Hans Koeppler

Das Hattendorffsche Risiko kontinuierlicher Versicherungen mit mehrfachen Auflösungsmöglichkeiten

Aktuárské vědy, Vol. 5 (1935), No. 4, 161–181

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144638

Das Hattendorffsche Risiko kontinuierlicher Versicherungen mit mehrfachen Auflösungsmöglichkeiten.

H. Koeppler, Berlin.

Diese Arbeit hat im wesentlichen die Aufgabe die entsprechenden, Ergebnisse für kontinuierliche Versicherungen zu geben, die für jährliche Prämienberechnung schon in den in Nr. 4 und 11 des 4. Jahrgangs des Versicherungsarchivs erschienen Aufsätzen über das Hattendorffsche Risiko für Versicherungen mit mehrfachen Auflösungsmöglichkeiten dargestellt worden sind. Wie in den früheren Aufsätzen des Verfassers (1) handelt es sich um die Besprechung von Versicherungsformen, deren einmalige Prämien nach den Formeln

$$A^{I}_{x\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}+\delta)dt}\, \mu^{I}_{x+t} S^{I}_t \, dt + e^{-\int_0^n (\mu_{x+t}+\delta)dt} S_n, \tag{a}$$

und

$$\overline{A}^{II}_{x\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}+\delta)dt} (\mu^{I}_{x+t} S^{I}_t + \mu^{II}_{x+t} S^{II}_t)\, dt + e^{-\int_0^n (\mu_{x+t}+\delta)dt} S_n \tag{b}$$

$$(\mu_{x+t} = \mu^{I}_{x+t} + \mu^{II}_{x+t}); \int_0^n e^{-\int_0^t \mu_{x+t} dt} \mu_{x+t}\, dt + e^{-\int_0^n \mu_{x+t} dt} = 1),$$

berechnet werden.

Unser erstes Ziel sei es, die beiden Beweise des dänischen Mathematikers Bertelsen, welche Prof. J. F. Steffensen (Kopenhagen) in seinem Aufsatz „On Hattendorff's Theorem in Theory of Risk" in der Skandinavisk Aktuarietidskrift 1929 (Häft 1—2) bespricht, auf unsere beiden Versicherungsformen auszudehnen.

Es seien bereits k Jahre der Versicherungsdauer verflossen und die Versicherungen noch in Kraft. Für die Wahrscheinlichkeiten der letzteren gilt sodann insbezug auf die fernere Dauer von $n - k$ Jahren die Bedingung

$$\int_0^{n-k} e^{-\int_0^t \mu_{x+k+t} dt} (\mu^{I}_{x+k+t} + \mu^{II}_{x+k+t})\, dt + e^{-\int_0^{n-k} \mu_{x+k+t} dt} = 1.$$

Zwecks Vereinfachung der Bezeichnungsweise werde fortan

$$e^{-\int_0^t \mu_{x+k+t} dt} \mu^{I}_{x+k+t}\, dt = \overline{p}^{(1)}_{(t)}\, dt,$$

$$e^{-\int_0^t \mu_{x+k+t} dt} \mu^{II}_{x+k+t}\, dt = \overline{p}^{(2)}_{(t)}\, dt,$$

$$e^{-\int\limits_0^{n-k}\mu_{x+k+t}\,dt} = \overline{p}^{(3)}_{(n-k)}.$$

gesetzt.

Sind ${}_xV_k^I$ und ${}_xV_k^{II}$ die rechnungsmäßigen Deckungskapitale nach k Jahren der zu betrachtenden Versicherungen, so wollen wir ferner

$$\left.\begin{array}{l} e^{-t\delta}\, S^I_{k+t} - {}_x\overline{V}^I_k - \overline{P}^I_x\overline{a}_{\overline{t|}} \\ e^{-t\delta}\, S^I_{k+t} - {}_x\overline{V}^{II}_k - \overline{P}^{II}_x\overline{a}_{\overline{t|}} \end{array}\right\} = \overline{A}_t,$$

$$\left.\begin{array}{l} -({}_x\overline{V}^I_k + \overline{P}^I_x\overline{a}_{\overline{t|}}) \\ e^{-t\delta}\, S^{II}_{k+t} - {}_x\overline{V}^{II}_k - \overline{P}^{II}_x\overline{a}_{\overline{t|}} \end{array}\right\} = \overline{B}_t,$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{-\tau\delta}\, {}_xV^I_{k+\tau} - {}_xV^I_k - \overline{P}^I_x\overline{a}_{\overline{\tau|}} \\ e^{-\tau\delta}\, {}_x\overline{V}^{II}_{k+\tau} - {}_x\overline{V}^{II}_k - \overline{P}^{II}_x\overline{a}_{\overline{\tau|}} \end{array}\right\} = \overline{C}_\tau,$$

setzen, wobei die erste Zeile für die erste Vertragsart und die zweite Zeile für die zweite Vertragsart gilt. $\overline{a}_{\overline{t|}}$ bedeutet dabei den Barwert der kontinuierlichen Zeitrente von t jähriger Dauer, der wohl als bekannt vorausgesetzt werden darf.

Das Quadrat des mittleren Risikos für die τ Jahre, welche auf die verflossenen k Jahre folgen, wird nun nach der Formel

$$\overline{M}^2_{(\tau,k)} = \int\limits_0^\tau (\overline{p}^{(1)}_{(t)}\,\overline{A}^2_t + \overline{p}^{(2)}_{(t)}\,\overline{B}^2_t)\,dt + \overline{p}^{(3)}_\tau \overline{C}^2_\tau$$

berechnet, die bereits in einem größeren Aufsatz des Verfasser's enthalten war, welcher im Jahre 1917 vom Deutscher Verein für Versicherungswissenschaft angenommen wurde, jedoch später nicht veröffentlicht worden ist. Für ganzjährige Prämienzahlung findet man sie auch in dem im Jahre 1919 in den Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker erschienen Aufsatz „Zur begründenden Darstellung des ferneren Risikos verwickelterer Versicherungsformen“ (z. B. pag. 257).

In Analogie zu der Bertelsen'schen Darstellung bilden wir das mittlere Risikoquadrat für die auf die ersten k Jahre folgende Zeit von $\tau + d\tau$ Jahren

$$\overline{M}^2_{(\tau+d\tau,k)} = \int\limits_0^{\tau+d\tau} (\overline{p}^{(1)}_{(t)}\,\overline{A}^2_t + \overline{p}^{(2)}_{(t)}\,\overline{B}^2_t)\,dt + \overline{p}^{(3)}_{(\tau+d\tau)}\,\overline{C}^2_{\tau+d\tau}.$$

Auf dieses wenden wir die Taylor'sche Reihe an und vernachlässigen unendlich kleine Größen zweiter und höherer Ordnung, so erhalten wir

$$\overline{M}^2_{(\tau+d\tau,k)} = \overline{M}^2_{(\tau,k)} + (\overline{p}^{(1)}_{(\tau)}\,\overline{A}^2_\tau + \overline{p}^{(2)}_{(\tau)}\,\overline{B}^2_\tau)\,d\tau + \overline{p}^{(3)}_{(\tau)}\,\overline{C}^2_\tau + 2\overline{p}^{(3)}_{(\tau)}\,\overline{C}_\tau\,d\overline{C}_\tau,$$

und ferner

$$\mathrm{d}\overline{M}^2_{(\tau,k)} = \overline{M}^2_{(\tau+\mathrm{d}\tau,k)} - \overline{M}^2_{(\tau,k)} =$$
$$= (\overline{p}^{(1)}_{(\tau)}\overline{A}^2_\tau + \overline{p}^{(2)}_{(\tau)}\overline{B}^2_\tau)\,\mathrm{d}\tau - \overline{p}^{(3)}_{(\tau)}\mu_{x+k+\tau}\overline{C}^2_\tau\,\mathrm{d}\tau +$$
$$+ 2\overline{p}^{(3)}_{(\tau)}\overline{C}_\tau\left(e^{-\tau\delta}\frac{\mathrm{d}_x V^{I/II}_{k+\tau}}{\mathrm{d}\tau} - e^{-\tau\delta}{}_xV^{I/II}_{k+\tau}\,\delta - \overline{P}^{I/II}_x e^{-\tau\delta}\right)\mathrm{d}\tau.$$

Wird nun für beide Versicherungsformen die Umfornung

$$\overline{A}_\tau = e^{-\tau\delta}(S_{k+\tau} - {}_x\overline{V}_{k+\tau}) + (e^{-\tau\delta}{}_xV_{k+\tau} - {}_xV_k - P_x\overline{a}_{\overline{\tau|}}) = \overline{a}_\tau + \overline{C}_\tau,$$

des Weiteren für die erste Vertragsform die Zerlegung

$$\overline{B}_\tau = -({}_x\overline{V}^I_k + \overline{P}^I_x\overline{a}_{\overline{t|}}) = -e^{-\tau\delta}{}_x\overline{V}^I_{k+\tau} +$$
$$+ (e^{-\tau\delta}{}_x\overline{V}^I_{k+\tau} - {}_x\overline{V}^I_k - \overline{P}_x\,\overline{a}_{\overline{\tau|}}) = \overline{b}_\tau + \overline{C}_\tau,$$

und für die zweite Vertragsform die Zerlegung

$$\overline{B}_\tau = (e^{-\delta\tau}S^{II}_{k+\tau} - {}_x\overline{V}^{II}_k - \overline{P}^{II}_x\,\overline{a}_{\overline{\tau|}}) = e^{-\tau\delta}(S^{II}_{k+\tau} - {}_x\overline{V}^{II}_{k+\tau}) +$$
$$+ (e^{-\tau\delta}{}_x\overline{V}^{II}_{k+\tau} - {}_x\overline{V}^{II}_k - \overline{P}^{II}_x\,\overline{a}_{\overline{\tau|}}) = \overline{b}_\tau + \overline{C}_\tau,$$

vorgenommen, so findet man ferner

$$\mathrm{d}\overline{M}^2_{(\tau,k)} = (\overline{p}^{(1)}_{(\tau)}\overline{a}^2_\tau + \overline{p}^{(2)}_{(\tau)}\overline{b}^2_\tau)\,\mathrm{d}\tau + 2\,(\overline{p}^{(1)}_{(\tau)}\overline{a}_\tau + \overline{p}^{(2)}_{(\tau)}\overline{b}_\tau)\,\overline{C}_\tau\,\mathrm{d}\tau +$$
$$+ (\overline{p}^{(1)}_{(\tau)} + \overline{p}^{(2)}_{(\tau)})\,\overline{C}^2_\tau\,\mathrm{d}\tau - \overline{p}^{(2)}_{(\tau)}\mu_{x+k+\tau}\overline{C}^2_\tau\,d\tau + 2\overline{p}^{(3)}_{(\tau)}\overline{C}_\tau e^{-\tau\delta}\left(\frac{\mathrm{d}_x\overline{V}_{k+\tau}}{\mathrm{d}\tau} - \right.$$
$$\left. - {}_xV_{k+\tau}\delta - \overline{P}_x\right)\mathrm{d}\tau.$$

