E. J. Gumbel

Die Verteilung der Gestorbenen um das Normalalter

Aktuárské vědy, Vol. 4 (1933), No. 2, 65–96

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144596

Die Verteilung der Gestorbenen um das Normalalter.

Von *E. J. Gumbel* (Paris).

1. Problemstellung.
2. Konstantenbestimmung bei Bortkiewicz.
3. Konstantenbestimmung nach der Methode der Momente.
4. Numerische Berechnung der Konstanten.
5. Biometrische Funktionen für alle Tafeln.
6. Beispiele.
7. Folgerungen für das Grenzalter und die Darstellung von Verteilungen.

Die Auffassung der Absterbeordnung als Verteilung erlaubt die Methoden, welche zur Charakterisierung und analytischen Behandlung von Verteilungen aufgestellt worden sind, auf die Sterbetafel anzuwenden. Dies kann nach zweierlei Richtungen geschehen, je nachdem man von der Verteilung der Gestorbenen über die Alter oder vom Altersaufbau der stationären Bevölkerung ausgeht. Im folgenden werden wir den ersten Gedankengang zugrunde legen. Dann entspricht die bekannte Übung, dass die Absterbeordnung mit 1 beginnt, einfach der Tatsache, dass die relative Häufigkeit der Gestorbenen eine Verteilung bildet, d. h. dass ihr Inhalt gleich 1 ist. Ihr Mittelwert, das mittlere Alter beim Tod, ist bekanntlich gleich der Lebenserwartung eines Neugeborenen, während der mittlere Fehler auf das mittlere Alter der Lebenden führt.

Es fragt sich, ob diese Verteilung auf das klassische Schema des Gauss'schen Fehlergesetzes gebracht werden kann, ob also das bekannte Maximum der Gestorbenen, welches für den Menschen etwa beim 70. Jahr liegt, als normales Sterbealter im Sinn des Gauss'schen Gesetzes gedeutet werden kann. Lexis[1]) hat gezeigt, dass man bei den menschlichen Absterbeordnungen wenigstens die nach diesem Alter Gestorbenen als zufällige Abweichungen der in diesem Alter Gestorbenen auffassen kann. Für die früheren Alter ist dies nicht möglich, da hier zahlreiche bestimmte Ursachen vorliegen, insbesondere die Kindersterblichkeit,

[1]) Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft, Freiburg 1877, p. 47, und Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik, Jena 1903, p. 112 ff.

welche die Zahl der vor dem Maximum Gestorbenen auf das vielfache der nach dieser Theorie zu erwartenden erhöht. Aus diesem Grunde hat Lexis die Theorie und ihre Prüfung an Hand der Erfahrung auf die nach diesem normalen Alter Gestorbenen beschränkt.

Im folgenden werden wir diese Theorie auf alle Alter anwenden und zeigen, dass es Tafeln gibt, für welche diese vervollständigte Theorie angenähert gilt. Ferner werden wir hierfür die Konstanten in systematischer Weise bestimmen. Das dieser erweiterten Theorie zugrunde gelegte Material entstammt natürlich nicht der Bevölkerungsstatistik.

Man bezeichne das Alter mit x, die Dichte der Sterblichkeit mit $\vartheta(x)$, derart, dass die Zahl der Gestorbenen im Alter x bis $x + \mathrm{d}x$ gleich $\vartheta(x)\,\mathrm{d}x$ sei. Diese Sterbensdichte ist so normiert, dass

$$\int_0^\infty \vartheta(z)\,\mathrm{d}z = 1, \tag{1}$$

wobei z die Integrationsvariable. Diese Gleichung wird Anfangsbedingung genannt. Eine obere Grenze des Lebens wird hier nicht angenommen.

Man bezeichne dasjenige Alter, zu dem das Maximum der Gestorbenen gehört, als Normalalter ξ, so muss die Gauss'sche Formel für die Verteilung der Gestorbenen in der Form

$$\vartheta(x) = k\,\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2(x-\xi)^2} \tag{2}$$

geschrieben werden, wobei h eine noch näher zu betrachtende Konstante von der Dimension eines reziproken Alters ist. Die Einführung der multiplikativen dimensionslosen Konstanten k hat den Zweck, dass die Verteilung der Gestorbenen über die Alter von 0 bis ∞ bereits den Wert 1 besitzt. Demnach verlangt die Anfangsbedingung

$$\frac{1}{k} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-h^2(z-\xi)^2}\,\mathrm{d}z.$$

Führt man eine neue dimensionslose Integrationsvariable t ein durch

$$h\,(z - \xi) = t,$$

so lautet sie

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-h\xi}^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Ausgedrückt durch das Gauss'sche Integral

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \Phi(x), \tag{3}$$

besagt die Anfangsbedingung

$$\frac{1}{k} = \tfrac{1}{2}\,[1 + \Phi(h\xi)].$$

Daher erhält man für die Konstante k

$$k = \frac{2}{1 + \Phi(h\xi)}.$$

Selbstverständlich muss $k \geqq 1$, weil der Inhalt des Bereiches von 0 bis ∞ hier gleich 1 gesetzt ist.

Somit lautet der Ansatz

$$\vartheta(x) = \frac{1}{1 + \Phi(h\xi)}\,\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2(x-\xi)^2}.$$

Der maximale Wert der Sterbensdichte beträgt

$$\vartheta(\xi) = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{1 + \Phi(h\xi)}.$$

Die Zahl der Überlebenden des Alters x wird dann

$$\mathrm{l}(x) = \int_x^\infty \vartheta(z)\ \mathrm{d}z \tag{4}$$

oder nach Einführung der Integrationsvariablen t

$$\mathrm{l}(x) = \frac{1}{1 + \Phi(h\xi)}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{h(x-\xi)}^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Ausgedrückt durch das Gauss'sche Integral lautet dies

$$\mathrm{l}(x) = \frac{1 - \Phi(h(x - \xi))}{1 + \Phi(h\xi)}.$$

Speziell wird die Zahl derer, die das normale Alter erreichen,

$$\mathrm{l}(\xi) = \frac{1}{1 + \Phi(h\xi)}, \tag{5}$$

und die Sterbensdichte hierfür

$$\vartheta(\xi) = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{l}(\xi). \tag{6}$$

Die Sterbensintensität wird für dieses Alter

$$\mu(\xi) = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}. \tag{7}$$

Demnach ist die Konstante h proportional der Sterbensintensität am Normalalter.

Führt man den Wert $l(\xi)$ ein, so lautet die Sterbensdichte

$$\vartheta(x) = l(\xi) \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-\xi)^2}, \tag{8}$$

und die Absterbeordnung

$$l(x) = l(\xi) \left[1 - \Phi(h(x - \xi))\right], \tag{9}$$

wobei die Anfangsbedingung geschrieben werden kann

$$1 = l(\xi) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-h\xi}^{\infty} e^{-t^2} \, dt. \tag{10}$$

2. Konstantenbestimmung bei Bortkiewicz.

In der Gauss'schen Formel hängen die drei Konstanten, nämlich die Lage des Maximums, sein Wert und die Präzision, dadurch zusammen, dass die beiden letzteren einander proportional sind. Dagegen hängt der Wert des Maximums hier nach (6) sowohl von der Konstanten h wie von seiner Lage ab. Es fragt sich, wie eine Beobachtungsreihe durch diese Formel wiedergegeben werden soll, d. h. wie diese drei Konstanten bestimmt werden müssen.

Falls ξ und $l(\xi)$ aus den Beobachtungen entnommen werden können, könnte man die andere Konstante nach (7) aus dem Wert der Sterbensintensität am Normalalter entnehmen. Aber diese Methode empfiehlt sich nicht, weil die Sterbensintensität durch Differentiation einer empirisch nur in unstetiger Form gegebenen Kurve ermittelt werden müsste.

Falls ξ und $l(\xi)$ den Beobachtungen direkt entnommen werden können, erhält man h auch aus (5). Tatsächlich ist jedoch der genaue Wert von ξ und daher auch $l(\xi)$ nicht beobachtet. Denn bekannt ist nur das Integral über die Sterbensdichte für bestimmte Intervalle, nicht ihr Verlauf selbst. Somit kennen wir nur das Intervall, in welchem das Maximum der Gestorbenen liegt. Man kann es also nicht ohne weiteres der Mitte dieses Intervalls zuschreiben. Um diese beiden Konstanten zu bestimmen, wird man das Maximum approximativ ermitteln,[2]) indem man die Sterbensdichte in der Umgebung des Maximums in eine Reihe entwickelt, welche beim ersten Glied abgebrochen wird. Wie die Sterbensdichte wird dann die Zahl der innerhalb eines einjährigen Intervalles Gestorbenen eine quadratische Funktion des Alters. Die hierin auftretenden Konstanten bestimmt man aus dem Intervall, welches das Maximum enthält, und den beiden benachbarten: ermittelt

---

[2]) G. T. Fechner, Kollektivmaßlehre, Leipzig 1897, p. 136
E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung Bd. II. Leipzig 1910, p. 69.

das Maximum und seinen Wert. So bestimmt man sowohl die Lage wie die Höhe des Maximums aus seiner engsten Umgebung.

