Géza Huszár

Sur les itérations élémentaires, concernant la formule d'Euler

Aktuárské vědy, Vol. 5 (1935), No. 2, 74–83

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144627

Sur les itérations élémentaires, concernant la formule d'Euler.

Par Dr. *Huszár Géza* (Budapest).

I.

On reçoit la valeur escomptée d'une rente normale[1]) par la formule d'Euler:

$$a_{\overline{n|}} = \frac{1 - v^n}{i}. \tag{1}$$

Étant donné n et $a_{\overline{n|}}$, on peut obtenir i en plus des méthodes par le procédé d'itération (ou des approximations successives) en substituant une valeur primaire i_0 dans le terme second de l'égalité:

$$i = \frac{1}{a_{\overline{n|}}} [1 - (1 + i)^{-n}] \equiv \varphi(i). \tag{2}$$

On reçoit ainsi une autre valeur

$$i_1 = \frac{1}{a_{\overline{n|}}} (1 - v_0{}^n) \equiv \varphi(i_0),$$

et en continuant

$$i_2 = \varphi(i_1), \; i_3 = \varphi(i_2), \ldots \text{etc.}$$

On doit justifier que la série

$$i_1 = \varphi(i_0), \; i_2 = \varphi(i_1), \; i_3 = \varphi(i_2), \ldots, \; i_{k+1} = \varphi(i_k), \ldots \tag{3}$$

est convergente et sa limite est i.

La méthode générale d'itération est due à Cauchy.[2]) Les critères de convergence sont résultats de Netto, Hoffmann et Isenkrahe. La série susdite est — après Isenkrahe[3]) — convergente pourvu que $|\varphi'(i)| < 1$, et l'approximation est monotone ou en forme d'escalier lorsque $\varphi'(i) > 0$ et bilatérale lorsque $\varphi'(i) < 0$.

Chez la série (3), on a

$$0 < \varphi'(i) = \frac{n v^{n+1}}{a_{\overline{n|}}} = \frac{n}{s_{\overline{n|}}} < 1.$$

Par là est en effet la convergence prouvée dans un voisinage de la racine, mais la validité de cette méthode est justement caractérisée par la circonstance qu'on peut partir d'une valeur quelconque positive. Mais

[1]) Le mot „normale" veut signifier une rente avec des termes d'unité et des intervalles égaux.

[2]) Cauchy: Analyse algébrique (1821), Oeuvres (2) III, 381.

[3]) Isenkrahe: Über die Anwendung iterirter Functionen zur Darstellung der Wurzeln algebraischer und transcendenter Gleichungen. Math. Annalen XXXI, 309 (1888).

il est indéterminé que la valeur $\varphi'(i)$ soit moindre, plus ou égale à un, il y a même un voisinage du point 0, où $\varphi'(i)$ est certainement plus qu'un, parce que

$$\lim_{i\to 0} \frac{n}{a_{\overline{n}|}} v^{n+1} = \frac{n}{a_{\overline{n}|}} > 1.$$

On pourrait s'appuyer aux résultats spéciaux de Hoffmann[4]) ou de Netto[5]), concernant l'équation trinôme. Mais on peut prouver la convergénce (unilatérale) simplement et compactement comme il suit.

La fonction $a_{\overline{n}|}(i) = v + \ldots + v^n$ est monotone décroissante, — tous les termes étant décroissants — ils vont donc les inégalités suivantes.

Lorsque $0 < i_k < i$, on a

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}(i_k)} < \frac{1}{a_{\overline{n}|}(i)},$$

$$i_k = \frac{1 - v_k^n}{a_{\overline{n}|}(i_k)} < \frac{1 - v_k^n}{a_{\overline{n}|}(i)} = i_{k+1} < \frac{1 - v^n}{a_{\overline{n}|}(i)} = i.$$

La série est donc monotone croissante, bornée d'audessus, — alors suffisamment convergente et sa limite est i, parce que

$$\lim_{k\to\infty} i_k = \frac{1}{a_{\overline{n}|}} [1 - (1 + \lim_{k\to\infty} i_k)^{-n}] \cdot$$

Conformément dans le cas, où $i_k > i$:

$$i_k > i_{k+1} > i.$$

II.