Da nun aber

$$(\overline{p}^{(1)}_{(\tau)} + \overline{p}^{(2)}_{(\tau)})\,\mathrm{d}\tau = \overline{p}^{(3)}_{(\tau)}\mu_{x+k+\tau}\,\mathrm{d}\tau,$$

und entweder

$$(\overline{p}^{(1)}_{(\tau)}\overline{a}_{(\tau)} + \overline{p}^{(2)}_{(\tau)}\overline{b}_{(\tau)})\,\mathrm{d}\tau = \overline{p}^{(3)}_{(\tau)}\mu^{(1)}_{x+k+\tau}e^{-\tau\delta}(S^I_{k+\tau} - {}_x\overline{V}^I_{k+\tau})\,\mathrm{d}\tau +$$
$$+ \overline{p}^{(3)}_{(\tau)}\mu^{(2)}_{x+k+\tau}(e^{-\tau\delta}{}_x\overline{V}^I_{k+\tau})\,\mathrm{d}\tau =$$
$$= \overline{p}^{(3)}_{(\tau)}e^{-\tau\delta}\left(-\frac{\mathrm{d}_x\overline{V}^I_{k+\tau}}{\mathrm{d}\tau} + {}_x\overline{V}^I_{k+\tau}\delta + \overline{P}^I_x\right)\mathrm{d}\tau$$

oder

$$(\overline{p}^{(1)}_{(\tau)}\overline{a}_{(\tau)} + \overline{p}^{(2)}_{(\tau)}\overline{b}_{(\tau)})\,\mathrm{d}\tau = \overline{p}^{(3)}_{(\tau)}\mu^{(1)}_{x+k+\tau}e^{-\tau\delta}(S^I_{k+\tau} - {}_x\overline{V}^I_{k+\tau})\,\mathrm{d}\tau +$$
$$+ \overline{p}^{(3)}_{(\tau)}\mu^{(2)}_{x+k+\tau}e^{-\tau\delta}(S^{II}_{k+\tau} - {}_x\overline{V}^{II}_{k+\tau})\,\mathrm{d}\tau =$$
$$= \overline{p}^{(3)}_{(\tau)}e^{-\tau\delta}\left(-\frac{\mathrm{d}_x\overline{V}^{II}_{k+\tau}}{\mathrm{d}x} + {}_x\overline{V}^{II}_{k+\tau}\delta + \overline{P}^{II}_x\right)\mathrm{d}\tau,$$

wonach

$$(\overline{p}^{(1)}_{(\tau)}\overline{a}_{(\tau)} + \overline{p}_{(\tau)}\overline{b}_{(\tau)})\,\mathrm{d}\tau = -\overline{p}^{(3)}_{(\tau)}\,\mathrm{d}\overline{C}_{(\tau)},$$

so behält man

$$\mathrm{d}\overline{M}^2_{(\tau,k)} = (\overline{p}^{(1)}_{(\tau)}\overline{a}^2_{(\tau)} + \overline{p}^{(2)}_{(\tau)}\overline{b}^2_{(\tau)})\,\mathrm{d}\tau,$$

d. i. aber der Hoffnungswert des mittleren Risikoquadrats der Zeitstrecke $k+\tau$ bis $k+\tau+d\tau$. Integriert man diesen Ausdruck nach τ zwischen 0 und $n-k$, dabei beachtend, daß $\overline{M}^2_{(0,k)}=0$ sein muß, so erhält man den analytischen Ausdruck des Hattendorff'schen Risikoquadrats für die Restdauer von $n-k$ Jahren

$$\overline{M}^2_{(n-k,k)}=\int_0^{n-k}(\overline{p}^{(1)}_{(\tau)}\overline{a}^2_{(\tau)}+\overline{p}^{(2)}_{(\tau)}\overline{b}^2_{(\tau)})\,d\tau=\int_k^n e^{-\int_k^\tau(\mu_{x+\vartheta}+2\delta)d\vartheta}\times\overline{m}^2_\tau\,d\tau.$$

Diese Betrachtung hätte etwas einfacher durchgeführt werden können, wenn man sogleich nach der oberen Grenze des Integrals differentiiert und darauf analoge Umformungen vorgenommen hätte. Für die einfache Lebensversicherung findet man diese Berechnung bei Dr. Berger (2). Jedoch sei bemerkt, daß man nach der Differentiation nach der oberen Integralgrenze auch mit Zuhilfenahme des Barwerts der Differentialrisikoprämien umformen kann.

Seinen zweiten Beweis des Hattendorff'schen Risikosatzes führt Bertelsen unter Verwendung einer Formel von Thiele. Diese muß aber zwecks Anwendung auf Versicherungen, welche auf zweiändrigen Ausscheideordnungen beruhen, zunächst einer Erweiterung unterworfen werden. Auch fernerhin die bereits eingeführte Bezeichnungsweise verwendend, setzen wir

$$\int_0^\tau(\overline{p}^{(1)}_{(t)}+\overline{p}^{(2)}_{(t)})\,d\tau=P$$

und bilden den Hoffnungswert der mit den Wahrscheinlichkeiten $\overline{p}^{(1)}_{(t)}$ und $\overline{p}^{(2)}_{(t)}$ zu erwartenden Beträge $\overline{A}_t$ und $\overline{B}_t$

$$H_1=\frac{1}{P}\int_0^\tau(\overline{p}^{(1)}_{(t)}A_t+\overline{p}^{(2)}_{(t)}B_t)\,dt.$$

Die Division durch P wird vorgenommen, um die Summe der Wahrscheinlichkeiten auf 1 zurückzuführen. Ferner ist das Quadrat der mittleren Abweichung von H_1 nach der allgemeinen Formel

$$\mu^2(H_1)=\frac{1}{P}\int_0^\tau[\overline{p}^{(1)}_{(t)}(\overline{A}_{(t)}-H_1)^2+\overline{p}^{(2)}_{(t)}(\overline{B}_{(t)}-H_1)^2]\,dt,$$

zu berechnen. Durch Auflösung der Quadrate und Anwendung der Formel für H_1 läßt sich die einfachere Formel für die mittlere Abweichung τ

$$\mu^2(H_1)=\frac{1}{P}\int_0^\tau(\overline{p}^{(1)}_{(t)}\overline{A}^2_{(t)}+\overline{p}^{(2)}_{(t)}\overline{B}^2_{(t)})^2\,dt-H_1{}^2,$$

angeben. Für die auf die verflossenen $k+\tau$ folgenden Jahre $l-\tau$ Jahre bestehen die Wahrscheinlichkeiten

$$\int_{\tau}^{l}(\overline{p}_{(t)}^{(1)}+\overline{p}_{(t)}^{(2)})\,dt+p_{(l)}^{(3)}=1-P,$$

mit welchen die Beträge $\overline{A}_{(t)}$, $\overline{B}_{(t)}$ und $\overline{C}_{(l)}=e^{-l\delta}{}_x\overline{V}_{k+l}-{}_x\overline{V}_k-\overline{P}_x\overline{a}_{\overline{l|}}$ zu erwarten sind. Für die letzteren besteht daher der zweite Hoffnungswert

$$H_2=\frac{1}{1-P}\left[\int_{\tau}(\overline{p}_{(t)}^{(1)}\overline{A}_{(t)}+\overline{p}_{(t)}^{(2)}\overline{B}_{(t)})\,dt+\overline{p}_{(l)}^{(3)}\overline{C}_{(l)}\right].$$

