Antonín Zelenka

Durchschnittliche Prämienreserve in der Sozialversicherung. II

Aktuárské vědy, Vol. 3 (1932), No. 2, 88–93

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144571

n	$100i_B$	$100i_L$	$100i_{BL}$	$100i$
	2,00317	1,99564	1,99941	2
100	3,01685	2,98702	3,00194	3
	4,05577	3,98108	4,01843	4
	2,00135	1,99825	1,99980	2
	3,00925	2,99200	3,00062	3
75	4,02370	3,98357	4,00363	4
	5,05991	4,97775	5,01883	5
	2,00042	1,99925	1,99984	2
	3,00229	2,99695	2,99962	3
50	4,00751	3,99208	3,99979	4
	5,01883	4,98553	5,00218	5
	6,03972	5,97829	6,00901	6

Il est évident de ce tableau, avec quelle simple manière on peut obtenir un résultat beaucoup plus précis.

Durchschnittliche Prämienreserve in der Sozialversicherung.

Von Dr. *A. Zelenka.*

I.

In der letzten Nummer dieser Zeitschrift befasste ich mich mit der Frage der Bestimmung einer vom Alter des Versicherten unabhängigen Prämienreserve und leitete für dieselbe eine Formel ab, die eine Konsequenz der Durchschnittsprämie ist. In meinem Artikel behauptete ich, daß diese Durchschnittsprämienreserven als sog. „Überweisungsbetrag" unter der Voraussetzung verwendbar ist, daß die Übertritte der Versicherten hinsichtlich Alter und erworbener Beitragszeit im Versichertenkollektiv gleichmäßig verteilt sind. Hier will ich den Beweis dieser Behauptung geben.

Der Überweisungsbetrag soll, wie ich im vorangegangenen Artikel anführte, so berechnet werden, daß durch seine Ausgabe die „treuen Versicherten", das sind die in der Versicherung Verbleibenden, nicht geschädigt werden.

Bezeichnen wir mit $V(x, n)$ den Wert des Überweisungsbetrages, welchen der Versicherungsträger beim Austritt des Versicherten flüßig machen soll, der in die Versicherung im Alter x eintrat und in ihr n Jahre verbrachte. Wegen Allgemeinheit können wir vorderhand voraussetzen, daß dieser Überweisungsbetrag nicht nur von der Beitragszeit n, sondern auch vom Alter x abhängt. Der durchschnittliche Versicherungsbeitrag ist durch die Relation (I) gegeben:

$$\begin{aligned}\sum_{x=x_0}^{\omega} M(x)\, \mathrm{a}_x^{ai} + \sum_{x=x_0}^{\omega} \sum_{t=0}^{\infty} N(x,t)\, v^{t+1/2}\mathrm{a}_x^{ai} = \\ = p \cdot \left[\sum_{x=x_0}^{\omega} M(x)\, \mathrm{a}_x^{aa} + \sum_{x=x_0}^{\omega}\sum_{t=0}^{\infty} N(x,t)\, v^{t+1/2}\mathrm{a}_x^{aa}\right]\end{aligned} \tag{I}$$

Bezeichnen wir die Anzahl der Personen, welche in die Versicherung im t — ten Jahre im Alter x eintraten und nach weiteren n Jahren übertreten mit $Q(x, t, n)$. Machen wir ferner die Voraussetzung, daß alle Austritte am Ende des Jahres erfolgen. Diese Voraussetzung beschränkt nur scheinbar die Allgemeinheit, denn, wenn wir die Summenformeln durch Integralausdrücke ersetzen, dann ist diese Voraussetzung nicht notwendig und das Resultat ändert sich keineswegs. Für jeden von ihnen soll der Betrag $V(x, n)$ ausgegeben werden. Wir fordern, daß damit das Gleichgewicht in der Versicherung nicht gestört wird, d. h. daß es nicht zur Schädigung der in der Versicherung verbliebenen Versicherten führen wird, daß aber auch andererseits den treuen Versicherten aus den Übertritten nicht ungerechte Vorteile erwachsen. Man muß daher $V(x, n)$ so bestimmen, daß folgende Relation gilt

