta\, {}^2\overline{e}_x^{ai} + \ldots + (-1)^k \delta^k\, {}^{k+1}\overline{e}_x^{ai} + \ldots \tag{12}$$

d. i. eine formell vollkommen gleiche Reihe wie die Reihe (1) für $\overline{a}_x$. Die Abhängigkeit der Koeffizienten dieser Reihe voneinander ist jedoch nicht so einfach wie bei der Reihe (1). Das erste Glied der Reihe (12) hat noch die einfache Bedeutung:

$${}^1\overline{e}_x^{ai} = \int_0^\infty\int_0^\infty p_{x,t}^{aa}\, v_{x+t}\, p_{x+t,\tau}^{i}\, dt\, d\tau = \int_0^\infty p_{x,t}^{aa}\, v_{x+t}\, \overline{e}_{x+t}^{i}\, dt = \overline{e}_x^{ai},$$

wobei $\overline{e}_{x+t}^{i}$ die durchschnittliche Invaliditätsdauer bei Eintritt der Invalidität im Alter $x+t$ bedeutet. Daraus ergibt sich, daß ${}^1\overline{e}_x^{ai} = \overline{e}_x^{ai}$ die durchschnittliche Dauer bezeichnet, während der ein x-jähriger Aktivversicherter eine Invaliditätsrente beziehen wird.

Aus den statistischen Grundlagen, die in der Čsl. Sozialversicherung der Arbeiter verwendet werden, ergeben sich für e_x^i resp. e_x^{ai} folgende, jedoch nicht kontinuierlich berechnete Werte:

Tabelle No 6.

x	e_x^i		e_x^{ai}	
	Männer	Frauen	Männer	Frauen
20	5,100	9,518	4,942	8,361
30	6,885	15,954	5,231	8,778
40	8,321	17,475	5,514	8,876
50	9,214	15,974	5,888	8,705
60	9,090	12,983	6,171	7,757

Demgegenüber sind die weiteren Werte für ${}^k\overline{e}_x^{ai}$ nicht von so einfacher Bedeutung wie die Werte für ${}^k\overline{e}_x$. Wird die Integralausdruck für ${}^{K+1}\overline{e}_x^{ai}$ transformiert und die Integration nach τ durchgeführt, erhalten wir

$${}^{K+1}\overline{e}_x^{ai} = \int_0^\infty p_{x,t}^{aa}\, v_{x+t}\left({}^{k+1}\overline{e}_{x+t}^{i} + \frac{t}{1!}\, {}^{k}\overline{e}_{x+t}^{i} + \ldots + \frac{t^k}{k!}\, {}^{1}\overline{e}_{x+t}^{i}\right) dt,$$

daher eine Formel mit dem Ausdruck ${}^k\overline{e}_{x+t}^{i}$, dessen Ausführung selbst eine ziemlich bedeutende rechnerische Arbeit erfordert; die Hauptschwierigkeit besteht darin, daß wir bei analoger Entwicklung von $\overline{a}_x^{ai'}$ für die neue Zinsintensität $\delta' = \delta + h$ den Ausdruck $\overset{\le(k)}{\overline{a}}{}^{i}_{x+t}$ erhalten, der praktisch ohne Bedeutung ist, da in keinem Versicherungssystem die Höhe der Rente nach dem Anfall anwächst.

Ansonsten kann aus der Reihe (12) eine analoge approximative Formel abgeleitet werden. So besteht z. B. eine Analogie zwischen der Steffensen-Formel und der Formel

$$\overline{a}_x^{ai} = \frac{1 - e^{-\delta(\overline{e}_x^{ai} - \delta\varepsilon_x^{ai})}}{\delta},$$

wobei

$$\overline{\varepsilon}_x^{ai} = {}^2\overline{e}_x^{ai} - \tfrac{1}{2}\,\overline{e}_x^{ai\,2}.$$

Aber auch hier besteht zwischen $\overline{\varepsilon}_x^{ai}$ und $\overline{\sigma}_x^{ai}$ keine solche Abhängigkeit, wie zwischen ε_x und σ_x in der Formel für $\overline{a}_x$. Es kann nachgewiesen werden, daß

$$\overline{\sigma}_x^{ai} = -\overline{e}_x^{ai\,2} + 2\int_0^\infty p_{x,t}^{aa}\,\nu_{x+t}\,{}^2\overline{e}_{x+t}^{i}\,dt,$$

während

$$\overline{\varepsilon}_x^{ai} = -\tfrac{1}{2}\,\overline{e}_x^{ai\,2} + \int_0^\infty p_{x,t}^{aa}\,\nu_{x+t}\,{}^2\overline{e}_{x+t}^{i} + \int_0^\infty t\,p_{x,t}^{aa}\,\nu_{x+t}\,\overline{e}_{x+t}^{i}\,dt.$$

Auch für die neue Zinsintensität kann $\overline{a}_x^{ai}$ entwickelt werden, in der Entwicklung zwar formell vollkommen gleich wie in der Reihe (5), die Koeffizienten

$$\overset{\le(k)}{\overline{a}}{}_x^{ai}$$

haben jedoch praktisch nicht die analoge Bedeutung wie die Werte $\overset{\le(k)}{a}_x$, sondern bilden eine Zusammenfassung der steigenden Renten nicht nur während der Aktivität, sondern auch während der Zeit ihres Bezuges.

Deshalb scheint es am besten, wenn bei der Approximation von der Beziehung

$$a_x^a = a_x^{aa} + a_x^{ai}$$

ausgegangen wird, allerdings unter der Voraussetzung, daß die entsprechende Tafel l_x^a und der aus ihr abgeleitete Wert a_x^a bekannt sind.