Das Quadrat der mittleren Abweichung dieses Hoffnungswerts beträgt

$$\mu^2(H_2)=\frac{1}{1-P}\left\{\int_{\tau}^{l}[\overline{p}_{(t)}^{(1)}(\overline{A}_{(t)}-H_2)^2+\overline{p}_{(t)}^{(2)}(B_{(t)}-H_2)^2]\,dt+\right.$$
$$\left.+\overline{p}_{l}^{(3)}(\overline{C}_{(l)}-H_2)^2\right\},$$

und läßt sich auf die einfachere Form

$$\mu^2(H_2)=\frac{1}{1-P}\left[\int_{\tau}^{l}(\overline{p}_{(t)}^{(1)}A_{(t)}^2+\overline{p}_{(t)}^{(2)}\overline{B}_{(t)}^2)\,dt+\overline{p}_{(l)}^{(3)}\overline{C}_{(l)}^2\right]-H_2{}^2$$

bringen. Ohne weiteres erkennt man, daß der Hoffnungswert der Gesamtzeit von $\tau+(l-\tau)=l$ Jahren

$$H=\int^{\tau}(\overline{p}_{(t)}^{(1)}\overline{A}_{(t)}+\overline{p}_{(t)}^{(2)}\overline{B}_{(t)})\,dt+\int_{\tau}^{l}(\overline{p}_{(t)}^{(1)}\overline{A}_{(t)}+\overline{p}_{(t)}^{(2)}\overline{B}_{(t)})\,dt+\overline{p}_{(l)}^{(3)}\overline{C}_{(l)}=$$
$$=P\,.\,H_1+(1-P)\,H_2$$

beträgt. Das Quadrat der mittleren Abweichung dieses Hoffnungswerts H läßt sich zunächst in der einfachen Form

$$\mu^2(H)=\int_{0}^{\tau}(\overline{p}_{(t)}^{(1)}\overline{A}_{(t)}^2+\overline{p}_{(t)}^{(2)}\overline{B}_{(t)}^2)\,dt+\int_{\tau}^{l}(\overline{p}_{(t)}^{(1)}\overline{A}_{(t)}^2+\overline{p}_{(t)}^{(2)}\overline{B}_{(t)}^2)\,dt+$$
$$+\overline{p}_{(l)}^{(3)}\overline{C}_{(l)}^2-H^2,$$

angeben. Mit Hilfe der Werte $\mu^2(H_1)$ und $\mu^2(H_2)$ kann man sie darauf auf die Thiele'sche Form

$$\begin{aligned}\mu^2(H)&=P[\mu^2(H_1)+H_1{}^2]+(1-P)[\mu^2(H_2)+H_2{}^2]-H^2\\&=P\,\mu^2(H_1)+(1-P)\,\mu^2(H_2)+P\,(1-P)\,(H_1-H_2)^2\end{aligned}$$

bringen.

Für eine zweite Dauer $l' - \tau > l - \tau$ bestehe der Hoffnungswert H'_2 und das Quadrat der mittleren Abweichung $\mu^2(H'_2)$. Der Hoffnungswert der Gesamtdauer $\tau + l'$ werde mit H' und das Quadrat seiner mittleren Abweichung durch $\mu^2(H')$ bezeichnet. Gemäß der soeben aufgestellten Formel muß dann auch die Formel

$$\mu^2(H') = P\,\mu^2(H_1) + (1 - P)\,\mu^2(H'_2) + P\,(1 - P)\,(H_1 - H'_2)^2$$

bestehen. Nunmehr werde zwischen beiden Formeln die Differenz

$$\mu^2(H') - \mu^2(H) = (1 - P)\,[\mu^2(H'_2) - \mu^2(H_2)] + \\ + P\,(1 - P)\,[(H_1 - H'_2)^2 - (H_1 - H_2)^2]$$

gebildet.

Ist $H'_2 = H_2$ und $\mu^2(H_2) = 0$, so folgt die einfache Beziehung

$$\mu^2(H') - \mu^2(H) = (1 - P)\,\mu^2(H'_2).$$

Nach Bertelsen läßt sich diese interessante Formel zur Darstellung das Hattendorff'schen Risikoquadrats verwenden. Da wir uns hier mit kontinuierlichen Versicherungen beschäftigen, haben wir zunächst

$$H' = H + \mathrm{d}H$$

sowie

$$\mu^2(H + \mathrm{d}H) = \mu^2(H) + \mathrm{d}\mu^2(H)$$

und

$$\mu^2(H + \mathrm{d}H) - \mu^2(H) = \mathrm{d}\mu^2(H)$$

zu setzen. Die weitere Anwendung dieser Formel hat in der Weise zu erfolgen, daß man erst $l - \tau = 0$ und darauf $l' - \tau = \mathrm{d}\tau$ setzt.

Für $l = \tau$ wird

$$H_2 = \frac{\overline{p}^{(3)}_{(\tau)}}{1 - P}\,\overline{C}_\tau = \frac{\overline{p}^{(3)}_{(\tau)}}{\overline{p}^{(3)}_{(\tau)}}\,\overline{C}_\tau = \overline{C}_\tau,$$

und mithin

$$\mu^2(H_2) = \frac{1}{1 - P}\,\overline{p}^{(3)}_{(\tau)}\,(\overline{C}_\tau - H_2)^2 = \frac{\overline{p}^{(3)}_\tau}{\overline{p}^{(3)}_{(\tau)}}\,(\overline{C}_\tau - \overline{C}_\tau)^2 = 0.$$

Für $l' = \tau + \mathrm{d}\tau$ folgt

$$H'_2 = \frac{1}{1 - P}\,[(\overline{p}^{(1)}_{(\tau)}\,\overline{A}_\tau + \overline{p}^{(2)}_{(\tau)}\,\overline{B}_\tau)\,\mathrm{d}\tau + \overline{p}^{(3)}_{(\tau+\mathrm{d}\tau)}\,\overline{C}_{\tau+\mathrm{d}\tau}].$$

Setzt man hierin $\overline{p}^{(3)}_{(\tau+\mathrm{d}\tau)} = \overline{p}^{(3)}_{(\tau)} - (\overline{p}^{(1)}_{(\tau)} + \overline{p}^{(2)}_{(\tau)})\,\mathrm{d}\tau$ und $\overline{C}_{\tau+\mathrm{d}\tau} = \overline{C}_\tau + \mathrm{d}\overline{C}_\tau$ und vernachlässigt die Größen zweiter Ordnung, so bekommt man ferner

$$H'_2 = \frac{1}{1 - P}\,[\overline{p}^{(1)}_{(\tau)}\,(\overline{A}_\tau - \overline{C}_\tau)\,\mathrm{d}\tau + \overline{p}^{(2)}_{(\tau)}\,(\overline{B}_\tau - \overline{C}_\tau)\,\mathrm{d}\tau + \overline{p}^{(3)}_{(\tau)}\,(\overline{C}_\tau + \mathrm{d}\overline{C}_\tau)].$$

Nach dem vorigen Beweis kann man aber

$$\overline{A}_\tau - \overline{C}_\tau = \overline{a}_\tau,\quad \overline{B}_\tau - \overline{C}_\tau = \overline{b}_\tau$$

und

$$\mathrm{d}\overline{C}_\tau = e^{-\tau\delta}\left(\frac{\mathrm{d}_x \overline{V}^{I/II}_{k+\tau}}{\mathrm{d}\tau} - {}_x\overline{V}^{I/II}_{k+\tau}\,\delta - \overline{P}^{I/II}_x\right)\mathrm{d}\tau = -\,e^{\tau\delta}{}_x\overline{\Pi}_{x+\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

setzen, wobei ${}_x\overline{\Pi}_{k+\tau}\,\mathrm{d}\tau$ die Risikoprämie des Zeitmoments $k+\tau$ bis $k+\tau+\mathrm{d}\tau$ bedeutet. Man erhält somit ferner

$$H'_2 = \frac{1}{1-P}\,[\overline{p}^{(1)}_{(\tau)}\overline{a}_\tau\,\mathrm{d}\tau + \overline{p}^{(2)}_{(\tau)}\overline{b}_\tau\,\mathrm{d}\tau + \overline{p}^{(3)}_{(\tau)}(\overline{C}_\tau - e^{-\tau\delta}\,{}_x\overline{\Pi}_{k+\tau}\,\mathrm{d}\tau)].$$

Mit Benutzung der Erklärungen des vorigen Beweis läßt sich aber auch zeigen, daß die Gleichung

$$\overline{p}^{(1)}_{(\tau)}\overline{a}_\tau\,\mathrm{d}\tau + \overline{p}^{(2)}_{(\tau)}\overline{b}_\tau\,\mathrm{d}\tau = \overline{p}^{(3)}_{(\tau)}e^{-\tau\delta}\,{}_x\overline{\Pi}_{k+\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

besteht, sodaß man in der Tat auch

$$H'_2 = \frac{\overline{p}^{(3)}_{(\tau)}}{1-P}\overline{C}_\tau = \overline{C}_\tau$$

erhält. Nach der Grunderklärung gilt für das Quadrat der mittleren Abweichung von H'_2 die Formel

$$\mu^2(H'_2) = \frac{1}{1-P}\,[\overline{p}^{(1)}_{(\tau)}(\overline{A}_\tau - H'_2)^2\,\mathrm{d}\tau + \overline{p}^{(2)}_{(\tau)}(\overline{B}_\tau - H'_2)^2\,\mathrm{d}\tau + {}$$
$$+\,\overline{p}^{(3)}_{(\tau+\mathrm{d}\tau)}(\overline{C}_{\tau+\mathrm{d}\tau} - H'_2)^2].$$

Setzt man hierin nach der Entwicklung $H'_2 = C_\tau$ und beachtet, daß $(\overline{C}_{\tau+\mathrm{d}\tau} - \overline{C}_\tau)^2 = (\mathrm{d}\overline{C}_\tau)^2$ als unendlichkleine Größe 2^{ter} Ordnung vernachlässigt werden kann, so ergibt sich

$$\mu^2(H'_2) = \frac{1}{1-P}\,[\overline{p}^{(1)}_{(\tau)}(\overline{A}_\tau - \overline{C}_\tau)^2 + \overline{p}^{(2)}_{(\tau)}(\overline{B}_\tau - \overline{C}_\tau)^2\,\mathrm{d}\tau =$$
$$= \frac{1}{1-P}\,[\overline{p}^{(1)}_{(\tau)}\overline{a}^2_\tau + \overline{p}^{(2)}_{(\tau)}\overline{b}^2_\tau]\,\mathrm{d}\tau,$$

und mit diesem Wert der Integrand des Hattendorff'schen Risikoquadrats

$$\mathrm{d}\mu^2(H) = (\overline{p}^{(2)}_{(\tau)}\overline{a}^2_\tau + \overline{p}^{(2)}_{(\tau)}\overline{b}^2_\tau)\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}\overline{M}^2_{(\tau,k)}.$$

Die Umformung des natürlichen mittleren Risikoquadrats der ferneren Dauer in das Hattendorff'sche Risikoquadrat, wie sie der Verfasser in seinem Artikel „Zur Theorie des mittleren Risikos der ferneren Dauer von Versicherungen mit kontinuierlicher Prämienberechnung, die auf zweiändrigen Ausscheideordnungen beruhen“ gezeigt hat, steht wohl aber hinter diesen Beweisen nicht zurück.