La méthode d'itération — dans sa forme susdite — a sans doute ses avantages remarquables, savoir son achèvement théorique, on peut l'usiter même en pratique, surtout en défaut des tables financières, où en possession des tables logarithmiques de Gauss, — mais il y a des domaines (i, n), où l'approximation d'un pas d'itération est très petite, même insignifiante; cela diminue, parfois anéantit l'aptitude de la méthode.

Par exemple, lorsque $n = 10$, $i = 0{,}01$, l'approximation, c'est à dire le quotient

$$\left| \frac{i_{k+1} - i_k}{i_k - i} \right|$$

est à peu près 5 p. c., dans le cas $n = 2$, $i = 0{,}00125$ même seulement environ 0,25 p. c.

[4]) K. E. Hoffmann: Über die Auflösung der trinomischen Gleichungen durch kettenbruch-ähnliche Algorithmen. Grunert Arch. LXVI, 33 (1880).

[5]) Netto: Über einen Algorithmus zur Auflösung numerischer algebraischer Gleichungen. Math. Annalen XXIX, 141.

L'inaptitude de la méthode dans quelques domaines est complètement caractérisée par le fait qu'elle ne peut pas s'élever du point de commencement $i_0 = 0$, parce qu'on a en ce cas $i_0 = i_1 = i_2 = \ldots = 0$.

On pourrait donc compléter la méthode en développant en série la fonction $\frac{1}{a_{\overline{n}|}}(i)$. Ici appartiennent toutes les méthodes de correction.

La plupart de ces méthodes est au fond la même, savoir la méthode de Newton-Fourier, appliquée sur les formes différentes de l'équation fondamentale.

Je veux nommer une de ces méthodes „d'ordre k" quand le développement est interrompu chez le quotient différentiel k-ième. Dans ce terme, j'appelle la méthode susdite de l'ordre 0, ou élémentaire.

Les méthodes de l'ordre supérieur exigent beaucoup de calcul, de temps et d'attention. A mon avis, il vaut mieux de chercher une méthode élémentaire de plus grande approximation.

Je vais présenter dans la suite une méthode élémentaire dont l'approximation est vraiment plus grande que celle de la méthode susdite dans tous les domaines (i, n), et cette approximation est partout plus que 50 p. c. Son exécution exige le même nombre des calculs.

III.

Nous donnons à l'équation (2) la forme suivante:

$$i = \frac{1}{a_{\overline{n}|}} - \frac{v^n}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{a_{\overline{n}|}} - \frac{i}{r^n - 1} \equiv \psi(i) \tag{4}$$

et nous écrivons:

$$i_1 = \frac{1}{a_{\overline{n}|}} - \frac{i_0}{r_0{}^n - 1} \equiv \psi(i_0),$$

$$i_2 = \psi(i_1), \text{ etc.}$$

On pourrait prouver la convergence de la série

$$i_1 = \psi(i_0),\ i_2 = \psi(i_1),\ \ldots,\ i_{k+1} = \psi(i_k),\ \ldots \tag{5}$$

aussi par les critères générales, mais nous la justifions par la preuve suivante, qui montre dans le même temps la supériorité de cette méthode.

Nous signalons:

$$v_k = (1 + i_k)^{-1},\ a_k = a_{\overline{n}|}(i_k).$$

Lorsque $i_k < i$, nous avons les inégalités:

$$i_k = \frac{1 - v_k{}^n}{a_k} < \frac{1 - v_k{}^n}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{a_{\overline{n}|}} - \frac{v_k{}^n}{a_{\overline{n}|}} < \frac{1}{a_{\overline{n}|}} - \frac{v_k{}^n}{a_k} =$$

$$= i_{k+1} < \frac{1}{a_{\overline{n}|}} - \frac{v^n}{a_{\overline{n}|}} = i,$$

parce que

$$\frac{v^n}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|}} = \frac{1}{1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}}$$

se diminue quand i s'augmente.