Bortkiewicz[3]) hat diese Methode verbessert, indem er nur ξ und $\mathrm{l}(\xi)$ auf diese Weise bestimmt, aber zur Ermittlung der Konstanten h den ganzen ferneren Verlauf verwendet. Man berechnet zu diesem Ende zunächst die verlebte Zeit $\mathrm{T}(x)$ für ein beliebiges Alter. Sie lautet

$$\mathrm{T}(x) = \int_x^\infty \mathrm{l}(z)\,\mathrm{d}z \tag{11}$$

oder nach (9), wenn man wieder die Integrationsvariable t einführt,

$$\mathrm{T}(x) = \frac{\mathrm{l}(\xi)}{h} \int_{h(x-\xi)}^\infty [1-\Phi(t)]\,\mathrm{d}t.$$

Partielle Integration führt auf

$$\mathrm{T}(x) = -\frac{\mathrm{l}(\xi)}{h}\, h\,(x-\xi)\,[1-\Phi(h(x-\xi))] + \frac{\mathrm{l}(\xi)}{h}\int_{h(x-\xi)}^\infty t\,\Phi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Berücksichtigt man (9) und (3), so wird

$$\mathrm{T}(x) = +\,(\xi-x)\,\mathrm{l}(x) + \frac{\mathrm{l}(\xi)}{h}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{h(x-\xi)}^\infty t e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Integration des zweiten Summanden führt auf

$$\mathrm{T}(x) = (\xi-x)\,\mathrm{l}(x) + \frac{\mathrm{l}(\xi)}{h\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2(x-\xi)^2}. \tag{12}$$

Somit erhält man für die verlebte Zeit

$$\mathrm{T}(x) = (\xi-x)\,\mathrm{l}(x) + \frac{\vartheta(x)}{2h^2}. \tag{13}$$

und speziell für das Normalalter nach (6)

$$\mathrm{T}(\xi) = \frac{\mathrm{l}(\xi)}{h\sqrt{\pi}}. \tag{14}$$

Die Lebenserwartung hierfür wird

$$\mathrm{E}(\xi) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}. \tag{15}$$

Diese Lebenserwartung des Normalalters lässt sich, falls dieses vorher

---

[3]) Die Sterbeziffer und der Frauenüberschuss i. d. stationären u. i. d. progressiven Bevölkerung. Bulletin de l'Institut international de Statistique, Bd. XIX, Haag 1912, p. 36.

Artikel „Lebensdauer" im Handwörterbuch der Staatswissenschaften, 4. Aufl. 1923, S. 268.

berechnet wurde, aus den Beobachtungen bestimmen und liefert die gesuchte Konstante h. Diese Methode beruht auf der Berechnung des durchschnittlichen Fehlers. Sie entnimmt die Lage des Normalalters und den zugehörigen Wert der Erlebenswahrscheinlichkeit aus den Beobachtungen in seiner Umgebung und bestimmt die dritte Konstante aus sämtlichen späteren Beobachtungen.

Die beiden Konstanten ξ und $\mathrm{l}(\xi)$ werden von Lexis wie folgt bestimmt: Man bezeichne mit D_x die Zahl der im Alter x bis $x+1$ Gestorbenen, mit m das Alter, in welchem die Zahl der innerhalb eines Jahres Gestorbenen ein Maximum aufweist. Dann wird das Normalalter berechnet aus

$$\xi = m + \frac{1}{1+\delta}, \tag{15'}$$

wobei

$$\delta = \frac{D_m - D_{m+1}}{D_m - D_{m-1}}. \tag{15''}$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Neugeborenen, dieses Alter zu erreichen, ergibt sich durch lineare Interpolation als

$$\mathrm{l}(\xi) = \mathrm{l}(m) - \frac{D_m}{1+\delta}. \tag{15'''}$$

Bei der Konstantenbestimmung durch die drei letzten Formeln ist natürlich die Anfangsbedingung nicht erhalten, da die ganze Lexis'sche Theorie sich nur auf die nach dem Normalalter Gestorbenen bezieht. Uns aber kommt es im folgenden darauf an, gerade die Anfangsbedingung zu erhalten.

3. Konstantenbestimmung nach der Methode der Momente.

Der tatsächliche Verlauf der Kurven erlaubt meistens nicht, die Lage des Maximums dem Intervall, in dem es liegt, und den beiden benachbarten zu entnehmen, da es manchmal nicht sehr ausgeprägt ist, unsymmetrisch liegt und unter Umständen auch mehrere, einander benachbarte Maxima existieren. Dies gilt insbesondere dann, wenn die Beobachtungen nicht ausgeglichen sind. Wir werden daher ein Verfahren aufstellen, welches die Lage und Höhe des Maximums und die Konstante h aus sämtlichen Beobachtungen entnimmt, also für alle drei Konstanten die gleiche Theorie exakt zugrunde legt.

Zur Bestimmung der drei Konstanten verwenden wir zunächst die Anfangsbedingung der Verteilung der Gestorbenen in der Form

$$\mathrm{l}(\xi) = \frac{1}{1+\Phi(u)}, \tag{16}$$

wobei

$$u = h\xi \tag{17}$$

gesetzt ist.

Diese Bedingung tritt bei Lexis und Bortkiewicz nicht auf, und sie kann es auch nicht, da beide die Theorie nur auf die nach dem Normalalter Gestorbenen anwenden. Bei ihnen sind die drei Konstanten daher von einander unabhängig, bei uns durch diese Bedingung verbunden.

Ferner verwenden wir das erste Moment, also den Mittelwert der Verteilung der Gestorbenen. Wir haben nach (12) für die gesamte verlebte Zeit

$$T(o) = \xi + \frac{l(\xi)}{h\sqrt{\pi}} e^{-h^2\xi^2}.$$

Dass diese gesamte verlebte Zeit, also die Lebenserwartung eines Neugeborenen, grösser ist als das Normalalter, dass der Mittelwert hier vom häufigsten Wert verschieden ist, liegt daran, dass die Gauss'sche Verteilung hier willkürlich erst beim Alter null beginnt, weil negative Alter nicht existieren. Wenn wir wieder den Ausdruck u einführen, lautet der Mittelwert der Verteilung der Gestorbenen

$$T(o) = \xi\left(1 + \frac{l(\xi)\, e^{-u^2}}{u\sqrt{\pi}}\right). \tag{18}$$

Endlich verlangen wir die Erhaltung des zweiten Moments. Damit ersetzen wir den von Bortkiewicz benutzten durchschnittlichen Fehler durch den üblichen mittleren Fehler. Das zweite Moment beträgt nach (4)

$$\int_0^\infty z^2\, \vartheta(z)\, dz = 2\int_0^\infty z\, l(z)\, dz$$

$$= 2\, \frac{\int_0^\infty z\, l(z)\, dz}{\int_0^\infty l(z)\, dz} \cdot \int_0^\infty l(z)\, dz.$$

Betrachtet man die Absterbeordnung als Altersaufbau der stationären Bevölkerung, so wird man dieses Integral mit $2\bar{x}\, T(o)$ bezeichnen. Also wird nach (11)

$$\bar{x}\, T(o) = -\int_0^\infty z\, dT(z)$$

oder

$$\bar{x}\, T(o) = \int_0 T(z)\, dz,$$

wobei $\bar{x}$ das mittlere Alter der Lebenden in einer stationären Bevölkerung bedeutet.

Führt man den oben berechneten Wert für die verlebte Zeit (13) ein, so wird

$$\bar{x}\,T(o) = \xi \int_0^\infty l(z)\,dz - \int_0^\infty z\,l(z)\,dz + \frac{1}{2h^2}\int_0^\infty \vartheta(z)\,dz$$

oder unter Verwendung der Definition von $\bar{x}\,T(o)$ und der Anfangsbedingung

$$2\bar{x}\,T(o) = \xi\,T(o) + \frac{1}{2h^2}. \tag{19}$$

Die Streuung dieser Verteilung wird nach einem bekannten Satz der Wahrscheinlichkeitstheorie

$$\sigma^2 = 2\bar{x}\,T(o) - T^2(o)$$

zu

$$\sigma^2 = T(o)\,[\xi - T(o)] + \frac{1}{2h^2}, \tag{20}$$

wobei $T(o)$ wieder eine Funktion von h und ξ. Während bei der Gauss'schen Verteilung die Präzision h nur vom mittleren Fehler abhängt, ist die hier auftretende Grösse h eine Funktion des mittleren Fehlers und der Lage des Maximums.

An Hand der Formeln für das nullte, erste und zweite Moment lässt sich die Konstantenbestimmung ohne weiteres durchführen. Ersetzen wir den Ausdruck $l(\xi)$ in (18) durch seinen Wert aus der Gleichung (16), so bleiben zwei Gleichungen für zwei Unbekannte, u und ξ übrig. Setzt man

$$1 + \frac{e^{-u^2}}{u\sqrt{\pi}\,[1 + \Phi(u)]} = F(u), \tag{21}$$

so lauten sie

$$T(o) = \xi\,F(u)$$

und

$$2\bar{x}\,T = \xi\,T(o) + \frac{\xi^2}{2u^2},$$

wobei die linken Seiten beobachtete Werte sind.

Setzt man ferner

$$\xi = \frac{T(o)}{F(u)}$$

in die zweite dieser beiden Gleichungen ein, so wird

$$2\bar{x}\,T(o) = \frac{T^2(o)}{F(u)} + \frac{T^2(o)}{2u^2\,F^2(u)}, \tag{22}$$

welche Gleichung nur mehr die beobachteten Werte $\bar{x}$ und $T(o)$ und das zu berechnende u enthält. Man bilde nun den von uns als Maß der Güte[4]) bezeichneten Momentenquotienten

[4]) Ein Maß der Güte für die Sterbetafel, Blätter für Versicherungsmathematik u. verwandte Gebiete, Bd. I, H. 10, 1930.

$$\varrho = \frac{T^2(o)}{2x\, T(o)}, \tag{23}$$

für welchen $0 < \varrho < 1$ (wobei die Grenzen als pessimaler bezw. optimaler Fall bezeichnet werden), so wird

$$\varrho = \frac{2u^2\, F^2(u)}{1 + 2u^2\, F(u)}. \tag{24}$$

Während $T(o)$ und x von der gewählten Zeiteinheit abhängen, ist ihr Quotient dimensionslos, also unabhängig von der Wahl der Zeiteinheit. Hat man aus den empirischen Angaben das Maß der Güte berechnet, so ergibt sich u aus dieser transzendenten Gleichung, welche durch Probieren aufgelöst werden muss. Es empfiehlt sich aber, diesen Weg umzukehren, die rechte Seite für vorgegebene Werte von u zu tabellieren und die zugehörigen Werte von ϱ zu berechnen. Für beobachtete ϱ ergibt sich dann das u durch Interpolation.