Unsere weitere Aufgabe soll es sein, den Hattendorff'schen Satz mittels des Tschebyscheff'schen Theorems herzuleiten. Für jährliche Prämienberechnung hat der Verfasser einige Darstellungen schon, wie eingangs angedeutet, gegeben. Will man die entsprechenden Betrachtungen aber für ein Zeitdifferential anstellen, so zeigen sich Schwierigkeiten. Einen ersten Ausweg bietet eine Kollektivberechnung, bei welcher zum Schluß die dem ersten Beweis von Bertelsen entsprechende analytische Darstellung oder die schon zitierte Darstellung von Dr. Berger Anwendung findet.

Wir gehen von der generierenden Funktion

$$X_{(\tau)} = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} Z_\lambda = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s}\left(\int_0^\tau (\overline{p}^{(1)}_{(t,\lambda)} e^{\overline{A}_{(t,\lambda)} zi} + \overline{p}^{(2)}_{(t,\lambda)} e^{\overline{B}_{(t,\lambda)} zi})\, \mathrm{d}t + \overline{p}^{(3)}_{(\tau,\lambda)} e^{\overline{C}_{(\tau,\lambda)} zi}\right)$$

aus, in welcher die Größen $\overline{A}$, $\overline{B}$ und $\overline{C}$ die bereits früher definierten Eigenschaften haben, und λ anzeigt, daß sich diese Größen auf die λ^{te} der s Versicherungen beziehen. Auch diese generierende Funktion war bereits in der schon erwähnten, nicht veröffentlichten Abhandlung des Verfassers enthalten.

Differentiiert man diese generierende Funktion einmal und zweimal nach z und berechnet die Grenzwerte der beiden Differentialquotienten ür $z = 0$, so erhält man mit Benutzung der Beziehungen

$$(X_{(\tau)})_{z=0} = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} (Z_\lambda)_{z=0} = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s}\left(\int_0^\tau (\overline{p}^{(1)}_{(t,\lambda)} + \overline{p}^{(2)}_{(t,\lambda)})\, \mathrm{d}t + \overline{p}^{(3)}_{(\tau,\lambda)}\right) = 1,$$

und

$$\int_0^\tau (\overline{p}^{(1)}_{(t,\lambda)} \overline{A}_{(t,\lambda)} + \overline{p}^{(2)}_{(t,\lambda)} \overline{B}_{(t,\lambda)})\, \mathrm{d}t + \overline{p}^{(3)}_{(\tau,\lambda)} \overline{C}_{(\tau,\lambda)} = 0,$$

die Werte

$$\left(\frac{\mathrm{d}X_{(\tau)}}{\mathrm{d}Z}\right)_{z=0} = i\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s}\left(\int_0^\tau (\overline{p}^{(1)}_{(t,\lambda)} \overline{A}_{(t,\lambda)} + \overline{p}^{(2)}_{(,\lambda)} \overline{B}_{(t,\lambda)})\, \mathrm{d}t + \overline{p}^{(3)}_{(\tau,\lambda)} \overline{C}_{(\tau,\lambda)}\right) = 0$$

und

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2X_{(\tau)}}{\mathrm{d}z^2}\right)_{z=0} = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s}\left(\int_0^\tau (\overline{p}^{(1)}_{(t,\lambda)} \overline{A}^2_{(t,\lambda)} + \overline{p}^{(2)}_{(t,\lambda)} \overline{B}^2_{(t,\lambda)})\, \mathrm{d}t + \overline{p}^{(3)}_{(\tau,\lambda)} \overline{C}^2_{(\tau,\lambda)})\right) =$$

$$= -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \overline{M}^2_{(k_\lambda,\tau)} = -\,\mathfrak{M}^2_{(\tau)}.$$

Wie der Verfasser schon in seinem Artikel in No 1 des Volume III, Serie II des Giornale di Matematica Finanziaria, 1. Marzo 1933 bemerkte, kann man die generierende Funktion $X_{(\tau)}$ auch durch das Integral

$$X_{(\tau)} = \int P_{(K)}\, e^{Kzi}\, \mathrm{d}K,$$

darstellbar denken, in welchem die nicht angegebenen Grenzen wie die Variable K sämtlich als Funktionen von τ anzusehen sind.. Bisher hat der Verfasser wohl noch nicht darauf aufmerksam gemacht, daß bereits Bienaymé (3) diese Gleichung mittels des Laplace-Poisson'schen Wahrscheinlichkeitsausdrucks und des Fourier'schen Doppelintegrals nachgewiesen hat. Nach Laplace und Poisson ist bekanntlich

$$P_{(K)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_{(z)}\, e^{-Kzi}\, dz.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $e^{Kui}\, dK$ und integriert nach K, so entsteht die Gleichung

$$\int P_{(K)}\, e^{Kui}\, dK = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{Kui}\, dK \int_{-\infty}^{\infty} X_{(z)}\, e^{-Kzi}\, dz.$$

Da aber nach Fourier

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{uxi}\, du \int_{-\infty}^{\infty} F(z)\, e^{-uzi}\, dz,$$

so folgt

$$\int P_{(K)}\, e^{Kui}\, dK = X(u).$$

Hierin kann aber für u auch z gesetzt werden. Multipliziert man diese Gleichung andrerseits mit dem Faktor

$$e^{-K'ui}\, du,$$

und integriert zwischen $-\infty$ und $+\infty$, so entsteht die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-K'ui}\, du \int_{-\infty}^{\infty} P_{(K)}\, e^{Kui}\, dK = \int_{-\infty}^{\infty} X(u)\, e^{-K'ui}\, du.$$

Da aber nach Fourier auch

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xui}\, du \int_{-\infty}^{\infty} F(z)\, e^{uzi}\, dz,$$

so folgt in umgekehrter Weise

$$P_{(K')} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(u)\, e^{-K'ui}\, du.$$

Differentiiert man auch die Gleichung

$$X(\tau) = \int P_{(K)}\, e^{Kzi}\, dK$$

zweimal nach z und setzt in jedem Differentialquotienten $z = 0$, so folgt zunächst.

$$\left(\frac{dX(\tau)}{dz}\right)_{z=0} = i\int P_{(K)} K\, dK,$$

$$\left(\frac{d^2X(\tau)}{dz^2}\right)_{z=0} = -\int P_{(K)}\, K^2\, dK.$$

Außerdem ist auch noch

$$X(z)_{z=0} = \int P_{(K)}\, \mathrm{d}K = 1.$$

Da nun aber nach dem Vorhergehenden

$$\left(\frac{\mathrm{d}X(\tau)}{\mathrm{d}z}\right)_{z=0} = 0$$

und

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2X(\tau)}{\mathrm{d}z^2}\right)_{z=0} = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \overline{M}^2_{(k_\lambda,\tau)}$$

so folgt die für unsere Zwecke wichtige und notwendige Beziehung

$$\int P_{(K)}\, K^2\, \mathrm{d}K = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \overline{M}^2_{(k_\lambda,\tau)} = \overline{\mathfrak{M}}^2_{(\tau)}.$$

Es ist einleuchtend, daß man auch diese Kollektiv-Gleichung nach τ differentiieren kann, wonach

$$\frac{\mathrm{d}\int P_{(K)}\, K^2\, \mathrm{d}K}{\mathrm{d}\tau} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \frac{\mathrm{d}\overline{M}^2_{(k_\lambda,\tau)}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\,\overline{\mathfrak{M}}^2_{(\tau)}}{\mathrm{d}\tau}.$$

Wenn man rechts vom Gleichheitszeichen die Differentiation ausführt, die Differentialquotienten sodann vereinfacht und darauf die so entstandene Gleichung nach τ zwischen 0 und der noch verbleibenden längsten Dauer ν_m der s Versicherungen integriert, so erhält man

$$\int P_{(K)}\, K^2\, \mathrm{d}K = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \overline{M}^2_{(k_\lambda,\nu_\lambda)} = \overline{\mathfrak{M}}^2,$$

wobei nach dem Vorhergehenden

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \overline{M}^2_{(k_\lambda,\nu_\lambda)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \overline{M}^2_\lambda = \overline{\mathfrak{M}}^2,$$

nunmehr das mittlere fernere Risikoquadrat der s Versicherungen in der Hattendorff'schen Form darstellt. Zur Ergänzung und weiteren Erklärung dieser Ausführungen ist wohl nur noch zu bemerken, daß

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overline{M}^2_{(k_\lambda,\tau)}}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau>\nu_\lambda} = 0$$

und

$$\lim_{\tau=0} \int P_{(K)}\, K^2\, \mathrm{d}K = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \overline{C}^2_{(0,\lambda)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} ({}_{x_\lambda}\overline{V}_{k_\lambda} - {}_{x_\lambda}\overline{V}_{k_\lambda} - \overline{P}_{x_\lambda} a_{\overline{0|}})^2 = 0.$$

