Karel Tříska

How to compute the standard error of a correlation with g

Aktuárské vědy, Vol. 4 (1933), No. 3, 134–137

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144606

sodaß wir für $P(u, v)$ den Ausdruck

$$P(u, v) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X e^{-(ux-vy)i} \, dx \, dy \tag{VII}$$

erhalten. Wir setzen nun

$$X = U^s$$

und differentiieren nach s; so folgt

$$\frac{dX}{ds} = U^s \ln U$$

und hieraus

$$\frac{dX}{ds} = X \frac{1}{s} \ln X.$$

(Fortsetzung.)

How to compute the standard error of a correlation with *g*.

Karel Tříska.

In the course of an investigation recently undertaken by this writer with a view of determining the nature and diagnostic value of the so-called speed and power tests of intelligence, necessity arose to compare correlations with g obtained in different ranges for the two kinds of tests. For this purpose, standard errors of the correlations with g were needed. As the search in the literature for the formula required led to no result, the task of deriving it had to be assumed by the writer.

The formula for computing correlations with g has been given by Spearman and may be written as follows:

$$r_{1g} = \left(\frac{r_{12}r_{13}}{r_{23}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{r_{12}r_{14}}{r_{24}}\right)^{\frac{1}{2}} = \ldots = \left(\frac{r_{1(n-1)}r_{1n}}{r_{(n-1)n}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

$$= \frac{2}{(n-1)(n-2)} \left[\left(\frac{r_{12}r_{13}}{r_{23}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{r_{12}r_{14}}{r_{24}}\right)^{\frac{1}{2}} + \ldots + \left(\frac{r_{1(n-1)}r_{1n}}{r_{(n-1)n}}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{2}$$

$$= \left(\frac{r_{12}r_{13} + r_{12}r_{14} + \ldots + r_{1(n-1)}r_{1n}}{r_{23} + r_{24} + \ldots r_{(n-1)n}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

where $1, 2, 3, \ldots, n$ are different variables which, taken any four at a time, obey the tetrad equation

$$r_{12}r_{34} = r_{13}r_{24} = r_{14}r_{23}$$

and where g is a factor common to all these variables.

The standard error of formula (1) may easily be derived. Taking logarithmic differentials, we obtain

$$\frac{dr_{1g}}{r_{1g}} = \frac{dr_{12}}{2r_{12}} + \frac{dr_{13}}{2r_{13}} - \frac{dr_{23}}{2r_{23}}.$$

Squaring, summing and dividing through by N, we have

$$\frac{\sigma^2 r_{1g}}{r_{1g}^2} = \frac{\sigma^2 r_{12}}{4r_{12}^2} + \frac{\sigma^2 r_{13}}{4r_{13}^2} + \frac{\sigma^2 r_{23}}{4r_{23}^2} + 2\,\frac{\sigma_{r_{12}}\sigma_{r_{13}}}{4r_{12}r_{13}}\, r_{r_{12}\,r_{13}} -$$

$$- 2\,\frac{\sigma_{r_{12}}\sigma_{r_{23}}}{4r_{12}r_{23}}\, r_{r_{12}\,r_{23}} - 2\,\frac{\sigma_{r_{13}}\sigma_{r_{23}}}{4r_{13}r_{23}}\, r_{r_{13}\,r_{23}}.$$

Substituting for σ the corresponding value

$$\frac{1-r^2}{\sqrt{N}},$$

simplifying and extracting the square root, we finally get

$$\sigma_{r_{1g}} = \frac{r_{1g}}{2\sqrt{N}}\Bigg[\left(\frac{1-r_{12}^2}{r_{12}}\right)^2 + \left(\frac{1-r_{13}^2}{r_{13}}\right)^2 + \left(\frac{1-r_{23}^2}{r_{23}}\right)^2 +$$

$$+ \frac{2\,(1-r_{12}^2)\,(1-r_{13}^2)}{r_{12}r_{13}}\, r_{r_{12}\,r_{13}} - \frac{2\,(1-r_{12}^2)\,(1-r_{23}^2)}{r_{12}r_{23}}\, r_{r_{12}\,r_{23}} -$$

$$- \frac{2\,(1-r_{13}^2)\,(1-r_{23}^2)}{r_{13}r_{23}}\, r_{r_{13}\,r_{23}}.\Bigg]^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

The values of $r_{r_{12}\,r_{13}}$ and the two other correlations between correlation coefficients may readily be obtained by formula 129 from Kelley's „Statistical method", which may conveniently be written as follows:

$$r_{r_{12}\,r_{13}} = r_{23} - \frac{r_{12}r_{13}\,(1 + 2r_{12}r_{13}r_{23} - r_{12}^2 - r_{13}^2 - r_{23}^2)}{2\,(1-r_{12}^2)\,(1-r_{13}^2)}.$$