Im folgenden stellen wir dieses Rechenschema zusammen. Für vorgegebene Werte der dimensionslosen Grösse u berechnen wir aus den Tabellen der Gauss'schen Funktion den Wert der Absterbeordnung am normalen Alter

$$l(\xi) = \frac{1}{1 + \Phi(u)}. \tag{16}$$

Hierauf

$$F(u) = 1 + l(\xi)\, \frac{e^{-u^2}}{u\sqrt{\pi}}. \tag{21}$$

Der reziproke Wert hierfür gibt das Verhältnis des zu berechnenden normalen Alters zum beobachteten mittleren Alter beim Tod als

$$\frac{\xi}{T(o)} = \frac{1}{F(u)}. \tag{25}$$

Dieselbe Gleichung liefert nach Multiplikation mit h diese Grösse in der Form

$$h\, T(o) = u\, F(u)$$

oder

$$h\, T(o) = u\, \frac{T(o)}{\xi}. \tag{26}$$

Das zugehörige Maß der Güte lautet

$$\varrho = \frac{2[hT(o)]^2}{1 + 2u\,[hT(o)]}. \tag{27}$$

Hieraus erhält man das mittlere Alter der Lebenden als

$$\frac{\bar{x}}{T(o)} = \frac{1}{2\varrho}. \tag{28}$$

Der Anfangswert der Sterbensdichte wird auf Grund des Ansatzes für $\vartheta(x)$ und (21)

$$\frac{\vartheta(o)}{2h} = u\,[\mathrm{F}(u) - 1]$$

oder

$$\frac{\vartheta(o)}{2h} = h\,\mathrm{T}(o) - u. \tag{29}$$

Dagegen wird der grösste Wert der Sterbensdichte

$$\frac{\vartheta(\xi)}{2h} = \frac{\mathrm{l}(\xi)}{\sqrt{\pi}}. \tag{30}$$

Somit sind sämtliche biometrisch interessierenden Konstanten und ausgezeichneten Werte auf die Konstante u zurückgeführt.

4. Numerische Bestimmung der Konstanten.

Wir verfügen über zwei unabhängige Konstanten, nämlich h und ξ. Die erste muss stets positiv sein. Wenn wir zudem verlangen, dass ein Maximum der Gestorbenen existiere, kann auch die zweite nicht negativ sein. An sich sind somit neun Fälle möglich, je nachdem, ob die beiden Konstanten jeweils null, endlich oder unendlich sind. Bezeichnet man einen von null verschiedenen, endlichen Wert mit ξ_0 bzw. h_0, so führen die Fälle

$$\begin{array}{l} \xi = 0;\quad h = 0;\ \text{bezw.}\ h = \infty \\ \xi = \xi_0;\quad h = 0;\ \text{bezw.}\ h = \infty \\ \xi = \infty;\quad h = 0;\ \text{bezw.}\ h = h_0;\ \text{bezw.}\ h = \infty \end{array}$$

sämtlich auf den sinnlosen Wert $\vartheta(x) = 0$. Daher sind von diesen neun Fällen nur die Fälle

$$\xi = 0;\quad h = h_0$$

und

$$\xi = \xi_0;\quad h = h_0$$

sinnvoll.

Es interessiert zunächst, die untere Grenze von u, nämlich $u = 0$, also den Extremfall $\xi = 0$ zu behandeln. Wenn das Maximum der Sterbensdichte beim Nullpunkt liegt, wird

$$\mathrm{l}(\xi) = 1$$

und

$$\mathrm{F}(u) = \infty,$$

wogegen

$$u\,\mathrm{F}(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Daher ist auch

$$h\,\mathrm{T}(o) = \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

entsprechend der Lexis'schen Methode der Konstantenbestimmung. Der Momentenquotient ϱ wird

$$\varrho = \frac{2}{\pi},$$

ebenso wird

$$\vartheta(\xi)\ \mathrm{T}(o) = \frac{2}{\pi},$$

also

$$\vartheta(\xi) = \vartheta(o) = \frac{2}{\pi\,\mathrm{T}(o)}.$$

Wir haben es hier mit einem Entartungsfall zu tun, da nur eine Konstante

$$h = \frac{1}{\mathrm{T}(o)\sqrt{\pi}}$$

existiert. Die Verteilung der Gestorbenen ergibt sich aus

$$\vartheta(x) = \frac{2}{\pi \mathrm{T}(o)}\, e^{-\frac{x^2}{\pi \mathrm{T}^2(o)}}. \tag{31}$$

Die Absterbeordnung wird

$$\mathrm{l}(x) = 1 - \Phi\left(\frac{x}{\mathrm{T}(o)\sqrt{\pi}}\right), \tag{32}$$

die verlebte Zeit

$$\mathrm{T}(x) = -x\,\mathrm{l}(x) + \frac{\pi}{2}\,\vartheta(x)\,\mathrm{T}^2(o), \tag{33}$$

und das mittlere Alter der Lebenden

$$\bar{x} = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{T}(o). \tag{34}$$

Eine obere Grenze für u erhält man, wenn man beachtet, dass e^{-u^2} sehr rasch gegen null geht und das Gauss'sche Integral $\Phi(u)$ für $u = 3$ praktisch bereits gleich 1 ist. Für solche sehr grossen Werte von u wird $\mathrm{l}(\xi) = \frac{1}{2}$, woraus

$$\mathrm{F}(u) = 1$$

und

$$\xi = \mathrm{T}(o).$$

Dieser Gauss'sche Fall ist also dadurch charakterisiert, dass das häufigste und mittlere Alter beim Tod übereinstimmen. Die Grösse h wird zu

$$h\,\mathrm{T}(o) = u.$$

Endlich wird die normale Sterbensdichte

$$\vartheta(\xi)\ \mathrm{T}(o) = \frac{u}{\sqrt{\pi}}.$$

Das Maß der Güte wird

$$\varrho = \frac{2u^2}{1 + 2u^2}.$$

In diesem Fall existieren, wie allgemein, zwei Konstanten, T(o) und h. Die Sterbensdichte lautet natürlich

$$\vartheta(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2[x - T(o)]^2}, \tag{31'}$$

wobei bereits $\vartheta(o)$ praktisch verschwindet, und die Absterbeordnung

$$\mathrm{l}(x) = \tfrac{1}{2}\{1 - \Phi[h\overline{x - T(o)}]\}, \tag{32'}$$

wobei $\Phi[-h\mathrm{T}(o)] = -1.$

Die verlebte Zeit wird

$$\mathrm{T}(x) = [\mathrm{T}(o) - x]\,\mathrm{l}(x) + \frac{\vartheta(x)}{2h^2} \tag{33'}$$

und das mittlere Alter der Lebenden

$$\bar{x} = \frac{\mathrm{T}(o)}{2} + \frac{1}{4h^2\mathrm{T}(o)}. \tag{34'}$$

Also wird

$$\frac{2\bar{x}}{\mathrm{T}(o)} = 1 + \frac{1}{2u^2}.$$

Für Werte von u, die im numerischen Sinn sehr gross sind, wird

$$\frac{2\bar{x}}{\mathrm{T}(o)} \to 1,$$

also

$$\mathrm{T}(o) \to 2\bar{x} \tag{35}$$

und die Absterbeordnung geht in den optimalen Fall über.

Die Tatsache, dass mit wachsendem u der Momentenquotient ϱ nach 1 geht, erlaubt zweierlei Deutung. Entweder kann h wachsen, was bedeutet, dass die Zahl der in der Umgebung des Normalalters Sterbenden zunimmt, oder es wächst ξ, d. h. das Normalalter schiebt sich immer mehr hinaus. In beiden Fällen nähert sich die Absterbeordnung der optimalen in dem Sinn, dass lange Zeit wenige und dann in sehr kurzer Zeit sehr viele sterben. Erst recht gilt dies, wenn beide Grössen wachsen.

Da die Fälle $u = 0$ und $u = 3$ bereits Extremfälle sind, genügt es, die numerischen Berechnungen der biometrisch wichtigen Grössen für einen ziemlich engen Bereich, nämlich $0 \leqq u \leqq 3$ durchzuführen. Wenn wir nämlich verlangen, dass ein Maximum der Gestorbenen existiert, kann $u = h\xi$ nicht negativ werden.

Die folgende Tabelle gibt für einige in Spalte 1 angeführte Werte von u nach den Tabellen der Gauss'schen Funktion den Wert der Absterbeordnung für das normale Alter $l(\xi)$ in Spalte 2. Berechnet man für die gleichen u die Grössen $\frac{1}{u\sqrt{\pi}}$ und e^{-u^2}, so ergibt die Multiplikation dieser Werte mit $l(\xi)$ nach Addition von 1 die Grösse $F(u)$. Ihr reziproker Wert beträgt $\frac{\xi}{T(o)}$ (Spalte 3). Dann wurde der zugehörige Wert von $hT(o)$ berechnet (Spalte 4) woraus sich der Momentenquotient ϱ (Spalte 5) ergab. Sein reziproker Wert liefert das mittlere Alter der Lebenden, ausgedrückt durch das mittlere Alter beim Tod (Spalte 6); Subtraktion von u vom Wert $hT(o)$ gab den Anfangswert der Sterbensdichte in Spalte 7. Multiplikation von $l(\xi)$ mit $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ die normale Sterbensdichte in Spalte 8.

Tabelle I.

Konstantenbestimmung.