Wir wollen nun auch noch die generierende Funktion

$$X_{(\tau)} = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} Z_\lambda = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} \left(\int_0^\tau (\overline{p}^{(1)}_{(t,\lambda)}\, e^{\mathfrak{A}(t,\lambda)^{zi}} + \overline{p}^{(2)}_{(t,\lambda)}\, e^{\mathfrak{B}(t.\lambda)^{zi}})\, \mathrm{d}t + \overline{p}^{(3)}_{(t,\lambda)}\, e^{\mathfrak{C}(t,\lambda)^{zi}} \right)$$

behandeln, in welcher

$$\overline{\mathfrak{A}}_{(t,\lambda)} = \begin{cases} e^{-t\delta} S^{I}_{k_\lambda+t} - \overline{P}^{I}_{x_\lambda}\, \overline{a}_{\overline{t}|} \\ e^{-t\delta} S^{II}_{k_\lambda+t} - \overline{P}^{II}_{x_\lambda}\, \overline{a}_{\overline{t}|} \end{cases}$$

$$\overline{\mathfrak{B}}_{(t,\lambda)} = \begin{cases} -\overline{P}^{I}_{x_\lambda}\, \overline{a}_{\overline{t}|} \\ e^{-t\delta} \overline{S}^{II}_{x_\lambda+t} - \overline{P}^{II}_{x_\lambda}\, \overline{a}_{\overline{t}|} \end{cases}$$

$$\overline{\mathfrak{C}}_{(\tau,\lambda)} = e^{-\tau\delta}\, {}_{x_\lambda}\overline{V}^{I/II}_{k_\lambda+\tau} - \overline{P}^{I/II}_{x_\lambda}\, \overline{a}_{\overline{\tau}|}$$

bedeutet. Auch für diese generierende Funktion gilt

$$(X_{(\tau)})_{z=0} = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} (Z_\lambda)_{z=0} = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} \left(\int_0^\tau (\overline{p}^{(1)}_{(t,\lambda)} + \overline{p}^{(2)}_{(t,\lambda)})\, dt + \overline{p}^{(3)}_{(\tau,\lambda)} \right) = 1.$$

Hingegen findet man erstens

$$\left(\frac{dX_{(\tau)}}{dz}\right)_{z=0} = i \left[\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \left(\int_0^\tau (\overline{p}^{(1)}_{(t,\lambda)}\, \overline{\mathfrak{A}}_{(t,\lambda)} + \overline{p}^{(2)}_{(t,\lambda)}\, \overline{\mathfrak{B}}_{(t,\lambda)} \right) dt + \overline{p}^{(3)}_{(\tau,\lambda)} \overline{\mathfrak{C}}_{(\tau,\lambda)} \right] =$$

$$= i \left[\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} ({}_{|\tau}\, \overline{A}^{I/II}_{(x+k)_\lambda} - \overline{P}^{I/II}_{x_\lambda}\, \overline{a}_{(x+k)_\lambda, \overline{\tau}|}) + {}_\tau p^{(3)}_{(x+k)_\lambda}\, {}_{x_\lambda}\overline{V}^{I/II}_{k_\lambda+\tau} \right] =$$

$$= i \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} {}_{x_\lambda}\overline{V}^{I/II}_{k_\lambda}$$

und ferner

$$\left(\frac{d^2X_{(\tau)}}{dz^2}\right)_{z=0} = - \left\{ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \left[\left(\int_0^\tau (\overline{p}^{(1)}_{(t,\lambda)} \overline{\mathfrak{A}}^2_{(t,\lambda)} + \overline{p}^{(2)}_{(t,\lambda)} \overline{\mathfrak{B}}^2_{(t,\lambda)})\, dt + \overline{p}^{(3)}_{(t,\lambda)} \overline{\mathfrak{C}}^2_{(t,\lambda)} \right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - ({}_{x_\lambda}\overline{V}_{k_\lambda})^2 \right] \right\} - \left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} {}_{x_\lambda}V_{k_\lambda} \right)^2 =$$

$$= - \left[\overline{\mathfrak{M}}^2_{(\tau)} + \left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} {}_{x_\lambda}\overline{V}_{k_\lambda} \right)^2 \right].$$

Wir bilden nun auch die drei Grenzwert-Gleichungen

$$(X_{(\tau)})_{z=0} = \int P_{(\mathfrak{K})}\, d\mathfrak{K}$$

$$\left(\frac{dX_{(\tau)}}{dz}\right)_{z=0} = i \int P_{(\mathfrak{K})}\, \mathfrak{K}\, d\mathfrak{K}$$

$$\left(\frac{d^2X_{(\tau)}}{dz^2}\right)_{z=0} = - \int P_{(\mathfrak{K})}\, \mathfrak{K}^2\, d\mathfrak{K},$$

so führt der Vergleich mit den oben berechneten Grenzwerten zu den Beziehungen

$$\int P_{(\mathfrak{K})}\,\mathfrak{K}\mathrm{d} = 1,$$

$$\int P_{(\mathfrak{K})}\,\mathfrak{K}\,\mathrm{d}\mathfrak{K} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} x_\lambda \overline{V}_{k_\lambda},$$

$$\int P_{(\mathfrak{K})}\,\mathfrak{K}^2\,\mathrm{d}\mathfrak{K} = \overline{\mathfrak{M}}^2_{(\tau)} + \left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} x_\lambda \overline{V}_{k_\lambda}\right)^2.$$

Aus der letzten derselben leiten wir die für unsere Zwecke erforderliche Beziehung ab, indem wir

$$\int P_{(\mathfrak{K})}\left(\mathfrak{K} - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} x_\lambda \overline{V}_{k_\lambda}\right)^2 \mathrm{d}\mathfrak{K} = \int P_{(\mathfrak{K})}\,\mathfrak{K}^2\,\mathrm{d}\mathfrak{K} - \left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} x_\lambda \overline{V}_{k_\lambda}\right)^2,$$

berechnen, wonach

$$\int P_{(\mathfrak{K})}\left(\mathfrak{K} - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} x_\lambda \overline{V}_{k_\lambda}\right)^2 \mathrm{d}\mathfrak{K} = \overline{\mathfrak{M}}^2_{(\tau)}.$$

An der linken Seite dieser Gleichung läßt sich erkennen, daß auch ihre rechte Seite eine Funktion von τ ist. Durch Differentiation nach τ, Transformation der rechten Seite und Integration nach τ zwischen 0 und ν_m erhält man rechts wieder das mittlere fernere Risikoquadrat der s Versicherungen in der Hattendorff'schen Form. Rechts dagegen ergibt sich der Integralausdruck

$$\int P_{(\mathfrak{K})}\left(\mathfrak{K} - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} x_\lambda \overline{V}_{k_\lambda}\right)^2 \mathrm{d}\mathfrak{K},$$

welcher jetzt auf die längste fernere Dauer ausgedehnt ist. Dabei, ist zu beachten, daß auch

$$\lim_{\tau=0} \int P_{(\mathfrak{K})}\left(\mathfrak{K} - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} x_\lambda \overline{V}_{k_\lambda}\right)^2 \mathrm{d}\mathfrak{K} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} [\overline{\mathfrak{B}}^2_{(0,\lambda)} - (x_\lambda \overline{V}_{k_\lambda})^2] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\lambda=s} [(x_\lambda \overline{V}_{k_\lambda})^2 - (x_\lambda \overline{V}_{k_\lambda})^2] = 0.$$

Analog den Betrachtungen, welche der Verfasser für jährliche Prämienberechnung angestellt hat, kann man auch die Gleichungen

$$\int P_{(K)}\,K^2\,\mathrm{d}K = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \overline{M}^2_\lambda.$$

und

$$\int P_{(\mathfrak{K})}\left(\mathfrak{K} - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \overline{V}_\lambda\right)^2 \mathrm{d}\mathfrak{K} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \overline{M}^2_\lambda.$$

zur Darstellung des Tschebyscheff'schen Satzes nach Sabudski-Ritter von Eberhard verwenden. Aus diesen Gleichungen lassen sich nämlich ohne weiteres die Gleichungen

$$\int P_{(K)}\left(\frac{K}{\sqrt{\Sigma \overline{M}_\lambda^2}}\right)^2 \mathrm{d}K = 1,$$

beziehungsweise

$$\int P_{(\mathfrak{K})}\left(\frac{\mathfrak{K} - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \overline{V}_\lambda}{\sqrt{\Sigma \overline{M}_\lambda^2}}\right)^2 \mathrm{d}\mathfrak{K} = 1$$

und

$$\int P_{(K)}\left(\frac{K}{\gamma\sqrt{2\Sigma \overline{M}_\lambda^2}}\right)^2 \mathrm{d}K = \frac{1}{2\gamma^2},$$

beziehungsweise

$$\int P_{(\mathfrak{K})}\left(\frac{\mathfrak{K} - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \overline{V}_\lambda}{\gamma\sqrt{2\Sigma \overline{M}_\lambda^2}}\right)^2 = \frac{1}{2\gamma^2}$$

herleiten. In den letzteren setze man

$$\frac{K}{\gamma\sqrt{2\Sigma \overline{M}_\lambda^2}} = U,$$

beziehungsweise

$$\frac{\mathfrak{K} - \Sigma \overline{V}_\lambda}{\gamma\sqrt{2\Sigma \overline{M}_\lambda^2}} = U$$

und nehme die Zerlegungen

$$\int_{-K_1}^{-K} P_{(K)}\, U^2\, \mathrm{d}K + \int_{-K}^{K} P_{(K)}\, U^2\, \mathrm{d}K + \int_{K}^{K_2} P_{(K)}\, U^2\, \mathrm{d}K = \frac{1}{2\gamma^2},$$

beziehungsweise

$$\int_{-\mathfrak{K}_1}^{\mathfrak{K}'} P_{(\mathfrak{K})}\, U^2\, \mathrm{d}\mathfrak{K} + \int_{\mathfrak{K}'}^{\mathfrak{K}} P_{(\mathfrak{K})}\, U^2\, \mathrm{d}\mathfrak{K} + \int_{\mathfrak{K}}^{\mathfrak{K}_2} P_{(\mathfrak{K})}\, U^2\, \mathrm{d}\mathfrak{K} = \frac{1}{2\gamma^2}$$

vor. Das erste Integral links vom Gleichheitszeichen enthält die Werte von U, welche zwischen dem größten negativen Wert und -1 liegen. In dem zweiten Integral seien die Werte von U enthalten, welche zwischen -1 und $+1$ liegen. Das dritte Integral betreffe die Werte von U zwischen $+1$ und dem größten positiven Wert von U. Durch Vernachlässigung der mittleren Integrale entstehen die Ungleichungen

$$\int_{-K_1}^{-K} P_{(K)}\, U^2\, \mathrm{d}K + \int_{K}^{K_2} P_{(K)}\, U^2\, \mathrm{d}K < \frac{1}{2\gamma^2},$$

und

$$\int_{-\mathfrak{K}_1}^{\mathfrak{K}'} P_{(\mathfrak{K})}\, U^2\, \mathrm{d}\mathfrak{K} + \int_{\mathfrak{K}}^{\mathfrak{K}} P_{(\mathfrak{K})}\, U^2\, \mathrm{d}\mathfrak{K} < \frac{1}{2\gamma^2}.$$