Nous avons donc:

$$i_k < \varphi(i_k) < \psi(i_k) < i.$$

Cette inégalité prouve aussi que la limite de la série est i.

Conformément dans le cas où $i_k > i$:

$$i_k > \varphi(i_k) > \psi(i_k) > i.$$

Notre méthode (dans la suite: „méthode A") s'élève d'ailleurs aisément du point $i_0 = 0$, parce qu'on a

$$i_1 = \frac{1}{a_{\overline{n}|}} - \frac{1}{n}$$

est c'est la valeur approximative rationelle de Brasilier.[6])

IV.

Quant à l'approximation de la méthode A, nous pouvons l'estimer par le théorème des accroissements finis.

Nous avons:

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{a_k} + (i - i_k)\, D,$$

où D est le quotient différentiel de la fonction $(1/a_{\overline{n}|})\,(i)$ dans un point moyen entre 0 et i.

Il suit

$$i = i_k + \left(\frac{1}{a_{\overline{n}|}} - \frac{1}{a_k}\right) \frac{1}{D}.$$

Nous allons prouver que

$$(2 >)\, 2\frac{n}{n+1} \geqq \frac{1}{D} > 1, \tag{6}$$

c'est à dire:

$$\frac{n+1}{2n} \leqq D < 1. \tag{7}$$

Mais

$$D = \frac{d\frac{1}{a_{\overline{n}|}}(i)}{di} = \frac{1 - \frac{n}{a}\, v^{n+1}}{1 - v^n} < 1,$$

[6]) Brasilier: Théorie mathématique des placements et emprunts à long terme, I (Paris, G. Masson, 1891), 62—64.

Cf. aussi Barriol: Théorie et pratique des opérations financières. Deuxième édition, p. 171 (Paris, 1914).

parce que

$$\frac{n}{a_{\overline{n}|}} v^{n+1} = \frac{n}{s_{\overline{n}|}} > v^n,$$

ou

$$n > a_{\overline{n}|} = 1 + v + \ldots + v^{n-1},$$

ce qui est vrai quand $n > 1$; de plus

$$\lim_{i \to 0} \frac{\mathrm{d} \frac{1}{a_{\overline{n}|}}(i)}{\mathrm{d}i} = \frac{n+1}{2n}, \qquad \lim_{i \to 0} \frac{\mathrm{d}^2 \frac{1}{a_{\overline{n}|}}(i)}{\mathrm{d}i^2} = \frac{n^2-1}{6n},$$

et

$$\frac{\mathrm{d}^2 \frac{1}{a_{\overline{n}|}}(i)}{\mathrm{d}i^2} > 0, \tag{8}$$

lorsque $i \geqq 0$.

Pour démontrer[7]) l'inégalité (8) dans le cas, où $i > 0$, nous calculons le quotient différentiel de second ordre de la fonction $(1/a_{\overline{n}|})(i)$ et nous le multiplions par le facteur positif

$$\frac{(1-v^n)\, r^{2n+2}}{n}.$$

Nous devons donc prouver l'inégalité

$$r^n\,[(n-1)\,i-2] + 2 + (n+1)\,i > 0.$$

Lorsque

$$(n-1)\,i - 2 \geqq 0,$$

alors

$$i \geqq \frac{2}{n-1},$$

l'inégalité est de validité évidente.

Dans le cas contraire, où

$$(n-1)\,i - 2 < 0,$$

nous devons justifier que

$$r^n < \frac{2+(n+1)\,i}{2-(n-1)\,i}. \tag{9}$$

Nous appliquons la conclusion de n à $n+1$. Lorsque l'inégalité est valable pour n, on multiple par r et l'on a

$$r^{n+1} < \frac{2+(n+1)\,i}{2-(n-1)\,i}\, r. \tag{10}$$

---

[7]) Voir: Kovács: Újabb adalékok a kamatlábfeladathoz. (En hongrois.) Kereskedelmi Szakoktatás XXXVI, 313 (Budapest, 1929).