1	2	3	4	5	6	7	8
						Wert der Sterbensdichte	
Hilfskonstante	Erlebenswahrscheinlichkeit des Normalalters	Normalalter	Zweite Konstante	Maß der Güte	Mittleres Alter der Lebenden	Anfangs-	Normal-
u	$l(\xi)$	$\frac{\xi}{T(o)}$	$hT(o)$	ϱ	$\frac{x}{T(o)}$	$\frac{\vartheta(o)}{2h}$	$\frac{\vartheta(\xi)}{2h}$
0	1	0	0,56419	0,63662	0,78540	0,56419	0,56419
0,25	0,78350	0,37579	0,66527	0,66420	0,75279	0,41527	0,44204
0,50	0,65768	0,63373	0,78897	0,69591	0,71848	0,28897	0,37106
0,75	0,58440	0,79969	0,93786	0,73092	0,68407	0,18786	0,32971
1,00	0,54268	0,88778	1,11264	0,76766	0,65133	0,11264	0,30617
1,25	0,52005	0,95310	1,31151	0,80399	0,62190	0,06151	0,29341
1,50	0,50862	0,98024	1,53024	0,83769	0,59688	0,03024	0,28696
1,75	0,50335	0,99247	1,76328	0,86709	0,57664	0,01328	0,28398
2,00	0,50117	0,99742	2,00518	0,89145	0,56088	0,00518	0,28276
2,25	0,50037	0,99919	2,25183	0,91092	0,54890	0,00183	0,28230
2,50	0,50010	0,99978	2,50055	0,92615	0,53987	0,00055	0,28215
2,75	0,50003	0,99995	2,75014	0,93804	0,53303	0,00014	0,28211
3,00	0,50001	0,99999	3,00003	0,94738	0,52777	0,00003	0,28210

Um eine gegebene Verteilung mit Hilfe dieser Methode wiederzugeben, bedarf es zur Konstantenbestimmung nur der Feststellung des Maßes der Güte. Zu diesem Zweck berechnet man aus der Verteilung der Gestorbenen zunächst die zugehörige Absterbeordnung $l(x)$ durch Summation von unten. Die verlebte Zeit erhält man dann nach bekannten Methoden aus

$$\mathrm{T}(o) = \sum_1^{\omega} \mathrm{l}(z) + \tfrac{1}{2} \tag{36}$$

und das Maß der Güte aus

$$\varrho = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\sum_1^{\omega} \mathrm{l}(z) + \tfrac{1}{2}\right)^2}{\sum_1^{\omega} z\,\mathrm{l}(z) + \tfrac{1}{6}}. \tag{37}$$

Dieser Weg knüpft an die biometrische Natur der Grössen $\mathrm{T}(o)$ und $\bar{x}$ an. Man kann natürlich ebenso gut das übliche wahrscheinlichkeitstheoretische Schema anwenden und $\mathrm{T}(o)$ als Mittelwert der Verteilung der Gestorbenen und σ^2 als ihre Streuung berechnen. Aus beiden Grössen ermittelt man den Momentenquotienten ϱ mit Hilfe von

$$v^2 = \frac{\sigma^2}{\mathrm{T}^2(o)}, \tag{38}$$

aus

$$\varrho = \frac{1}{1 + v^2}. \tag{37'}$$

Hierauf ermittelt man durch Interpolation aus Tabelle I die zugehörigen Werte von $\mathrm{l}(\xi)$, $\frac{\xi}{\mathrm{T}(o)}$ und $h\,\mathrm{T}(o)$ und erhält somit die beiden Konstanten ξ und h durch Multiplikation bzw. Division dieser Zahlen durch die beobachtete Lebenserwartung eines Neugeborenen.

Bei dieser Berechnung der drei Konstanten bleibt somit, wie dies die Methode der Momente verlangt, das mittlere Alter beim Tod und das mittlere Alter der Lebenden erhalten. Anstelle dieses wenig anschaulichen Wertes kann man neben dem mittleren Alter beim Tod auch das Normalalter ξ den Beobachtungen entnehmen. In diesem Fall wird $\mathrm{T}(o)$ aus (36) und ξ aus (15′) berechnet. Dann ist die Spalte 3 der Tabelle I beobachtet. Zu berechnen sind dann nurmehr zwei Konstanten. Der Wert der Absterbeordnung am Normalalter $\mathrm{l}(\xi)$ ergibt sich durch Interpolation aus Spalte 2, der Wert von h aus Spalte 4. Unter Umständen lassen sich auch andere Werte, wie zum Beispiel $\mathrm{T}(o)$ und $\mathrm{l}(\xi)$ auf diese Weise der Berechnung der Konstanten zugrunde legen. Doch stellen diese Verfahren natürlich keine Anwendung der Methode der Momente dar.

Es lohnt, ausser den bisher betrachteten biometrischen Funktionen noch den Verlauf der Lebenserwartung $\mathrm{E}(x)$ als Funktion des Alters kurz zu betrachten. Nach (13) wird

$$\mathrm{E}(x) = \xi - x + \frac{\mu(x)}{2h^2}, \tag{39}$$

daher

$$E'(x) = -1 + \frac{\mu'(x)}{2h^2}.$$

Aber allgemein gilt

$$E'(x) = -1 + \mu(x)\,E(x).$$

Daher ist

$$\mu'(x) = 2h^2\,\mu(x)\,E(x). \tag{40}$$

Die Sterbensintensität steigt also hier ständig mit dem Alter. Das gilt auch im Fall $\xi = o$, wo die Zahl der Gestorbenen ständig abnimmt. Aus dem ständigen Steigen der Sterbensintensität folgt, dass die Lebenserwartung stets abnimmt.[5])

Was die Lagenbeziehung der drei hier verwendeten Mittelwerte ξ, $T(o)$ und $\bar{x}$ betrifft, so gilt

$$\xi \leqq T(o) < 2\bar{x}. \tag{41}$$

Die erste dieser Ungleichungen folgt aus (18). Die zweite gilt für alle beliebigen Funktionen $l(x)$. Das Gleichheitszeichen gilt nur im Gauss'schen Fall, also etwa für $\varrho \geqq 0{,}91$. Das mittlere Alter beim Tod kann also ein vielfaches des häufigsten Alters beim Tod sein. Je grösser jedoch ϱ, desto mehr nähern sich die beiden Werte, welche im Gauss'schen Fall identisch sind.

Da die Sterbensintensität stets wächst, ist für unsere Funktion ferner[6])

$$2\bar{x} > T(o) > \bar{x} \tag{41'}$$

das mittlere Alter der Lebenden stets kleiner als das mittlere Alter beim Tod, was keineswegs a priori selbstverständlich.

Dagegen hängt die Beziehung von ξ und $\bar{x}$ vom Wert u ab. Denn ihre Differenz wird nach (19), (18) und (8)

$$\xi - \bar{x} = \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{1}{2h^2\xi + \vartheta(o)}\right),$$

und dies ist positiv, null oder negativ, je nachdem

$$2u^2 \gtreqless 1 - \vartheta(o)\,\xi.$$

Es fragt sich zunächst, ob die rechte Seite positiv ist, also ob

$$\vartheta(o)\,\xi = \frac{2u}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-u^2}}{1+\Phi(u)} < 1,$$

[5]) Der Beweis hierfür findet sich in: On life tables, Recueil Mathémathique XXXII, 4, Moscou 1925.

[6]) Vergl. Lebenserwartung und mittleres Alter der Lebenden. Biometrika, Vol. XVII, Nr. 1 u. 2, 1925.

d. h. ob

$$\frac{ue^{-u^2}}{1+\Phi(u)} < \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Um den maximalen Wert der linken Seite zu bilden genügt es, den Zähler zu betrachten. Er erreicht sein Maximum bei

$$2u^2 = 1.$$

Der zugehörige Wert des Zählers ist

$$\frac{1}{\sqrt{2e}} < \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Daher ist

$$0 < 1 - \vartheta(o)\,\xi \leqq 1.$$

Betrachtet man $h(\xi - x)$ als Funktion von u und berechnet das zugehörige ϱ, so erhält man durch Interpolation aus den Spalten (3) und (6) der Tabelle I, dass für das häufigste Alter beim Tod, bezogen auf das mittlere Alter der Lebenden gilt

$$\xi \lesseqgtr \bar{x} \text{ je nachdem } \varrho \lesseqgtr 0{,}70866.$$

Bis zu diesem ausgezeichneten Wert $\varrho = 0{,}70866$ nimmt die obige Ungleichung somit die Form an

$$\xi \leqq \bar{x} < \mathrm{T}(o) < 2\bar{x} \tag{41''}$$

während von da an

$$\bar{x} < \xi \leqq \mathrm{T}(o) < 2\bar{x} \tag{41'''}$$

wobei das Gleichheitszeichen für den Gauss'schen Fall, also etwa von $\varrho = 0{,}91$ an gilt. Endlich wird im optimalen Fall

$$\bar{x} = \frac{\mathrm{T}(o)}{2} < \xi = \mathrm{T}(o) = 2\bar{x}. \tag{41''''}$$

Die Beziehung des häufigsten Alters beim Tod zum mittleren Alter der Lebenden variiert somit je nach der Grösse des Momentenquotienten ϱ. Das häufigste Alter beim Tod wandert mit wachsendem ϱ von null bis angenähert zum doppelten mittleren Alter der Lebenden.