$$\begin{aligned}\sum_{x=x_0}^{\omega} M(x)\, \mathrm{a}_x^{ai} - \sum_{n=1}^{\nu}\sum_{x=x_0}^{\omega} Q(x,0,n)\, v^n \left[\mathrm{a}_{x+n}^{ai} - V(x,n)\right] + \\ + \sum_{x=x_0}^{\omega}\sum_{t=0}^{\infty} N(x,t)\, \mathrm{a}_x^{ai} v^{t+1/2} - \sum_{n=1}^{\nu}\sum_{x=x_0}^{\omega}\sum_{t=0}^{\infty} Q(x,t,n)\, v^{t+n+1/2}\left[\mathrm{a}_{x+n}^{ai} - V(x,n)\right] = \\ = p\left[\sum_{x=x_0}^{\omega} M(x)\, \mathrm{a}_x^{aa} - \sum_{n=1}^{\nu}\sum_{x=x_0}^{\omega} Q(x,0,n)\, v^n\, \mathrm{a}_{x+n}^{aa} + \right. \\ \left. + \sum_{x=x_0}^{\omega}\sum_{t=0}^{\infty} N(x,t)\, v^{t+1/2}\mathrm{a}_x^{aa} - \sum_{n=1}^{\nu}\sum_{x=x_0}^{\omega}\sum_{t=0}^{\infty} Q(x,t,n)\, v^{t+n+1/2}\, \mathrm{a}_{x+n}^{aa}\right].\end{aligned} \tag{II}$$

Das 2. und 4. Glied der linken Seite drückt den Umstand aus, daß beim Übertritt einerseits die Ansprüche des Versicherten erlöschen, d. h. es wird der Wert a_{x+n}^{ai}, frei, daß aber auf der anderen Seite die Pflicht erwächst den Überweisungsbetrag herauszugeben, das ist den Wert $V(x, n)$. Das 2. und 4. Glied der rechten Seite repräsentiert dann den Wert der zukünftigen Versicherungsbeiträge, welche sonst die übertretenden Versicherten zahlen müßten.

Aus den Relationen I und II geht hervor, daß $V(x, n)$ folgende Bedingung erfüllen muß

$$\sum_{n=1}^{\nu} \sum_{x=x_0}^{\omega} Q(x, 0, n)\, V(x, n)\, v^n + \sum_{n=1}^{\nu} \sum_{x=x_0}^{\omega} \sum_{t=0}^{\infty} Q(x, t, n)\, V(x, n)\, v^{t+n+1/2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\nu} \sum_{x=x_0}^{\omega} Q(x, 0, n)\, \mathrm{a}_{x+n}^{ai}\, v^n + \sum_{n=1}^{\nu} \sum_{x=x_0}^{\omega} \sum_{t=0}^{\infty} Q(x, t, n)\, \mathrm{a}_{x+n}^{ai}\, v^{t+n+1/2} - \qquad \text{(III)}$$

$$- p\left[\sum_{n=1}^{\nu} \sum_{x=x_0}^{\omega} Q(x, 0, n)\, v^n\, \mathrm{a}_{x+n}^{aa} + \sum_{n=1}^{\nu} \sum_{x=x_0}^{\omega} \sum_{t=0}^{\infty} Q(x, t, n)\, v^{n+t+1/2}\, \mathrm{a}_{x+n}^{aa}\right].$$

Wir setzen jetzt voraus, daß die Austritte im Versichertenkollektiv gleichmäßig verteilt sind, d. h. daß

$$Q(x, 0, n) = \vartheta M(x, n),$$
$$Q(x, t, n) = \vartheta N(x, t, n),$$

wobei ϑ zwischen den Grenzen (0,1) liegt und in der Praxis ein genügend kleiner Betrag ist. So liegt er in unserer Sozialversicherung annähernd bei 0,03.