In diesen Ungleichungen ist stets $U^2 > 1$, sodaß die Ungleichungen

$$\int_{-K_1}^{-K} P_{(K)}\, \mathrm{d}K + \int_{K}^{K_2} P_{(K)}\, \mathrm{d}K < \frac{1}{2\gamma^2},$$

und

$$\int_{-\mathfrak{K}_1}^{\mathfrak{K}'} P_{(\mathfrak{K})}\, \mathrm{d}\mathfrak{K} + \int_{\mathfrak{K}}^{\mathfrak{K}_2} P_{(\mathfrak{K})}\, \mathrm{d}\mathfrak{K} < \frac{1}{2\gamma^2},$$

noch größere Berechtigung haben. Durch Subtraktion der letzteren von den leicht aus den Gleichungen

$$\int P_{(K)}\, \mathrm{d}K = 1,$$

beziehungsweise

$$\int P_{(\mathfrak{K})}\, \mathrm{d}\mathfrak{K} = 1$$

hergeleiteten Gleichungen

$$\int_{-K_1}^{-K} P_{(K)}\, \mathrm{d}K + \int_{-K}^{K} P_{(K)}\, \mathrm{d}K + \int_{K}^{K_2} P_{(K)}\, \mathrm{d}K = 1,$$

und

$$\int_{-\mathfrak{K}_1}^{\mathfrak{K}'} P_{(\mathfrak{K})}\, \mathrm{d}\mathfrak{K} + \int_{\mathfrak{K}'}^{\mathfrak{K}} P_{(\mathfrak{K})}\, \mathrm{d}\mathfrak{K} + \int_{\mathfrak{K}}^{\mathfrak{K}_2} P_{(\mathfrak{K})}\, \mathrm{d}\mathfrak{K} = 1,$$

entstehen die Ungleichungen

$$\int_{-K}^{K} P_{(K)}\, \mathrm{d}K > 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \quad \text{und} \quad \int_{\mathfrak{K}'}^{\mathfrak{K}} P_{(\mathfrak{K})}\, \mathrm{d}\mathfrak{K} > 1 - \frac{1}{2\gamma^2},$$

welche wir zur Vereinfachung noch in der Form

$$\mathfrak{W} > 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$$

schreiben wollen. Aus den Gleichungen

$$\frac{-K}{\gamma\sqrt{2\Sigma\overline{M}_\lambda^2}} = -1, \qquad \frac{K}{\gamma\sqrt{2\Sigma\overline{M}_\lambda^2}} = 1,$$

und
$$\frac{\mathfrak{K}' - \Sigma \overline{V}_\lambda}{\gamma \sqrt{2 \Sigma \overline{M}_\lambda^2}} = -1, \quad \frac{\mathfrak{K} - \Sigma \overline{V}_\lambda}{\gamma \sqrt{2 \Sigma \overline{M}_\lambda^2}} = 1$$
folgt aber, daß man nach dem Theorem von Tschebyscheff mit der Wahrscheinlichkeit
$$\mathfrak{W} > 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$$
erwarten kann, daß die Ungleichungen
$$-\gamma \sqrt{2 \Sigma \overline{M}_\lambda^2} \leqq K \leqq + \gamma \sqrt{2 \Sigma \overline{M}_\lambda^2},$$
und
$$-\gamma \sqrt{2 \Sigma \overline{M}_\lambda^2} \leqq \mathfrak{K} - \Sigma \overline{V}_\lambda \leqq + \gamma \sqrt{2 \Sigma \overline{M}_\lambda^2}$$
oder
$$\Sigma \overline{V}_\lambda - \gamma \sqrt{2 \Sigma \overline{M}_\lambda^2} \leqq \mathfrak{K} \leqq \Sigma \overline{V}_\lambda + \gamma \sqrt{2 \Sigma \overline{M}_\lambda^2}$$
erfüllt werden. Im Übrigen möge auch noch auf Czuber (4), Band II, Nr. 354. „Die wahrscheinlichkeitstheoretische Bedeutung des mittleren Risikos eines Versicherungsbestandes" verwiesen werden, wie auch auf des Verfassers Aufsatz in den Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 28. Heft, Bern 1933 (5).

Unter Zugrundelegung der nicht ganz vollkommenen Betrachtungen von Dr. Rothauge (6) für Versicherungsjahre, die von manchen Mathematikern auch in rein wahrscheinlichkeitstheoretischer Beziehung angezweifelt worden sind, kann man, falls man über die Mängel des Verfahrens hinwegblickt, noch andere kontinuierliche Betrachtungen anstellen, die auf den Veränderungen innerhalb des Zeitdifferentials t bis $t + \mathrm{d}t$ beruhen.

Inbezug auf die λ^{te} Versicherung eines Bestands von s verschiedenen Versicherungen werde in Analogie zu den frühen angewendeten Bezeichnungen
$$e^{-t\delta} \left(S^{I}_{k_\lambda + t} - {}_{x_\lambda}\overline{V}_{k_\lambda + t}\right) = \overline{a}_{(t,\lambda)}$$
$$\left.\begin{array}{r} e^{-t\delta} \left(- {}_{x_\lambda}\overline{V}_{k_\lambda + t}\right) \\ e^{-t\delta} \left(S^{II}_{k_\lambda + t} - {}_{x_\lambda}\overline{V}_{k_\lambda + t}\right) \end{array}\right\} = \overline{b}_{(t,\lambda)} \quad \begin{array}{l} \text{(Vertragsfsrm I)} \\ \text{(Vertragsform II)} \end{array}$$
gesetzt. Mit diesen Größen und den Wahrscheinlichkeiten
$$\overline{p}^{(1)}_{(t,\lambda)}\,\mathrm{d}t, \ \overline{p}^{(2)}_{(t,\lambda)}\,\mathrm{d}t, \ \overline{p}^{(3)}_{(t+\mathrm{d}t,\lambda)} = \overline{p}^{(3)}_{(t,\lambda)} - \overline{p}^{(1)}_{(t,\lambda)}\,\mathrm{d}t - \overline{p}^{(2)}_{(t,\lambda)}\,\mathrm{d}t$$
und $1 - \overline{p}^{(3)}_{(t,\lambda)}$, deren Summe 1 beträgt, bilden wir die besondere generierende Funktion
$$X(z) = \prod_{0}^{v_m} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} Z_\lambda(z) = \prod_{0}^{v_m} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} \Big[\overline{p}^{(1)}_{(t,\lambda)}\,\mathrm{d}t\, e^{(\overline{a}(t,\lambda) - e^{-t\delta} {}_{x_\lambda}\overline{\Pi}_{k_\lambda+t}\,\mathrm{d}t) zi} +$$
$$+ \overline{p}^{(2)}_{(t,\lambda)}\,\mathrm{d}t\, e^{(\overline{b}(t,\lambda) - e^{-t\delta} {}_{x_\lambda}\overline{\Pi}_{k_\lambda+t}\,\mathrm{d}t) zi} + \left(\overline{p}^{(3)}_{(t,\lambda)} - \overline{p}^{(1)}_{(t,\lambda)}\,\mathrm{d}t - \overline{p}^{(2)}_{(t,\lambda)}\,\mathrm{d}t\right) \times$$
$$\times\, e^{-e^{-t\delta} {}_{x_\lambda}\overline{\Pi}_{k_\lambda+t}\,\mathrm{d}t\, zi} + \left(1 - \overline{p}^{(3)}_{(t,\lambda)}\right)\Big].$$