5. Die biometrischen Funktionen für alle Tafeln.

Die zu einer beobachteten Verteilung gehörigen theoretischen Werte ergeben sich nach Durchführung der oben gezeigten Berechnung der drei Konstanten aus den üblichen Tabellen der Gauss'schen Funktion. Demnach wäre es notwendig, die Grössen $\Phi(h(x-\xi))$ für jedes gewünschte Alter x und für jede Verteilung gesondert neu zu interpolieren. Doch lassen sich diese Rechnungen leicht ein für alle Mal durchführen. Denn in der Absterbeordnung und Sterbensdichte kommt das Alter x in der Verbindung $h\,(x-\xi)$ und nur in ihr vor. Man führt daher wieder die reduzierte, dimensionslose Grösse $t = h\,(x-\xi)$ ein. Während das Alter stets positiv, ist der Wert von t für alle Alter vor dem normalen negativ, für das Normalalter null und für alle späteren positiv. Da t für eine bestimmte Tafel nur für positive Alter sinnvoll ist, beträgt sein kleinster Wert $t_0 = -u$. Da ferner

$$\Phi(3) \approx 1,$$

kann das reduzierte Alter t nur innerhalb des Bereichs

$$-u \leqq t \leqq 3$$

variieren. Demnach ergibt sich für alle Alter vor dem normalen

$$\frac{\mathrm{l}(x)}{\mathrm{l}(\xi)} = 1 - \Phi(t),$$

wobei t negativ. Oder

$$\frac{\mathrm{l}(x)}{\mathrm{l}(\xi)} = 1 + \Phi(|t|). \tag{42}$$

Für alle Alter nach dem normalen wird

$$\frac{\mathrm{l}(x)}{\mathrm{l}(\xi)} = 1 - \Phi(t).$$

Zur Berechnung der Werte von $\mathrm{l}(x)$ für jede beliebige Tafel und für genügend viele Alter benötigt man also nur die Werte $\Phi(t)$ für positive t, wie sie in jeder Tabelle der Gauss'schen Funktion zu finden sind. Dies gilt natürlich auch für die beiden oben erwähnten Spezialfälle. In der Figur 1 ist der Verlauf von $\frac{\mathrm{l}(x)}{\mathrm{l}(\xi)}$ als Funktion von t aufgetragen. Multiplikation dieser, einer Gauss'schen Tabelle[7]) entnommenen Werte $\frac{\mathrm{l}(x)}{\mathrm{l}(\xi)}$ mit dem vorher berechneten Wert am normalen Alter $\mathrm{l}(\xi)$ gibt dann den Verlauf der Absterbeordnung als Funktion von t.

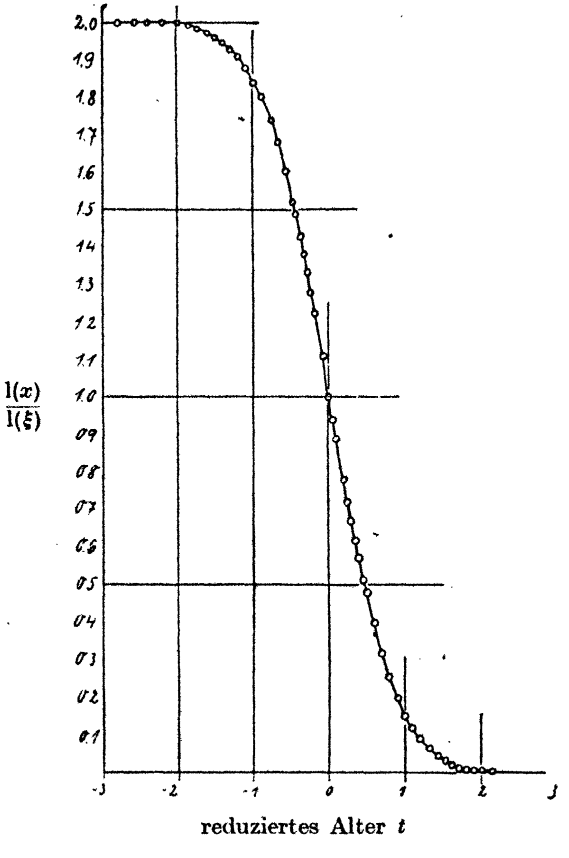
Für eine beobachtete Absterbeordnung ermittelt man die zu diesen theoretischen Werten gehörigen Alter aus

$$x = \xi + \frac{t}{h}. \tag{43}$$

Wir drehen also die übliche Fragestellung um und ermitteln nicht die zu festen Altern gehörigen Werte der Absterbeordnung, sondern die zu festen Werten der Absterbeordnung gehörigen Alter, welche für verschiedene Tafeln verschieden sein werden. Dabei wird es genügen, solche Werte von t zu nehmen, so dass man die Absterbeordnung für

[7]) Z. B. bei E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung. 4. Aufl. Leipzig 1924, p. 455.

etwa fünf- bzw. einjährige Altersstufen erhält. Die so ermittelten Alter werden allerdings im allgemeinen nicht ganzzahlig sein und daher auch nicht mit den beobachteten übereinstimmen. Für den üblichen graphischen Vergleich der beobachteten mit der theoretischen Absterbeordnung ist dies jedoch bedeutungslos.



Figur 1.

Absterbeordnung $\frac{l(x)}{l(\xi)}$ als Funktion des reduzierten Alters t.

Um die theoretische Verteilung der Gestorbenen mit der beobachteten zu vergleichen, bildet man die Differenzen $\Delta\, l(x)$ und ordnet sie jeweils den Mitten der betr. Intervalle zu. Dabei ist jedoch zu beachten, dass diese theoretischen Zahlen sich nicht nur auf andere Alter, sondern auch auf andere Altersintervalle als die beobachteten beziehen. Um letzteren Unterschied auszuschalten, wird man also die Zahlen mit dem Verhältnis des beobachteten zum gewählten theoretischen Altersintervall multiplizieren. Eine besondere Überlegung wird man nur für die Zahl der Gestorbenen in der Umgebung des Normalalters anzustellen haben. Nach den Tabellen des Gauss'schen Integrals ist

$$\Phi\,(0{,}01) = 0{,}0112833$$

Daher wird man dem Intervall $t = 0{,}005$ vor und nach dem Normalalter, also dem Altersintervall

$$\xi - \frac{0{,}005}{h} \leqq x \leqq \xi + \frac{0{,}005}{h},$$

eine Zahl von Gestorbenen $\mathrm{l}(\xi) \cdot 0{,}0112833$ zuordnen. Für das Altersintervall von der Länge 1, in dessen Mitte das Normalalter liegt, beträgt also die Zahl der Gestorbenen

$$1{,}12833\, h\, \mathrm{l}(\xi).$$

Zum Vergleich mit der Beobachtung wird man auch diese Zahl mit der Länge des beobachteten Altersintervalls multiplizieren. Damit sind die theoretischen Zahlen der Gestorbenen mit den beobachteten vergleichbar. Die Übereinstimmung von Theorie und Erfahrung wird selbstverständlich für die Absterbeordnung besser sein als für die Verteilung der Gestorbenen, weil die verschiedenen hier auftretenden Fehler sich dort bereits in gewissem Umfang kompensieren.

In genau derselben Weise wie die Absterbeordnung und die Verteilung der Gestorbenen lassen sich auch die theoretischen Werte der andern biometrischen Funktionen für alle Tafeln berechnen. So ergibt sich die Sterbensdichte aus

$$\frac{\vartheta(x)}{2h\,\mathrm{l}(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-t^2}, \tag{44}$$

und die Sterbensintensität aus

$$\frac{\mu(x)}{2h} = \frac{\vartheta(x)}{2h\,\mathrm{l}(\xi)} : \frac{\mathrm{l}(x)}{\mathrm{l}(\xi)}. \tag{45}$$

Der Nenner ist in Spalte 2 der folgenden Tabelle II., der Zähler in Spalte 3 aufgetragen. Aus ihrer Division ergibt sich in Spalte 4 die Sterbensintensität, ausgedrückt in Einheiten von $2h$. Aus den gleichen Daten erhält man die Lebenserwartung und verlebte Zeit. Da nämlich

$$h\,\mathrm{E}(x) = -t + \frac{\mu(x)}{2h}, \tag{46}$$

ergibt sich die Lebenserwartung in Spalte 5 aus der halben Sterbensintensität durch Subtraktion von t. Endlich erhält man die verlebte

Zeit in Spalte 6 durch Multiplikation der Lebenserwartung mit $\frac{\mathrm{l}(x)}{\mathrm{l}(\xi)}$. Eine Kontrolle dieser Rechnung erhält man aus (13). Danach ist

$$\frac{h\mathrm{T}(x)}{\mathrm{l}(\xi)} = -t\,\frac{\mathrm{l}(x)}{\mathrm{l}(\xi)} + \frac{\vartheta(x)}{2h\,\mathrm{l}(\xi)}.$$

Somit ergibt sich die verlebte Zeit einfach durch Addition der mit $-t$ multiplizierten zweiten Spalte zur dritten. Es genügt, diese Rechnung für die positiven Werte von t durchzuführen. Die zu den negativen reduzierten Altern gehörigen verlebten Zeiten ergeben sich aus den zu den positiven reduzierten Altern gehörigen durch Addition von $2t$.

Die zu einer bestimmten Tafel gehörigen numerischen Werte dieser Funktionen ergeben sich dann durch einfache Multiplikation bzs. Division der hier angeführten Werte mit den Grössen $\mathrm{l}(\xi)$ und h.

Tabelle II.

Biometrische Funktionen.