Der Ausdruck III nimmt dann die Form an

$$\sum_{n=1}^{\nu} \sum_{x=x_0}^{\omega} M(x, n)\, V(x, n)\, v^n + \sum_{n=1}^{\nu} \sum_{x=x_0}^{\omega} \sum_{t=0}^{\infty} N(x, t, n)\, V(x, n)\, v^{t+n+1/2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\nu} \sum_{x=x_0}^{\omega} M(x, n)\, \mathrm{a}_{x+n}^{ai}\, v^n + \sum_{n=1}^{\nu} \sum_{x=x_0}^{\omega} \sum_{t=0}^{\infty} N(x, t, n)\, \mathrm{a}_{x+n}^{ai}\, v^{t+n+1/2} - \qquad \text{(IV)}$$

$$- p\left[\sum_{n=1}^{\nu} \sum_{x=x_0}^{\omega} M(x, n)\, \mathrm{a}_{x+n}^{aa}\, v^n + \sum_{n=1}^{\nu} \sum_{x=x_0}^{\omega} \sum_{t=0}^{\infty} N(x, t, n)\, \mathrm{a}_{x+n}^{aa}\, v^{t+n+1/2}\right].$$

Es ist aber leicht zu beweisen, daß die durchschnittliche Reserve V_n, wie ich sie früher abgeleitet habe, diese Bedingung IV erfüllt. Denn V_n ist gegeben durch die Beziehung

$$V_n\left[\sum_{x=x_0}^{\omega} M(x, n) + \sum_{x=x_0}^{\omega} \sum_{t=0}^{\infty} N(x, t, n)\, v^{t+1/2}\right] =$$

$$= \sum_{x=x_0}^{\omega} M(x, n)\, \mathrm{a}_{x+n}^{ai} + \sum_{x=x_0}^{\omega} \sum_{t=0}^{\infty} N(x, t, n)\, v^{t+1/2}\, \mathrm{a}_{x+n}^{aa} - \qquad \text{(V)}$$

$$- p\left[\sum_{x=x_0}^{\omega} M(x, n)\, \mathrm{a}_{x+n}^{aa} + \sum_{x=x_0}^{\omega} \sum_{t=0}^{\infty} N(x, t, n)\, \mathrm{a}_{x+n}^{aa}\, v^{t+1/2}\right]$$

Multiplizieren wir die Gleichung (V) mit dem Ausdruck v^n und addieren wir nach n von 1 bis ν, erhalten wir die Relation IV, womit der geforderte Beweis erbracht ist.

Dieser Umstand berechtigt dazu, die von mir definierte Durchschnittsprämienreserve als „Überweisungsbetrag" zu erklären, denn sie erfüllt die dem Überweisungsbetrag auferlegte Grundbedingung, daß nähmlich durch die Herausgabe eines solchen Überweisungsbetrages die treuen Versicherten nicht geschädigt werden, d. h. daß das finanziele Gleichgewicht des Versicherungsträgers durch die Überweisung nicht gestört wird. Auf den zweiten Vorteil der durchschnittlichen Reserve habe ich schon früher hingewiesen, nähmlich auf den Umstand, daß sie vom Alter unabhängig ist. Diese Forderung ist bloß eine logische Konsequenz der durchschnittlichen Prämie; zahlt der Versicherte eine vom Alter unabhängige Durchschnittsprämie, dann ist sicherlich die Forderung, daß beim Übertritt desselben auch ein vom Alter unabhängiger Überweisungsbetrag ausgegeben wird, vollkommen berechtigt. Die Bedeutung für die Praxis liegt ohne Zweifel dort, wo es sich um eine größere Anzahl von Übertritten handelt und wo es aus administrativen Gründen umbedingt notwendig erscheint die tatsächlichen Berechnungen auf das kleinstmöglichste Ausmaß zu beschrenken.