Il suffit donc à justifier, que

$$\frac{2+(n+1)\,i}{2-(n-1)\,i}\,r < \frac{2+(n+2)\,i}{2-ni}$$

ce qui est une question élémentaire.

Conformément, il est très facile à prouver que l'inégalité va chez $n = 2$.

Dans la méthode A, on a

$$i_{k+1} = \frac{1}{a_{\overline{n|}}} - \frac{1}{s_k} = \frac{1}{a_{\overline{n|}}} + i_k - \frac{1}{a_k} = i_k + \left(\frac{1}{a_{\overline{n|}}} - \frac{1}{a_k}\right). \tag{11}$$

La méthode A substitue donc D qui est entre $(n+1)/2n$ et 1, par un, ce qui est trop naturel.

Au contraire, chez la méthode originelle:

$$\frac{1}{a_{\overline{n|}}} = \frac{i_{k+1}}{1-v_k{}^n} = \frac{i_{k+1}}{1-v_k{}^n} + \frac{1}{a_k} - \frac{i_k}{1-v_k{}^n} = \frac{1}{a_k} + \frac{i_{k+1}-i_k}{1-v_k{}^n},$$

c'est à dire:

$$i_{k+1} = i_k + \left(\frac{1}{a_{\overline{n|}}} - \frac{1}{a_k}\right)(1-v_k{}^n).$$

On substitue alors dans la méthode originelle $\frac{1}{D}$ (>1) par $1-v_k{}^n$ (<1). C'est une circonstance qui caractérise et explique son approximation insuffisante.

Il suit de l'inégalité (11) lorsque $i_k < i$,

$$i_{k+1} = i_k + \left(\frac{1}{a_{\overline{n|}}} - \frac{1}{a_k}\right) < i = i_k + \left(\frac{1}{a_{\overline{n|}}} - \frac{1}{a_k}\right)\frac{1}{D} <$$
$$< i_k + \left(\frac{1}{a_{\overline{n|}}} - \frac{1}{a_k}\right)\frac{2n}{n+1} < i_k + \left(\frac{1}{a_{\overline{n|}}} - \frac{1}{a_k}\right)2. \tag{12}$$

La correction de la méthode A est par conséquent $\frac{1}{a_{\overline{n|}}} - \frac{1}{a_k}$; la correction vraie est moins que $\left(\frac{1}{a_{\overline{n|}}} - \frac{1}{a_k}\right)\frac{2n}{n+1}$, l'approximation est donc plus que

$$\frac{n+1}{2n}\,100 \text{ p. c.},$$

alors plus que 50 p. c., chez $n = 2$ même plus que 75 p. c.

On a d'ailleurs chez $n = 2$ aussi la formule très commode:

$$i_{k+1} = \frac{1}{a_{\overline{n|}}} - \frac{1}{r_k+1} = \frac{1}{a_{\overline{n|}}} - \frac{1}{2+i_k}.$$

V.

Tandis que l'ordre de l'approximation de la méthode originelle est très difficile à déterminer, le procédé A nous donne ($i_k < i$) deux valeurs i_{k+1} et i'_{k+1},

$$i_{k+1} = i_k + \left(\frac{1}{a_{\overline{n}|}} - \frac{1}{a_k}\right) < i < i_k + \left(\frac{1}{a_{\overline{n}|}} - \frac{1}{a_k}\right)\frac{2n}{n+1} = i'_{k+1}, \quad (13)$$

dont la première est moindre, la deuxième est plus que i.

On peut même regarder

$$i'_{k+1} = i_k + \left(\frac{1}{a_{\overline{n}|}} - \frac{1}{a_k}\right)\frac{2n}{n+1}$$

comme une valeur itérée. La série

$$i_0, i'_1, i'_2, \ldots$$

est aussi convergente, parce que pour le quotient différentiel on a:

$$0 \geqq 1 - D\frac{2n}{n+1} > -1.$$

Cette méthode („méthode B") nous donne par conséquent une itération convergente bilatérale.

Partant de la valeur $i_0 = 0$, on reçoit la valeur de M. Grosschmid:[8])

$$\left(\frac{1}{a_{\overline{n}|}} - \frac{1}{n}\right)\frac{2n}{n+1} > i.$$

VI.