1	2	3	4	5	6
red. Alter	Absterbeordnung	Verteilung	Sterbensintensität	Lebenserwartung	Verlebte Zeit
t	$\frac{\mathrm{l}(x)}{\mathrm{l}(\xi)}$	$\frac{\vartheta(x)}{2h\,\mathrm{l}(\xi)}$	$\frac{\mu(x)}{2h}$	$h\,\mathrm{E}(x)$	$\frac{h\,\mathrm{T}(x)}{\mathrm{l}(\xi)}$
— 3	1,99998	0,00007	0,00003	3,00003	6,00000
— 2,5	1,99959	0,00109	0,00054	2,50054	5,00007
— 2	1,99532	0,01033	0,00518	2,00518	4,00098
— 1,5	1,96611	0,05946	0,03025	1,53025	3,00862
— 1	1,84270	0,20756	0,11264	1,11264	2,05026
— 0,5	1,52050	0,43939	0,28898	0,78898	1,19964
0	1,00000	0,56419	0,56419	0,56419	0,56419
0,5	0,47950	0,43939	0,91635	0,41635	0,19964
1	0,15730	0,20756	1,31952	0,31952	0,05026
1,5	0,03390	0,05946	1,75440	0,25440	0,00862
2	0,00468	0,01033	2,20910	0,20910	0,00098
2,5	0,00041	0,00109	2,67592	0,17592	0,00007
3	0,00002	0,00007	3,14932	0,14932	0,00000

Es lohnt zudem noch die extremen Werte dieser biometrischen Funktionen für die reduzierten Alter $|t| > 3$ zu untersuchen. Die Sterbensdichte geht nach (44) für grosse positive wie negative Werte des reduzierten Alters nach null. Die Absterbeordnung wird nach (42) für grosse positive Werte[8])

[8]) Vergl. R. von Mises, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Statistik und theoretische Physik, Leipzig u. Wien 1931, p. 45.

$$\frac{\mathrm{l}(x)}{\mathrm{l}(\xi)} = \frac{e^{-t^2}}{t\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2t^2}{1+2t^2}. \tag{42'}$$

Daher wird die Sterbensintensität

$$\frac{\mu(x)}{2h} = t + \frac{1}{2t}. \tag{45'}$$

Nach (46) wird daher die Lebenserwartung

$$h\,\mathrm{E}(x) = \frac{1}{2t}. \tag{46'}$$

Endlich wird die verlebte Zeit

$$\frac{h\,\mathrm{T}(x)}{\mathrm{l}(\xi)} = \frac{h\,\mathrm{E}(x)\,\mathrm{l}(x)}{\mathrm{l}(\xi)}$$

zu

$$\frac{h\,\mathrm{T}(x)}{\mathrm{l}(\xi)} = \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}\,(1+2t^2)}. \tag{47'}$$

Im negativen sind diese Funktionen nur bis zu $-t_0$ definiert. Falls dies gross ist, wird die Absterbeordnung

$$\frac{\mathrm{l}(x)}{\mathrm{l}(\xi)} = 2. \tag{42''}$$

Sie verläuft daher am Anfang parallel zur Altersachse. Daher geht die Sterbensintensität nach null. Die verlebte Zeit wird nach (13) zu

$$\frac{h\,\mathrm{T}(x)}{\mathrm{l}(\xi)} = -2t \tag{47''}$$

und die Lebenserwartung

$$h\,\mathrm{E}(x) = -t \tag{46''}$$

beginnt als eine unter 45^0 gegen die Altersachse geneigte Gerade.

Damit sind sämtliche üblichen biometrischen Funktionen für alle Tafeln, welche durch diese Formeln wiedergegeben werden können, ein für allemal berechnet. Die zugehörigen Alter ergeben sich aus der Transformation (43). Dann werden diese Berechnungen wie üblich den Beobachtungen graphisch gegenüber gestellt.

Neben diesem Vergleich der berechneten mit den beobachteten biometrischen Funktionen ist vor allem innerhalb der Lexis'schen Darstellung noch eine prinzipiell andere Methode möglich. Auf Grund der Formel (42) lassen sich nämlich die für bestimmte Alter x beobachteten Werte

$$\mp\left(1 - \frac{\mathrm{l}(x)}{\mathrm{l}(\xi)}\right) = \Phi(t) \quad \text{für } x \lessgtr \xi \tag{48}$$

als Gauss'sche Funktionen darstellen. Als beobachteter Wert von $\mathrm{l}(\xi)$ gilt dabei die nach (15''') berechnete Grösse. Zu diesen Werten von $\Phi(t)$

interpoliert man an Hand der Tabellen der Gauss'schen Funktionen das zugehörige t und erhält das beobachtete reduzierte Alter als Funktion des Alters. Man vergleicht dann diese Zuordnung mit der theoretischen, linearen (43) und hat somit einen neuen Vergleich von Theorie und Beobachtung. Er lässt sich natürlich, wie die ganze Lexis'sche Darstellung, nur von demjenigen Alter x_0 an durchführen, bei dem für die beobachteten Werte der Absterbeordnung gilt

$$\mathrm{l}(x_0) < 2\,\mathrm{l}(\xi). \tag{49}$$

6. Beispiele.

Wir behandeln zunächst eine Absterbeordnung aus der Bevölkerungsstatistik. Hierbei müssen wir uns auf das klassische Lexis'sche Schema beschränken. Man berechnet das Normalalter ξ aus (15'), die zugehörige Erlebenswahrscheinlichkeit $\mathrm{l}(\xi)$ durch lineare Interpolation aus (15''') und die dritte Konstante entsprechend dem Verfahren von Bortkiewicz aus (15). Für die Tafel U. S. A. m. 10 lauten die Beobachtungen[9])

Tabelle III.

Das beobachtete reduzierte Alter, U. S. A. m. 10.

x	$\Phi(t)$	t
62	0,92024	— 1,239
64	0,78065	— 0,868
66	0,63211	— 0,637
68	0,47666	— 0,451
70	0,31548	— 0,287
72	0,15057	— 0,134
74	0,01675	0,015
76	0,18390	0,164
78	0,34538	0,316
80	0,49362	0,470
82	0,62668	0,630
84	0,73858	0,794
86	0,82644	0,962
88	0,89136	1,135
90	0,93631	1,314
92	0,96519	1,492
94	0,98232	1,677
96	0,99169	1,866
98	0,99644	2,061
100	0,99860	2,260
102	0,99953	2,474
104	0,99987	2,710

[9]) United States Life Tables 1890, 1901, 1910, 1901/10. Washington Government Printing Office 1921.

E. J. Gumbel, Die Gauss'sche Verteilung der Gestorbenen. Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, 3. Folge Bd. 83. Jena 1933.

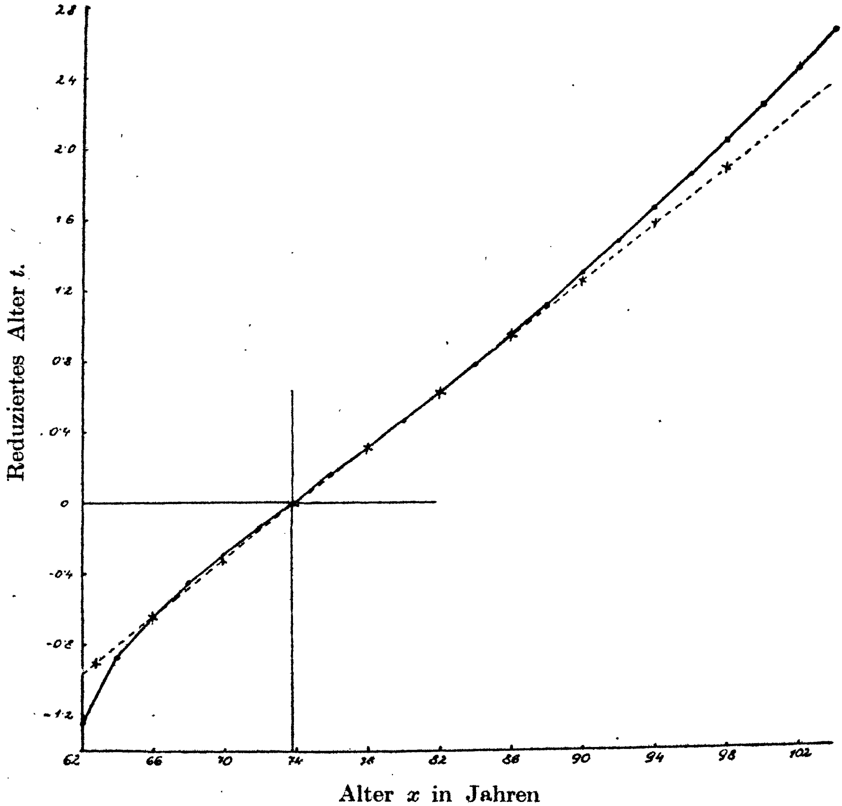
Dieser Tabelle liegen zugrunde folgende Werte:

$$\xi = 73{,}8,$$

$$l(\xi) = 0{,}23583,$$

$$\frac{1}{h} = 12{,}77961.$$

Die vorangehende Tabelle III gibt in der ersten Spalte das Alter x, in der zweiten die beobachteten Werte $\Phi(t)$ nach (48), in der dritten das zugehörige reduzierte Alter t interpoliert aus Czubers Tabellen der Gauss'schen Funktion, wobei zu beachten ist, dass das Vorzeichen von t



Figur 2.

Das reduzierte Alter, U. S. A. m 10. o——o Beobachtung,
×- - - -× Berechnung.

für $x > \xi$ positiv, und für $x < \xi$ negativ ist. Bei dieser Berechnung genügt es, wenn man sich auf drei Dezimalstellen beschränkt.

Die vorangehende Figur 2 stellt diesen beobachteten Verlauf des reduzierten Alters dem aus

$$t = \frac{1}{12{,}77961}(x - 73{,}8)$$

berechneten gegenüber. Wie man sieht, ist die Übereinstimmung durchaus befriedigend, was allerdings daran liegt, dass wir uns hier an das klassische Schema gehalten haben.

Es gilt nun zu zeigen, dass es Tafeln gibt, welche durch unsere Methode wiedergegeben werden können, d. h. dass die vorgenommene Ausdehnung der Lexis'schen Theorie auf alle Alter sinnvoll ist. Zunächst soll ein rein Gauss'scher Fall behandelt werden.

Aus einer Figur bei Plaut („Fabrikationskontrolle auf Grund statistischer Methoden. V. D. I. Verlag 1930 S. 10") entnehmen wir die folgenden Zahlen.

Tabelle IV.