Mit der Frage der Bestimmung des „Rückkaufswertes" in der Versicherung, welche auf dem Prinzip der Deckung der Durchschnittsprämien aufgebaut ist, haben sich einige Mathematiker befaßt. Es war dies vor allem Schärtlin in seinem Artikel „Die Abfindung für austretende Mitglieder bei Kassen mit Durchschnittsprämien", veröffentlicht im Jahre 1911 in den Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker; weiters Küttner in seiner Abhandlung „Die. Rückkaufs — und Abfindungswerte bei vorzeitiger Lösung des Versicherungsverhältnisses", welche in derselben Zeitschrift im Jahre 1912 enthalten ist. Ein Beitrag zu dieser Frage ist weiters der Artikel Goldzihers aus dem Jahre 1921 in „Skandinavisk Aktuarietidskrift" unter dem Titel „Die Berechnung des Abfindungswertes bei Pensionskassen mit Durchschnittsprämien". Der Schärtlinsche „Rückkaufswert" erfüllt nicht nur die Relation IV, sondern auch letzten Endes die Relation III ohne Rücksicht darauf, wie die Zahlen $Q(x, t, n)$ beschaffen sind; leider führt er aber zu Werten, die für die Praxis vollkommen unannehmbar und nicht selten auch negativ sind. Die Küttner'schen „Rückkaufswerte" erfüllen nicht die Bedingungen III und IV und auch nicht einmal in der Modifikation, welche zur Berechnung der Überweisungsbeträge nach der Regierungsverordnung Nro 195/28 S. d. G. u. V. angewandt wurde. Ich betrachte daher die von mir abgeleiteten durchschnittlichen Prämienreserven als die bisher beste Lösung des Problems „der Überweisungsbeträge".

II.

Mein erster Artikel hat eine Kritik vom Herrn Dr. Fuhrich hervorgerufen, die in den Versicherungswissenschaftlichen Mitteilungen des Deutschen Vereines für Versicherungswesen in der Tschechoslowakischen

Republik erschienen ist. Diese Kritik enthält aber Behauptungen und Argumente, die unrichtig sind, sodaß ich gezwungen bin, mich damit näher zu beschäftigen.

1. Dr. Fuhrich erklärt: „Wenn nun aber der Autor behauptet, daß diese Methode einen prinzipiellen oder praktischen Vorteil gegenüber etwa der Küttnerschen darstellt, so kann dem nicht zugestimmt werden. Vor allem ist nicht einzusehen, inwiefern die Voraussetzungen der Küttnerschen Methode willkürlicher sein sollen als die vom Autor gemachten, wo doch in beiden Fällen mit der Durchschnittsprämie und dem Einfluß der künftigen Beitritte operiert wird und die Verschiedenheit lediglich formaler Natur ist." Im ersten Abschnitt habe ich dagegen bewiesen und gezeigt, worin die sowohl theoretischen als auch praktischen Vorteile der durchschnittlichen Prämienreserve bestehen. Vor allem ist es die Tatsache, daß die durchschnittliche Prämienreserve unter der gegebenen Voraussetzung — daß nämlich die Austritte gleichmäßig im Kolektive der Versicherten vorteilt sind — die Eigenschaft hat, daß sie den Überweisungsbetrag darstellt, d. i. daß Ihre Herausgabe das Gleichgewicht der Versicherung keineswegs stören kann.

2. Dr. Fuhrich behauptet weiter: „Es ist ohne weiters klar, daß die Verwendung dieser Durchschnittsreserven als Überweisungsbeträge theoretisch nur in sehr engen Grenzen zulässig ist, solange nämlich die Zahl der Übertritte so gering ist, daß die Abfertigung der erlöschenden Ansprüche durch die Überweisungsbeträge keinen Einfluß auf die Höhe der Durchschnittsprämie hat." Aber diese Behauptung zeigt an die Oberflächtigkeit der Fuhrich'schen Kritik. Die Gleichung III gilt nicht nur für kleine Werte von $Q(x, t, n)$, sondern für alle $Q(x, t, n)$ für ϑ in $(0,1)$: Dieses Argument des H. Dr. Fuhrich ist daher vollkommen unrichtig.

3. Ferner schreibt Dr. Fuhrich: „Im Hinblick auf die Praxis muß betont werden, daß die hier erwähnten Größen rein fiktiven Charakters sind und ihrer Verwendung als Überweisungsbeträge, d. h. als Äquivalent für gesetzlich erworbene Ansprüche, die allerschwersten Bedenken gegenüberstehen". In meinem ersten Artikel habe ich aber ausdrücklich darauf hingewiesen, daß der Überweisungsbetrag nicht bloß als Äquivalent der gesetzlich erworbenen Ansprüche betrachtet werden kann, sondern daß er andere Bedingungen erfüllen muß, und daß er deswegen anders berechnet werden muß, was gerade die eigentlichen Schwierigkeiten zur Folge hat. Ohne Gegenargumente anzugeben, setzt Herr Dr. Fuhrich wieder die Gleichung „Überweisungsbetrag = Äquivalent für gesetzlich erworbene Ansprüche".