Dans la pratique, on utilise suivant le domaine (i, n) unefois la méthode A, autrefois la méthode B, où parallèlement toutes les deux.

Au lieu de la seconde, on peut aussi appliquer:

$$i_{k+1} = i_k + \left(\frac{1}{a_{\overline{n}|}} - \frac{1}{a_k}\right)2, \quad (14)$$

parçe que $1 - 2D$ est aussi entre 0 et -1.

Lorsqu'on applique donc la méthode A, et on double sa correction, on reçoit ainsi deux valeurs, dont l'une est moindre et la seconde est plus que la valeur exacte de i. On peut donc partir d'une des deux valeurs, ou du moyen des deux.

Dans l'exemple „standard" $n = 30$, $a_{\overline{n}|} = 20$ $(i = 0{,}02\,8446)$, on peut partir en faut der mieux de $i_0 = 1/a_{\overline{n}|} = 0{,}05$. On reçoit

$$i_1 = \frac{1}{a_{\overline{n}|}} - \frac{0{,}05}{1{,}05^{30} - 1} = 0{,}03\,4949$$

---

[8]) Grosschmid: Adalékok a kamatlábfeladathoz. (En hongrois.) Kereskedelmi Szakoktatás, XXXI, 198 (Budapest, 1923/24).

et

$$i'_1 = 0,05 - (0,05 - 0,03\,4949) \,.\, 2 = 0,01\,9898;$$

nous avons l'inégalité:

$$0,01\,9898 < i < 0,03\,4949.$$

Nous continuons le procédé avec le moyen arithmétique:

$$i \sim 0,02\,7429.$$

Le deuxième pas nous donne:

$$i_2 = 0,05 - \frac{0,02\,7429}{1,02\,7429^{30} - 1} = 0,02\,8091,$$

et

$$i'_2 = 0,02\,7429 + (0,02\,8091 - 0,02\,7429) \,.\, 2$$
$$= 2 \,.\, 0,02\,8091 - 0,02\,7429 = 0,02\,8753,$$

c'est à dire l'inégalité:

$$0,02\,8091 < i < 0,02\,8753,$$

et le moyen:

$$i \sim 0,02\,8422.$$

Par le troisième pas nous recevons:

$$i_3 = 0,05 - \frac{0,02\,8422}{1,02\,8422^{30} - 1} = 0,02\,8438,$$

et

$$i'_3 = 2 \,.\, 0,02\,8438 - 0,02\,8422 = 0,02\,8454,$$

c'est à dire l'inégalité:

$$0,02\,8438 < i < 0,02\,8454,$$

et le moyen:

$$i \sim 0,02\,8446.$$

C'est un résultat donnant la valeur de i en 6 décimales.

Par la méthode originelle, on recevrait cette approximation en 22 pas. Même des méthodes du deuxième ordre ne donnent pas cette valeur en moins de pas.

Lorsqu'on a des tables financières, la méthode est plus simple à exécuter.

P. e.

$$\frac{1}{a_{\overline{30}|}\,(2\tfrac{5}{6}\%)} = 0,04\,9926$$

et l'on a

$$i_1 = i_0 + \left(\frac{1}{a_{\overline{n}|}} - \frac{1}{a_k}\right) = 0,02\,8333 + (0,05 - 0,04\,9926) = 0,02\,8407,$$

et

$$i'_1 = 0{,}02\,8333 + (0{,}05 - 0{,}04\,9926)\,.\,2 = 0{,}02\,8481,$$

c'est à dire l'inégalité:

$$0{,}02\,8407 < i < 0{,}02\,8481,$$

et la valeur moyenne:

$$i \backsim 0{,}02\,8444,$$

ce qui est déjà d'une approximation assez grande, savoir plus que 98 p. c., ou

$$\begin{aligned} i''_1 &= 0{,}02\,8333 + (0{,}05 - 0{,}04\,9926)\,\tfrac{3}{2} \\ &= 0{,}02\,8333 + 0{,}00\,0074\,.\,\tfrac{3}{2} \\ &= 0{,}02\,8444. \end{aligned}$$

VII.