Verteilung der Brenndauer für elektrische Lampen.

x	$90\Delta l(x)$
5,5	3
6,5	4
7,5	6
8,5	13
9,5	20
10,5	19
11,5	13
12,5	8
13,5	1
14,5	2
15,5	1

Die Zeiteinheit ist hier gleich 100 Stunden gewählt. Stellen wir das Ausbrennen einer Glühlampe in Analogie zum Sterben von Lebewesen, so können wir diese Tabelle als eine Verteilung von „Gestorbenen" auffassen, die nach einem bestimmten Zeitpunkt noch brennenden Glühlampen als „Überlebende" dieses „Alters". Nach den üblichen Methoden berechnet man den Inhalt

$$T(o) = 9{,}94444$$

und den mittleren Fehler

$$\sigma = 1{,}96701.$$

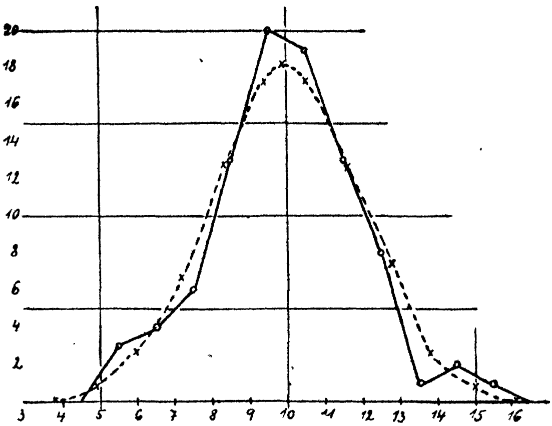
Hieraus erhält man die Schwankung

$$v = 0{,}1978$$

und für den Momentenquotienten den hohen Wert

$$\varrho = 0{,}96235.$$

Die Bezeichnung dieses Momentenquotienten als Mass der Güte ist gerade vom Standpunkt der Glühlampenfabrikation aus durchaus berechtigt. Denn eine Serie wird umso besser sein, je grösser die Lebenserwartung und umso schlechter, je grösser die Streuung. Daher ist der Quotient beider Grössen $v = \frac{\sigma}{T(o)}$ ein reziprokes und ϱ ein direktes Kriterium der Güte. Vor den bisher in der Glühlampenfabrikation üblichen Streuungsmaszen[10]) hat es den Vorzug der Systematik.



Figur 3.
Verteilung der Brenndauer ○——○ Beobachtung.
×-----× Berechnung,

Da das „mittlere Alter beim Tod" ganz nahe an dem beobachteten normalen Alter liegt (vgl. Figur 3) ist das Gauss'sche Kriterium erfüllt. Daher setzt man an

$$\xi = T(o) = 9{,}94444,$$

$$l(\xi) = \tfrac{1}{2},$$

$$\frac{1}{h} = \sigma\sqrt{2} = 2{,}78177.$$

Die zu den reduzierten Altern t gehörigen „Überlebenden" ergeben sich aus den entsprechenden Werten des Gauss'schen Integrals nach Multi-

10) Vergl. R. Becker, H. Plaut u. I. Runge, Anwendungen der mathematischen Statistik auf Probleme der Massenfabrikation. Berlin 1927.

plikation mit 90. Sie sind zusammen mit den entsprechenden Altern $x = 9{,}94444 + t \,.\, 2{,}78177$ in der folgenden Tabelle aufgeführt. Als Altersintervall ist $\Delta t = 0{,}4$, also $\Delta x = 1{,}11271$ gewählt. Die letzte Spalte enthält die Differenzen, also die Zahl der ausgebrannten Lampen, umgerechnet auf Intervalle von der Länge 1, also auf 100 Stunden. Die Höhe der Kurve am Normalalter beträgt

$$\frac{1{,}12833 \,.\, 45}{2{,}78177} = 18{,}25$$

Tabelle V.

Theoretische „Sterbetafel“ der Glühlampen.

reduziertes Alter t	Alter x	„Absterbeordnung“ $90\,\mathrm{l}(x)$	„Gestorbene“ $\frac{90\Delta \mathrm{l}(x)}{\Delta x}$
— 2,4	3,27	89,96895	0,16
— 2,0	4,38	89,78940	0,77
— 1,6	5,49	88,93575	2,67
— 1,2	6,61	85,96395	6,80
— 0,8	7,71	78,39450	12,69
— 0,4	8,83	64,27755	17,32
0	9,94	45,00000	17,32
0,4	11,06	25,72245	12,69
0,8	12,17	11,60550	6,80
1,2	13,28	4,03605	2,67
1,6	14,40	1,06425	0,77
2,0	15,51	0,21060	

In der Figur (4) ist die aus der Tabelle IV durch Addition von unten berechnete, beobachtete Absterbeordnung mit dieser theoretischen verglichen. Die Übereinstimmung ist ausgezeichnet. Der hohe Wert von ϱ bewirkt, dass die theoretische Absterbeordnung wie die beobachtete zum Beginn beinahe parallel der x-Achse verläuft.

Als letztes Beispiel soll eine Sterbetafel aus dem Tierreich behandelt werden.

R. Pearl gibt in seinem Buch „The Rate of Living“ London, 1928, S. 155, die Zahl der nach je drei Beobachtungstagen gestorbenen Exemplare von Drosophila pure vestigials. Fasst man seine Altersangaben als Enden der betr. Intervalle auf und ordnet die Gestorbenen jeweils der Mitte zu, so erhält man für die beiden Geschlechter zusammen die folgende Verteilung für 980 Fliegen:

Tabelle VI.

Drosophila pure vestigials m. u. w.

x	$980\,\Delta \mathrm{l}(x)$
0,5	12
2,5	91
5,5	124
8,5	143
11,5	136
14,5	114
17,5	80
20,5	86
23,5	49
26,5	40
29,5	34
32,5	20
35,5	17
38,5	16
41,5	5
44,5	6
47,5	4
50,5	2
53,5	1

Durch Summation von unten ergibt sich hieraus die in Fig. (5) aufgetragene beobachtete Absterbeordnung. Die Lebenserwartung einer ausgeschlüpften Fliege erhält man unter Berücksichtigung der verschiedenen Längen der Altersintervalle auf Grund der Formel[11])

$$\mathrm{T}(o) = \frac{1 + \mathrm{l}(1)}{2} + 3\left(\sum_{r=0} \mathrm{l}(1 + 3r) - \frac{\mathrm{l}(1)}{2}\right)$$

$$= 3\sum_{r=0} \mathrm{l}(1 + 3r) - \mathrm{l}(1) + \tfrac{1}{2},$$

als

$$\mathrm{T}(o) = 14{,}76919.$$

Diese Grösse ist wesentlich verschieden vom beobachteten Normalalter, das nach Figur 5 etwa $\xi = 8{,}5$ beträgt.

Das mittlere Alter der Lebenden wird nach[12])

$$\bar{x}\,\mathrm{T}(o) = \frac{1}{6} + \frac{\mathrm{l}(1)}{3} + 3\sum_{r=0} (1 + 3r)\,\mathrm{l}(1 + 3r)$$

zu

$$\bar{x} = 10{,}65725.$$

Daher wird

$$\varrho = 0{,}69292.$$

---

[11]) Maß der Güte l. c. Formel (320).
[12]) Maß der Güte l. c. Formel (521).

Durch Interpolation aus Tabelle I erhält man als Wert der Absterbeordnung am Normalalter

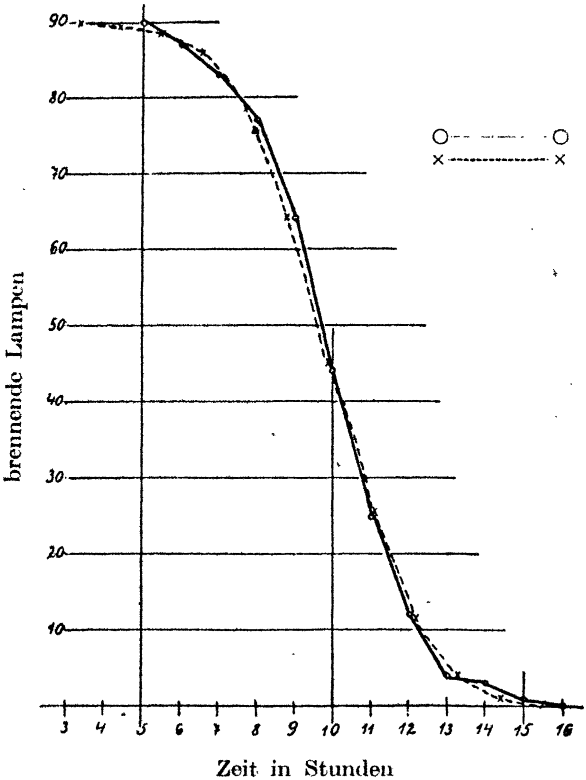
$$980 \, . \, l(\xi) = 665{,}75320$$

und für das theoretische Normalalter

$$\xi = 9{,}00049.$$

Endlich wird die Konstante

$$h = 0{,}05263.$$



Figur 4.
„Absterbeordnung" der Glühlampen.

Daher ergibt sich das Alter aus der Transformation

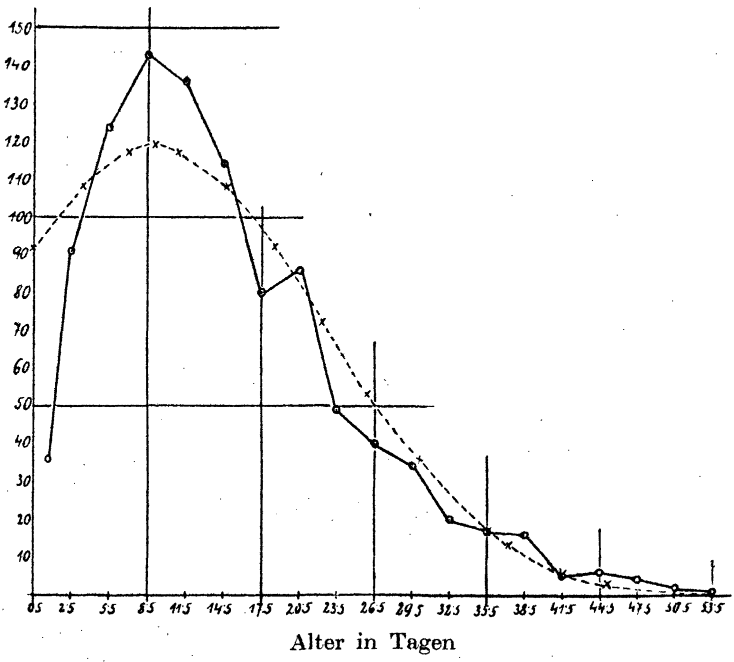
$$x = 9{,}00049 + 19{,}00039t.$$

Wählt man als Intervall $\dfrac{0{,}2}{h} = 3{,}80008$ Tage, so erhält man die folgende Absterbeordnung:

Tabelle VI.