4. Nur in einer Sache stimme ich Herrn Dr. Fuhrich zu und zwar, daß eine bessere Lösung der Ansprüche der übertretenden Versicherten eine Lösung ohne Benützung der Überweisungsbeträge möglich ist. Aber Herr Dr. Fuhrich ist sich sicher dessen bewußt, daß er damit gar nichts neues gesagt hat. Es genügt dass er einige von früheren Heften

dieser Zeitschrift durchblättert, wo ich einigemal meine Meinung über diese Frage erklärt habe.

Zuletzt muß ich erklären, daß Herr Dr. Fuhrich in seiner Kritik schwache Argumente durch starke Worte zu unterstützen versucht hat. Seine Argumente waren leicht zu widerlegen; in starken Worten möge er Priorität und Superiorität behalten.

LITERATURA.

V. Volterra: **Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie.** Gauthier Villars, Paris 1931, str. VI + 214, frs 60.—.

Obsahem této knihy jest určité použití matematiky v biologii. Vyjděme z definice, že biologické sdružení tvoří více druhů organických individuí, které žijí v témže prostředí. Vzájemný styk druhů způsobuje, že zpravidla individua navzájem zápasí o stejnou potravu, kterou dané prostředí poskytuje, anebo kromě toho ještě jisté druhy slouží jiným druhům za potravu. Nastává zjev zvaný obecně „boj o život“, který se kvantitativně projevuje tím, že během času se mění počet individuí každého druhu. Matematická teorie boje o život má za úkol teoreticky studovati časové změny (variace) v počtu individuí jednotlivých druhů v daném prostředí.

Základem pro matematický popis jest následující úvaha: Nechť $N(t)$ jest počet individuí určitého druhu v čase t. Pak $\frac{dN}{dt}$ = rychlost změny (rychlost variace) v počtu těchto individuí a $\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dt}$ = intensita variace. Je-li v prostředí k druhů, přísluší ke každému druhu počet individuí $N_i(t)$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$. Nejjednodušší a nejpravděpodobnější hypotésa o intensitách jednotlivých variací jest

$$\frac{1}{N_i}\cdot\frac{dN_i}{dt} = f_i\,(N_1, N_2, \ldots, N_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \qquad (+)$$

kde f_i jsou analytické výrazy, jejichž tvar se stanoví podle bližších podmínek. Při tom mohou zásadně nastati dva případy: 1. buď intensita variace v okamžiku t_0 závisí jedině na hodnotách $N_i(t_0)$, anebo 2. tato intensita závisí na všech hodnotách $N_i(t)$, které leží v jistém intervalu před okamžikem t_0, tedy pro které $t'_0 \leq t \leq t_0$. V prvém případě relace (+) dává systém k obyčejných diferenciálních rovnic pro N_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$. V druhém případě relace (+) vedou na rovnice integro-diferenciální, protože f_i obecně není funkcí proměnných N_i, nýbrž funkcionálem těchto proměnných.

Abychom mohli konkrétněji posouditi tyto úvahy, uvedu případ, kdy v témže prostředí žijí dva druhy individuí, z nichž prvý druh (*1*) slouží skoro výhradně za potravu druhu druhému (*2*).

Uvažujme nejdříve jen stavy současné. Kdyby nebylo v prostředí druhu (*2*), intensita variace pro druh (*1*) byla by rovna konstantě $\varepsilon_1 > 0$ (což jest nejjednodušší hypotésa). Protože však se vyskytuje také druh (*2*), ubývá druhu (*1*) se vzrůstem počtu individuí druhu (*2*). Tento úbytek označme jako $(-\gamma_1 . N_2)$, kde γ_1 = konst. > 0. Tedy

$$\frac{1}{N_1}\cdot\frac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1 - \gamma_1 . N_2. \qquad (a)$$