In practice, however, our correlations with g are seldom computed by formula (1), but most often by formula (3). As the derivation of the standard error for this formula is impracticable because of the varying number of terms involved, we are compelled either to calculate

$$\tfrac{1}{2}(n-1)\,(n-2)$$

standard errors (4) for as many terms of formula (2) in order to obtain their mean or to find some way to reduce this labour to a minimum. To this end, let us set out from formula (3) which may also be written in the following form:

$$r_{1g} = \left(\frac{\sum\limits_{a<b} r_{1a}r_{1b}}{\sum\limits_{a<b} r_{ab}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Setting

$$r'r'' = \sum_{a<b} r_{1a} r_{1b}$$

and

$$\frac{r'}{r''} = \frac{\sum_{a=2}^{n-1} (n-a)\, r_{1a}}{\sum_{b=3}^{n} (b-2)\, r_{1b}}$$

$$= \frac{(n-2)\, r_{12} + (n-3)\, r_{13} + \ldots + (n-n+1)\, r_{1(n-1)}}{r_{13} + 2r_{14} + \ldots + (n-2)\, r_{1n}}$$

we get:

$$r' = \left(\frac{\sum_{a<b} r_{1a} r_{1b} \cdot \sum_{a=2}^{n-1} (n-a)\, r_{1a}}{\sum_{b=3}^{n} (b-2)\, r_{1b}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

and

$$r'' = \left(\frac{\sum_{a<b} r_{1a} r_{1b} \cdot \sum_{b=3}^{n} (b-2)\, r_{1b}}{\sum_{a=2}^{n-1} (n-a)\, r_{1a}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

If we now set:

$$\frac{r'\sqrt{2}}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} = \bar{r}_{1a},$$

$$\frac{r''\sqrt{2}}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} = \bar{r}_{1b}$$

and:

$$\frac{2\Sigma r_{ab}}{(n-1)(n-2)} = \bar{r}_{ab},$$

formula (5) converts into

$$\bar{r}_{1g} = \left(\frac{\bar{r}_{1a} \bar{r}_{1b}}{\bar{r}_{ab}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

which is equivalent to (5) and for which the standard error may readily be computed by formula (4). The saving of time and labour, as obtained by this procedure, is obvious.[1])

---

[1]) The writer wishes to express his indebtedness to Doc. Dr. Vl. Kořínek for friendly assistance in checking the arithmetic and notation of the present article.

References.

C. Spearman, The Abilities of Man, their Nature and Measurement, London, 1927, Appendix, pp. I—III, XVI. — Karl J. Holzinger, Statistical Resumé of the Spearman Two-Factor Theory, Chicago 1931, pp. 1—6, 16—18. — Truman L. Kelley, Crossroads in the Mind of Man, A Study of Differentiable Mental Abilities, Stanford University, California, 1928, pp. 40—41, 46—50. — Truman L. Kelley, Statistical Method, New York, 1923, p. 179.

Aktuální otázky pensijního pojištění.

Dr. *Jaroslav Stránský.*

Pod tímto názvem uveřejnil prof. Rosmanith v 10. čísle časopisu Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen článek, který obsahuje několik námitek jednak proti neuveřejněné dosud*) důvodové zprávě k návrhu na změnu pensijního zákona, který byl ministerskou komisí předložen ministerstvu sociální péče a byl přístupný pouze členům ministerské komise, jednak proti pojistně matematické bilanci Všeobecného pensijního ústavu k 31. XII. 1929.

Chci pouze stručně reagovati na vývody prof. Rosmanitha, při čemž se omezím pouze na hlavní body jeho kritiky.

V pojistně matematické části důvodové zprávy k novele pensijního zákona jest podrobně popsán způsob výpočtů, jimiž bylo stanoveno, jak se změní pojistně matematické hodnoty v důsledku zavedení tak zvaného sociálního důchodu a současného zrušení bezpodmínečného starobního důchodu. Jsou tam uvedeny 2 alternativy označené výslovně za extrémní, v nichž se předpokládá, že sociální důchod napadne ve stářích 56—60 let v trojnásobném počtu případů, nežli činí čísla, udávající pravděpodobnosti invalidisace. Ovšem výpočty, jejichž cílem je pouze zjistiti, že chystanou změnou nedojde k zhoršení finanční rovnováhy Všeobecného pensijního ústavu, mohly býti, jak je také v důvodové zprávě zdůrazněno, provedeny pouze jako odhady, neboť nelze před účinností novely předvídati, jaký vliv bude míti novela na statistické podklady, jichž bylo při výpočtech použito. Proto také byly v důvodové zprávě provedeny 2 extrémní alternativy a skutečný efekt novely bude se pohybovati mezi nimi.

Přes to, že ve výpočtech důvodové zprávy byl úmyslně přeceněn účinek zavedení sociálního důchodu mezi 56. a 60. rokem tím, že pro tyto ročníky stáří bylo předpokládáno v uvedených extrémních variantách trojnásobné zvýšení měrných čísel invalidisace, předpokládá prof. Rosmanith kromě toho zvýšení invalidisace ještě v dalších letech nad 60. rok věku, ačkoliv pro tato stáří nepřináší novela žádného nového zatížení.

---

*) Mezitím byla důvodová zpráva k vládnímu návrhu uveřejněna.