In dieser bedeute $\overline{\Pi}$ (der Strich über Π), daß es sich um ein Produkt unendlich nahe liegender Faktoren handelt. Die weiteren unbekannten Eigenschaften dieses Produkts sind für die folgenden Berechnungen gleichgültig. Es sei noch bemerkt, daß ${}_{x_\lambda}\overline{\Pi}_{k_\lambda+t}\,dt$ die Risikoprämie des Zeitdifferentials $k_\lambda + t$ bis $k_\lambda + t + dt$ bezeichnet, und ν_m die längste fernere Versicherungsdauer bedeutet. In dieser genau aufgestellten generierenden Funktion kann man mehrmals unendlich kleine Größen neben endlichen Größen vernachlässigen, sodaß man zu der vereinfachten aber ausreichenden generierenden Funktion

$$X(z)=\overline{\prod_{0}^{\nu_m}}\prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} Z_\lambda(z)=\overline{\prod_{0}^{\nu_m}}\prod_{\lambda=1}^{\lambda=s}[\overline{p}^{(1)}_{(t,\lambda)}\,dt\,e^{\overline{a}_{(t,\lambda)}zi}+\overline{p}^{(2)}_{(t,\lambda)}\,dt\,e^{\overline{b}_{(t,\lambda)}zi}+$$
$$+\overline{p}^{(3)}_{(t,\lambda)}\,e^{-e^{-t\delta}{}_{x_\lambda}\overline{\Pi}_{k_\lambda+t}dt\,zi}+(1-\overline{p}^{(3)}_{(t,\lambda)})].$$

gelangt. Mit Rücksicht auf die Eigentümlichkeiten der kontinuierlichen Prämienberechnung läßt sich diese generierende Funktion gut verwenden. Es ist einleuchtend, daß beim Logarithmieren der vorstehenden Gleichung das Produkt $\overline{\Pi}$ der unendlich nahe liegenden Faktoren in ein Integral übergehen muß, daß also

$$\ln X(z)=\int_0^{\nu_m}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s}\ln Z_\lambda(z)$$

wird. Weiterhin bemerke man, daß sich, wenn man die unendlich kleinen Wahrscheinlichkeiten neben 1 vernachlässigt, folgende Grenzwerte ergeben:

$$Z_\lambda(0)=1$$

$$Z'_\lambda(z)=i\,[\overline{p}^{(1)}_{(t,\lambda)}\,e^{\overline{a}_{(t,\lambda)}zi}\,\overline{a}_{(t,\lambda)}\,dt+\overline{p}^{(2)}_{(t,\lambda)}\,e^{\overline{b}_{(t,\lambda)}zi}\,\overline{b}_{(t,\lambda)}\,dt-$$
$$-\overline{p}^{(3)}_{(t,\lambda)}\,e^{-t\delta}{}^{x_\lambda\overline{\Pi}_{k_\lambda+t}dt\,zi}\,e^{-t\delta}{}_{x_\lambda}\overline{\Pi}_{k_\lambda+t}\,dt],$$

mithin

$$Z'_\lambda(0)=i\,[\overline{p}^{(1)}_{(t,\lambda)}\overline{a}_{(t,\lambda)}+\overline{p}^{(2)}_{(t,\lambda)}\overline{b}_{(t,\lambda)}-(\overline{p}^{(1)}_{(t,\lambda)}\overline{a}_{(t,\lambda)}+\overline{p}^{(2)}_{(t,\lambda)}\overline{b}^{2}_{(t,\lambda)})]\,dt=0,$$

ferner ist

$$Z_\lambda''(z)=-[\overline{p}^{(1)}_{(t,\lambda)}\,e^{\overline{a}_{(t,\lambda)}zi}\,\overline{a}^{2}_{(t,\lambda)}\,dt+\overline{p}^{(2)}_{(t,\lambda)}e^{\overline{b}^{2}_{(t,\lambda)zi}}\,\overline{b}^{2}_{(t,\lambda)}\,dt+$$
$$+\overline{p}^{(3)}_{(t,\lambda)}\,e^{-t\delta x_\lambda\overline{\Pi}_{k_\lambda+t}dtzi}\,(e^{-t\delta}{}_{x_\lambda}\overline{\Pi}_{k_\lambda+t}\,dt)^2].$$

Da $(e^{-t\delta}{}_{x_\lambda}\overline{\Pi}_{k_\lambda+t}\,dt)^2$ eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung ist, die vernachlässigt werden kann, folgt

$$Z_\lambda''(0)=-[\overline{p}^{(1)}_{(t,\lambda)}\overline{a}^{2}_{(t,\lambda)}+\overline{p}^{(2)}_{(t,\lambda)}\overline{b}^{2}_{(t,\lambda)}]\,dt.$$

Mit diesen Grenzwerten bilde man nun die Grenzwerte der generierenden Funktion und ihrer ersten zwei Ableitungen nach z. Man erhält der

Reihe nach:

$$\frac{\mathrm{d}\ln X(z)}{\mathrm{d}z} = \int_0^{v_m} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \frac{Z'_\lambda(z)}{Z_\lambda(z)}, \quad \left(\frac{\mathrm{d}\ln X(z)}{\mathrm{d}z}\right)_{z=0} = \int_0^{v_m} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} Z'_\lambda(0) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\ln X(z)}{\mathrm{d}z^2} = \int_0^{v_m} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \frac{Z_\lambda''(z) Z_\lambda(z) - (Z'_\lambda(z))^2}{(Z_\lambda(z))^2},$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\ln X(z)}{\mathrm{d}z^2}\right)_{z=0} = \int_0^{v_m} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} Z_\lambda''(0) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \int_0^{v_m} Z_\lambda''(0) =$$

$$= -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \int_0^{v_\lambda} \left(\overline{p}^{(1)}_{(t,\lambda)} \overline{a}^{2}_{(t.\lambda)} + \overline{p}^{(2)}_{(t,\lambda)} \overline{b}^{2}_{(t,\lambda)}\right) \mathrm{d}t = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \overline{M}^2_\lambda = -\overline{\mathfrak{M}}^2.$$

Außerdem beachte man auch noch die Gleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}\ln X(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{X(z)} \frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}, \quad \frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z} = X(z) \frac{\mathrm{d}\ln X(z)}{\mathrm{d}z},$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}\right)_{z=0} = \left(\frac{\mathrm{d}\ln X(z)}{\mathrm{d}z}\right)_{z=0} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\ln X(z)}{\mathrm{d}z^2} = \frac{1}{X(z)^2} \left[\frac{\mathrm{d}^2 X(z)}{\mathrm{d}z^2} X(z) - \left(\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}\right)^2\right],$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 X(z)}{\mathrm{d}z^2} = X(z) \frac{\mathrm{d}^2\ln X(z)}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1}{X(z)} \left(\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 X(z)}{\mathrm{d}z^2}\right)_{z=0} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\ln X(z)}{\mathrm{d}z^2}\right)_{z=0} = -\overline{\mathfrak{M}}^2.$$

Der Grenzwert für $z = 0$ des zweiten Differentialquotienten nach z dieser approximativen generierenden Funktion ist daher gleich dem negativen Quadrat des Hattendorff'schen Risikos sämtlicher s Versicherungen.

Man stelle nun wieder die Gleichung

$$X(z) = \int P_{(K)} e^{Kzi} \,\mathrm{d}K$$

auf, die uns den erforderlichen Grenzwert

$$X(0) = \int P_{(K)} \,\mathrm{d}K = 1$$

liefert. Die zweimalige Differentiation nach z gibt die beiden Differentialquotienten

$$\frac{dX(z)}{dz} = i\int P_{(K)}\, e^{Kzi}\, K\, dK$$

$$\frac{d^2X(z)}{dz^2} = -\int P_{(K)}\, e^{Kzi}\, K^2\, dK,$$

mit deren Grenzwerten für $z = 0$ nach dem Vorhergehenden

$$\int P_{(K)}\, K\, dK = 0$$

und

$$\int P_{(K)}\, K^2\, dK = \overline{\mathfrak{M}}^2$$

folgt.

Entsprechende Untersuchungen können wir auch mit der generierenden Funktion

$$\mathfrak{X}(z) = \prod_{0}^{\nu_m} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} \mathfrak{Z}_\lambda(z) = \prod_{0}^{\nu_m} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} [\overline{p}^{(1)}_{(t,\lambda)}\, dt\, e^{\overline{a}(t,\lambda) zi} + \overline{p}^{(2)}_{(t,\lambda)}\, dt\, e^{\overline{b}(t,\lambda) zi} + 1]$$

anstellen, in welcher zur Vereinfachung sogleich 1 für $1 - (\overline{p}^{(1)}_{(t,\lambda)} + \overline{p}^{(2)}_{(t,\lambda)})\, dt$ gesetzt wurde. Aus dieser erhält man erstens

$$\left(\frac{d \ln \mathfrak{X}(z)}{dz}\right)_{z=0} = \int_0^{\nu_m} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \mathfrak{Z}_\lambda'(0) = \int_0^{\nu_m} i \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} (\overline{p}^{(1)}_{(t,\lambda)}\, dt\, \overline{a}_{(t,\lambda)} + \overline{p}^{(2)}_{(t,\lambda)}\, dt\, \overline{b}_{(t,\lambda)}) =$$

$$= i \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \int_0^{\nu_\lambda} (\overline{p}^{(1)}_{(t,\lambda)}\, \overline{a}_{(t,\lambda)} + \overline{p}^{(2)}_{(t,\lambda)}\, \overline{b}_{(t,\lambda)})\, dt = i \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \overline{I}_\lambda,$$

wobei $\overline{I}_\lambda$ der sogenannte Versicherungswert von Wright (Insurance value) ist. Zweitens folgt

$$\left(\frac{d^2 \ln \mathfrak{X}(z)}{dz^2}\right)_{z=0} = \int_0^{\nu_m} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} [\mathfrak{Z}''_\lambda(0) - (\mathfrak{Z}_\lambda'(0))^2] = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \int_0^{\nu_m} [\mathfrak{Z}_\lambda''(0) - (\mathfrak{Z}'_\lambda(0))^2],$$

und da, wie aus dem Vorhergehenden hervorgeht, $(\mathfrak{Z}'_\lambda(0))^2$ eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung ist, bekommt man

$$\left(\frac{d^2 \ln \mathfrak{X}(z)}{dz^2}\right)_{z=0} = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \int_0^{\nu_m} (\overline{p}^{(1)}_{(t,\lambda)}\, \overline{a}^{(2)}_{(t,\lambda)} + \overline{p}^{(2)}_{(t,\lambda)}\, \overline{b}^{2}_{(t,\lambda)})\, dt =$$

$$= -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \overline{M}^2_\lambda = -\overline{\mathfrak{M}}^2.$$