On pourrait enfin utiliser pour point de départ une de mes valeurs rationelles,[9])

$$i_1 = \frac{n^2 - a^2}{a\,(n^2 + a)}\ (< i)$$

par exemple ou plutôt

$$i_2 = k\,\frac{6 + (n-1)\,k}{6 + 2\,(n-1)\,k}, \quad \text{où } k = \frac{2\left(\frac{n}{a} - 1\right)}{n + 1}$$

dont l'approximation est déjà fort considérable en soi-même, et qui donne après un ou deux pas d'itération une valeur de précision excellente.

Dans notre exemple donné ci-dessus, nous avons:

$$k = \tfrac{1}{31},\ i_2 = \tfrac{1}{31}\,\tfrac{215}{244} = 0{,}02\,8424,$$

et en itérant

$$0{,}02\,8439 < i < 0{,}02\,8453$$

ou en moyenne

$$i \backsim 0{,}02\,8446.$$

*

[9]) Huszár: Sur les solutions rationelles du problème de taux de la rente normale. (En hongrois.) Kereskedelmi Szakoktatás, Budapest, 1929, p. 67—86 et 166—181.

D'ailleurs, i_1 est identique à une valeur publiée — trois années après mon discours — par M. Fernando Giaccardi. (Giornale di Matematica Finanziaria, 1932.) Il donne aussi la valeur „k“, mais qui est due à M. Grosschmid. (Sur le problème de taux. En hongrois. Kereskedelmi Szakoktatás, Budapest, 1924, p. 198.) Naturellement, M. Giaccardi ne pouvait pas connaître ces discours hongrois.

Remarque générale.

Au point de vue plus générale, notre méthode A montre qu'il ne suffit pas — en appliquant le procédé d'itération — de donner à l'équation à résoudre la forme $i = \varphi(i)$, et de prouver la convergence, c'est aussi la distribution de la fonction $\varphi(i)$ qui joue un rôle important, parfois même prépondérant.

La plus grande valeur.

E. J. Gumbel, Université de Lyon.

1. La distribution finale de la plus grande valeur.
2. Calcul des moments.
3. Application à quelques distributions initiales.

Pour une distribution non limitée et pour un nombre fini d'observations, il y en aura certainement au moins une qui sera la plus grande. Sa valeur sera finie puisque nous ne pouvons observer que des valeurs finies. Il s'agit de préciser cette valeur et la manière dont elle dépend du nombre des observations.

Des parties importantes de ce problème sont déjà résolues. Car il est reconnu que cette valeur a elle-même le caractère d'une variable statistique, c'est à dire qu'il existe une distribution de la plus grande valeur qui dépend du nombre des observations et de la distribution dite initiale que l'on traite. M. von Bortkiewicz[1]) a calculé son espérance mathématique pour la distribution initiale de Gauss et pour un petit nombre d'observations. M. L. H. C. Tippett,[2]) qui s'est limité aux mêmes conditions, a calculé les premiers moments. M. von Mises[3]) a donné une approximation de l'espérance mathématique valable pour un grand nombre d'observations et pour une répartition quelconque satisfaisant à une condition spéciale. M. Tricomi[4]) a calculé directement l'espérance

[1]) L. von Bortkiewicz: Variationsbreite und mittlerer Fehler. Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft, 21. Jahrg. No. 1, 1922.
Die Variationsbreite beim Gaussschen Fehlergesetz. Nordisk Statistisk Tidskrift Bd. I, 1922.

[2]) L. H. C. Tippett: On the extreme individuals and the range of samples taken from a normal population. Biometrika, vol. XVII, parts 3 and 4, Cambridge 1925.

[3]) R. von Mises: Über die Variationsbreite einer Beobachtungsreihe. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 5. Okt. 1922.

[4]) F. Tricomi: Determinazione del valore asintotico di un certo integrale. Rendiconti della R. Accademia nazionale dei Lincei, vol. XVII, ser. 6a, 1. sem. fasc. 2, Roma 1933.