Theoretische Absterbeordnung für Drosophila.

t	x	$980\ l(x)$	$\frac{\Delta l(x)}{\Delta x} \cdot 3 \cdot 980$
— 0,4	1,4	950,96	108,1
— 0,2	5,2	814,02	117,0
0	9,0	665,75	117,0
0,2	12,8	517,50	108,1
0,4	16,6	380,55	92,2
0,6	20,4	263,70	72,7
0,8	24,2	171,70	52,9
1,0	28,0	104,72	35,5
1,2	31,8	59,71	22,1
1,4	35,6	31,77	12,7
1,6	39,4	15,75	6,7
1,8	43,2	7,26	3,3
2,0	47,0	3,12	



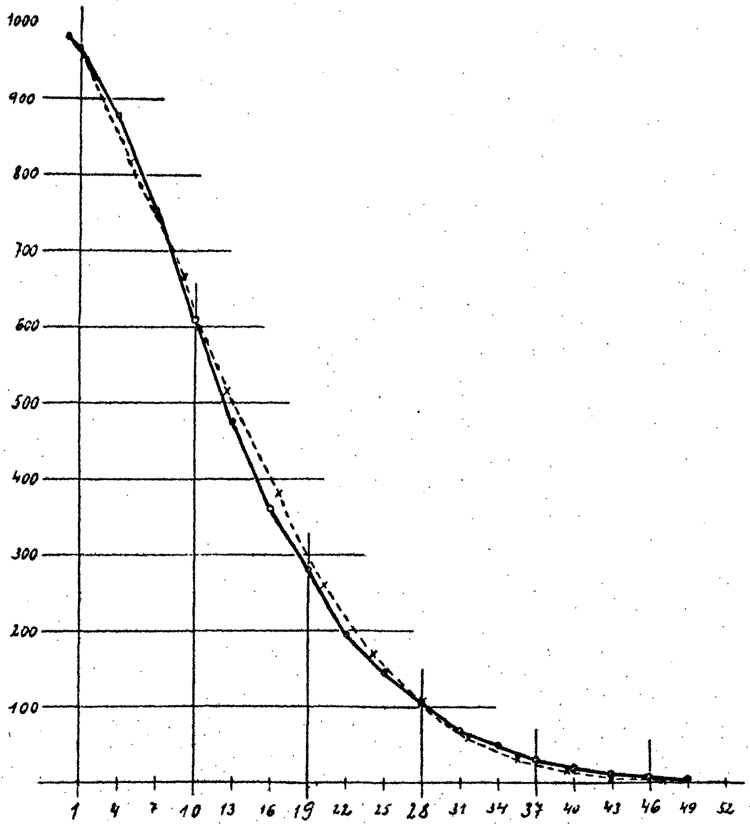
Figur 5.

Verteilung der Gestorbenen. Drosophila. ○———○ Beobachtung,
×-------× Berechnung.

In der vierten Spalte des Tabelle VI sind die Gestorbenen auf Intervalle von 3 Tagen umgerechnet. Das Maximum beträgt

$$1{,}12833 \,.\, 0{,}05263 \,.\, 665{,}7532 \,.\, 3 = 118{,}6.$$

Die Figur (5) stellt diese theoretischen Werte der beobachteten Verteilung der Gestorbenen gegenüber. Die Übereinstimmung ist bis auf den Exzess in der Umgebung des Normalalters befriedigend. Der Verlauf der Absterbeordnung in Fig. (6) zeigt eine sehr schöne Übereinstimmung mit der Beobachtung. Zum Vergleich sei erwähnt, dass Pearl die Absterbeordnung mit Hilfe einer durch Zusatzglieder modifizierten Interpolationsformel vom Gompertz-Makeham'schen Typ mit vier Konstanten



Figur 6.

Absterbeordnung für Drosophila. ○——○ Beobachtung,
×- - - -× Berechnung.

$$\mathfrak{l}(x) = \epsilon^{x e^{ax}(b + cx + dx^2)}$$

wiedergibt. Diese Formel hat den Nachteil, dass man die Verteilung durch die numerischen Werte der Konstanten nicht charakterisieren kann, und dass die Berechnung der Konstanten, der Absterbeordnung und erst recht der Gestorbenen und der Lebenserwartung sehr langwierig ist, ohne dass die Güte der Wiedergabe diese Arbeit lohnt.

7. Folgerungen für das Grenzalter und die Darstellung von Verteilungen.

Wir haben somit gezeigt, dass die von uns vorgenommene Erweiterung der Lexis'schen Formeln geeignet ist, gewisse Sterbetafeln in befriedigender Weise wiederzugeben. Insbesondere erlauben sie eine Charakterisierung der Beobachtungen durch Angabe der Konstanten, da diese eine sinnvolle Bedeutung besitzen, welche Eigenschaft bekanntlich nicht allen in der Sterblichkeitstheorie verwendeten Formeln zukommt.

Die hier zugrunde gelegte Auffassung der Absterbeordnung als Verteilung der Gestorbenen erlaubt eine Lösung der Frage nach der Existenz und dem Wert des Grenzalters ω, für welches bisher nur eine Reihe sehr künstlicher Vorschläge gemacht wurden. Denn diese Frage ist identisch mit der nach dem grössten Wert, welcher bei einer unbegrenzten Verteilung für eine grosse Zahl von Beobachtungen zu erwarten ist. Definiert man dementsprechend das Grenzalter als dasjenige Alter, von dem zu erwarten ist, dass aus D Beobachtungen, welche der Sterbetafel zu grunde liegen, gerade einer es überlebt, so lautet die analytisch ausserordentlich einfache Lösung[13])

$$D\,\mathfrak{l}(\omega) = 1,$$

wobei nur vorausgesetzt ist, dass die Sterbetafel gewisse Bedingungen erfüllt, welche empirisch stets zutreffen.

Für die hier verwendete Gauss'sche Verteilung ist die Berechnung des Grenzalters besonders einfach. Sie knüpft unmittelbar an die hier behandelten Werte des Normalalters, seiner Erlebenswahrscheinlichkeit und seiner Lebenserwartung an. Der Darstellung dieses Verfahrens und der Berechnung des zugehörigen mittleren Fehlers werden wir einen zweiten Artikel widmen.

Abstrahiert man von der Entstehung dieser Formeln aus der Sterblichkeitstheorie, so haben wir in ihnen eine Möglichkeit der Darstellung von einseitig begrenzten Verteilungen, welche nur für positive Werte der Variablen definiert sind, sich im Unendlichen asymptotisch

---

[13]) E. J. Gumbel, L'âge limite. Bulletin de la Société mathémat. de France, Tome 60, fasc. 3/4 Paris, 1932.

La plus petite valeur parmi les plus grandes. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Tome 196, p. 1857, Paris 1933.

der Null nähern und sowohl beinahe symmetrisch wie schief sein können[14]). Die dabei gemachten Annahmen enthalten keine stärkeren Abstraktionen als sie etwa bei der Aufstellung der Pearson'schen Verteilungen gemacht worden sind. Die Formeln bieten den Vorteil, dass zur numerischen Berechnung die üblichen Gauss'schen Tabellen genügen und dass sich die Verteilungen durch Angabe der Konstanten charakterisieren lassen. Denn die beiden auftretenden Konstanten sind einfach der häufigste Wert und der von ihm aus berechnete durchschnittliche Fehler. Diese Formeln lassen sich leicht auf den Fall erweitern, wo die Variable nicht bei null, sondern bei einem bestimmten positiven oder negativen Wert beginnt.

Die Methode beruht darauf, dass der Inhalt eines Teils der Gauss'schen Verteilung durch Einführung eines multiplikativen Faktors gleich eins gesetzt wird. Wir schneiden uns also ein Stück dieser Verteilung heraus und bestimmen die Grösse dieses Stückes nach dem Charakter der Beobachtungen. Diese Methode gibt nur dann von der Gauss'schen Verteilung verschiedene Werte, wenn das weggelassene Stück nicht klein ist im Vergleich zum verwendeten, was an Hand der graphischen Darstellung verifiziert und numerisch nachgeprüft werden kann. Ein anderes Kriterium dieses Unterschiedes ist die Abweichung des Normalwertes $l(\xi)$ vom Gauss'schen Wert 0,5. Ein drittes Kriterium stellt das Auseinandergehen des arithmetischen Mittels und häufigsten Wertes dar.

Ergibt sich so, dass es sich um keine Gauss'sche Verteilung handelt, so lässt sich die Verteilung durch die hier angeführten spezifischen Formeln wiedergeben. Wir haben dabei verlangt, dass das Maximum innerhalb des sinnvollen Bereichs der Verteilung, also positiver Werte der Variablen liegt. Wir sind aber auch in der Lage Verteilungen darzustellen, welche ihr Maximum beim Nullpunkt besitzen. Der Wert $\varrho = \frac{2}{\pi}$ gibt ein Kriterium für die Anwendbarkeit dieses Verfahrens. Falls das Maß der Güte kleiner ist, bedeutet dies, dass die gegebene Verteilung sich nicht auf diese Weise wiedergeben lässt, bzw. dass man annehmen müsste, dass ein Maximum im negativen Bereich der Variablen liegt. Dieses Kriterium ist notwendig aber keineswegs hinreichend. Es kann sehr wohl das Maß der Güte diesen oder einen grösseren Wert aufweisen, ohne dass es zulässig ist, eine Verteilung durch diese Formeln wiederzugeben, z. B. weil sie zwei durchaus selbständige Maxima aufweist.

---

[14]) Représentation des répartitions unimodales, unilateralement limitées. Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris. 196, Nr. 18, p. 1268, Paris 1933.