Während aber

$$\left(\frac{d\, \mathfrak{X}(z)}{dz}\right)_{z=0} = \left(\frac{d \ln \mathfrak{X}(z)}{dz}\right)_{z=0}$$

und daher auch

$$\left(\frac{d\,\mathfrak{X}(z)}{dz}\right)_{z=0} = i\,\Sigma\,\overline{I}_\lambda,$$

ist

$$\left(\frac{d^2\,\mathfrak{X}(z)}{dz^2}\right)_{z=0} = \left(\frac{d^2 \ln \mathfrak{X}(z)}{dz^2}\right)_{z=0} + \left(\frac{d\,\mathfrak{X}(z)}{dz}\right)^2_{z=0},$$

mithin

$$\left(\frac{d^2\,\mathfrak{X}(z)}{dz^2}\right)_{z=0} = -\,[(\Sigma\overline{I}_\lambda)^2 + \overline{\mathfrak{M}^2}].$$

Aus der für diese generierende Funktion aufzustellenden Gleichung

$$\mathfrak{X}(z) = \int P_{(\mathfrak{K})}\, e^{\mathfrak{K}zi}\, d\mathfrak{K}$$

leite man die Gleichungen her:

$$\mathfrak{X}(0) = \int P_{(\mathfrak{K})}\, d\mathfrak{K} = 1$$

$$\left(\frac{d\,\mathfrak{X}(z)}{dz}\right)_{z=0} = i \int P_{(\mathfrak{K})} \mathfrak{K}\, d\mathfrak{K} = i\,\Sigma\,\overline{I}_\lambda$$

$$\left(\frac{d^2\,\mathfrak{X}(z)}{dz^2}\right)_{z=0} = -\int P_{(\mathfrak{K})}\, \mathfrak{K}^2\, d\mathfrak{K} = -\,[(\Sigma\overline{I}_\lambda)^2 + \overline{\mathfrak{M}^2}].$$

Mit Hilfe dieser werden dann noch die Gleichungen

$$\int P_{(\mathfrak{K})}\, (\mathfrak{K} - \Sigma\,\overline{I}_\lambda)^2\, d\mathfrak{K} = \int P_{(\mathfrak{K})}\, \mathfrak{K}^2\, d\mathfrak{K} - (\Sigma\,\overline{I}_\lambda)^2$$

und

$$\int P_{(\mathfrak{K})}\, (\mathfrak{K} - \Sigma\,\overline{I}_\lambda)^2\, d\mathfrak{K} = \overline{\mathfrak{M}^2}$$

aufgestellt. Die letztere, wie die früher aufgestellte Gleichung

$$\int P_{(K)}\, K^2\, dK = \overline{\mathfrak{M}^2}$$

gestatten aber den Tschebyscheff'schen Satz in analoger Weise anzuwenden, wie es vordem schon gezeigt wurde.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen läßt sich schon erkennen, daß die Laplace-Poisson'schen Wahrscheinlichkeitsausdrücke

$$P_{(K)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(z)\, e^{-Kzi}\, dz$$

und

$$P_{(\mathfrak{K})} = P_{(K)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{X}(z)\, e^{-(\Sigma\overline{I}_\lambda + K)zi}\, dz$$

mit den besprochenen generierenden Funktionen den bekannten exponentialen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes oder Gewinnes K liefern. In der Präzision tritt dabei das Hattendorff'sche

Risiko für die s von einander unterschiedenen Versicherungen auf. Setzt man nämlich

$$X = e^{\ln X(z)}, \text{ bezw. } \mathfrak{X}(z) = e^{\ln \mathfrak{X}(z)}$$

und entwickelt $\ln X(z)$ bezw., $\ln \mathfrak{X}(z)$ nach dem Maclaurin'schen Satz bis zum zweiten Differentialquotienten einschießlich, so folgt mit Anwendung der schon gewonnenen Ergebnisse aus beiden Ausdrücken

$$P_{(K)} \backsim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{M}^2 z^2 - Kzi}\, dz,$$

d. h. es ist

$$P_{(K)} \backsim \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{2}\,\mathfrak{M}}\, e^{-\frac{K^2}{2\mathfrak{M}^2}},$$

Eine Abweichung K zwischen $-\gamma \sqrt{2}\,\mathfrak{M}$ und $+\gamma \sqrt{2}\,\mathfrak{M}$ ist daher näherungsweise mit der Wahrscheinlichkeit

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt$$

zu erwarten.

Schließlich wäre noch zu bemerken, daß man den hier vor Augen geführten Darstellungen auch die generierenden Funktionen

$$Y(z) = \prod_0^{v_m} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} \left(\mu^{I}_{t,\lambda}\, dt\, e^{\bar{a}(t,\lambda)zi} + \mu^{II}_{(t,\lambda)}\, dt\, e^{\bar{b}(t,\lambda)zi} + e^{-e^{-t\delta}x_\lambda \overline{\Pi} k_\lambda + t^{\mathrm{d}tzi}}\right)^{\overline{p}^{(3)}_{(t,\lambda)}}$$

und

$$\mathfrak{Y}(z) = \prod_0^{\overline{v_m}} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} \left(\mu^{I}_{(t,\lambda)}\, dt\, e^{\bar{a}(t,\lambda)zi} + \mu^{II}_{(t,\lambda)}\, dt\, e^{\bar{b}(t,\lambda)} + 1\right)^{\overline{p}^{(3)}_{(t,\lambda)}}$$

hätte zu grunde legen können, in welchen zur Vereinfachung

$$\mu^{I}_{(x+k)_\lambda + t}\, dt = \mu^{I}_{(t,\lambda)}\, dt \text{ und } \mu^{II}_{(x+k)_\lambda + t}\, dt = \mu^{II}_{(t,\lambda)}\, dt$$

gesetzt wurde. Die erste ist durch Vernachlässigung unendlich kleiner Größen aus der genaueren generierenden Funktion

$$Y(z) = \prod_0^{\overline{v_m}} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} \left(\mu^{I}_{(t,\lambda)}\, dt\, e^{(\bar{a}(t,\lambda) - e^{-t\delta}x_\lambda \overline{\Pi} k_\lambda + t^{\mathrm{d}t})zi} + \mu^{II}_{(t,\lambda)}\, e^{(\bar{b}(t,\lambda) - e^{-t\delta} x^{II} x_\lambda + t^{\mathrm{d}t})zi}\right.$$

$$\left. + \left(1 - \mu^{I}_{(t,\lambda)}\, dt - \mu^{I}_{(t,\lambda)}\, dt\right) e^{-e^{-t\delta}x_\lambda \overline{\Pi} k_\lambda + t^{\mathrm{d}tzi}}\right)^{\overline{p}^{(3)}_{(t,\lambda)}}$$

hervorgegangen, die zweite dagegen aus der genaueren generierenden Funktion

$$\mathfrak{Y}(z) = \prod_{0}^{\nu_m} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} (\mu^{I}_{(t,\lambda)}\, dt\, e^{\overline{a}(t,\lambda)zi} + \mu^{II}_{(t,\lambda)}\, dt\, e^{\overline{b}(t,\lambda)zi} + $$
$$+ (1 - \mu^{I}_{(t,\lambda)}\, dt - \mu^{II}_{(t,\lambda)}\, dt)^{\overline{p}^{(3)}_{(t,\lambda)}}.$$

Literatur.

(1) a) Zur Berechnung des Risikos der ferneren Dauer von kontinuierlich berechneten Versicherungen mit zwei verschiedenen Möglichkeiten des Ausscheidens I. Giornale di Matematica Finanziaria, Serie II, Volume II, N. 2, Luglio 1932.

b) Zur Berechnung des Risikos der ferneren Dauer von kontinuierlichen Versicherungen mit zwei verschiedenen Möglichkeiten des Ausscheidens II. Giornale di Matematica Finanziaria, Serie II, Volume III, N. 1, Marzo 1933.

c) Zur Berechnung des Risikos der ferneren Dauer von kontinuierlichen Versicherungen mit zwei verschiedenen Möglichkeiten des Ausscheidens (Berichtigung). Giornale di Matematica Finanziaria, Serie II Volume III, N. 2, Luglio 1933.

d) Zur Theorie des mittleren Risikos der ferneren Dauer vom Versicherungen mit kontinuierlicher Prämienberechnung, die auf zwei ändrigen Ausscheideordnungen beruhen. Aktuárské vědy, ročník III, 1932, číslo 2.

e) Das zweiändrige Wahrscheinlichkeitsgesetz bei Beständen von Versicherungen mit zwei verschiedenen Auflösungsmöglichkeiten. Giornale di Matematica Finanziaria, Serie II, Volume IV, N. 3, 1934.

(2) Über den Hattendorffschen Risikosatz Assekuranz-Jahrbuch, Band 50, Wien und Leipzig 1931.

(3) a) Mémoire sur la probabilité des erreurs d'après la méthode des moindres carrés. Liouville's Journal 1852.

b) F. W. Hultman, Minsta Quadratmetoden. Stockholm 1860. (Aus diesem Werk kann man ersehen, daß schon Ellis in seiner Abhandlung „On the Method of least squares". Cambridge 1844 Fourier'sche Integrale angewendet hat.)

c) Meyer, Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung. Deutsch von Czuber, Leipzig 1879.

(4) Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung, Leipzig und Berlin 1914.

(5) Zur begründenden Darstellung des ferneren Risikos verwickelter Versicherungsformen.

(6) Die formale Ausgestaltung des Zufallrisikos in der Lebensversicherung. Mitteilungen des österreichisch-ungarischen Verbandes der Privatversicherungsanstalten. Neue Folge, 6. Band, 1 Heft.