Fr. Kudela

Note sur quelques inégalités entre les valeurs probables d'une grandeur aléatoire qui ne prend que des valeurs positives

Aktuárské vědy, Vol. 2 (1931), No. 3, 157–164

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144549

die Anzahl aller im zweiten Schema auftretenden Personen, d. h. durch

$$s\binom{l_x}{s} = l_x\binom{l_x-1}{s-1},$$

so erhalten wir dieselbe Durchschnittszahlung wie früher.

Man sieht sofort, dass diese Überlegung auch dann gilt, wenn sie, statt auf die Auszahlungen, auf die Gewinne angewendet wird.

Eine prinzipielle Untersuchung der Ergebnisse, zu denen verschiedene Schemata führen und die Durchführung für kompliziertere Fälle, insbesondere für die in unseren letzten Kapiteln behandelten, muss einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

Note sur quelques inégalités entre les valeurs probables d'une grandeur aléatoire qui ne prend que des valeurs positives.

Fr. Kudela.

(L'idée de cet article provient du séjour au séminaire pour les mathématiques appliquées de M. Prof. Dr. Emil Schoenbaum à l'université tchèque de Prague.)

I.

En étudiant les mémoires de M. Liapounoff sur le calcul des probabilités, surtout le mémoire[1]) qui est consacré à la formulation et la démonstration les plus précises du théorème célèbre de Laplace-Tchebycheff sur la limite de probabilité, nous y rencontrons certaines inégalités entre les valeurs probables qui méritent, à cause de leur généralité, d'être bien étudiées au point de vue de leur déduction.

Dans le mémoire cité, M. Liapounoff n'a pas fait réellement la démonstration des inégalités que nous venons d'établir, mais il a seulement indiqué comment on peut, par induction, arriver à leur existence. Dans une étude bien connue „Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes",[2]) M. Jensen a établi une inégalité valable pour toutes les fonctions dites convexes et en a tiré, par un procédé fort simple, les inégalités à peu près équivalentes aux inégalités de Liapounoff. Comme on le sait, il s'agit de l'existence de l'inégalité de Cauchy (voir Analyse algébrique, p. 455)

$$\Sigma(a_i \,.\, b_i)^2 \leqq \Sigma a_i^2 \,.\, \Sigma b_i^2$$

---

[1]) Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité. Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg, volume XII, No. 5 (1901).

[2]) Acta Mathematica, T. 30 (1906).

entre les deux suites de valeurs positives a_i, b_i qui a donné naissance à l'étude de M. Jensen; par une simple transformation, celui-ci a déduit que la fonction $\log \Sigma a_i^k \cdot b_i$, k étant un nombre réel quelconque, est une fonction convexe.

La démonstration ci-dessous des inégalités étudiées par Liapounoff est une modification de la démonstration de M. Jensen employant comme celle-ci la notion de fonction convexe, comme on va le voir tout de suite.

1. Soit X une variable aléatoire essentiellement positive et supposons qu'elle parcoure un ensemble dénombrable de valeurs

$$X : x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots$$

avec les probabilités données par une loi de probabilité élémentaire $f(x)$. Supposons encore qu'il existe des valeurs probables de la grandeur X:

$$E(X^p) = \Sigma x_i^p \, f(x_i), \tag{1}$$

p étant un nombre réel quelconque et le signe de sommation se rapportant à toutes les valeurs possibles de X.

Considérons l'expression

$$\Sigma(\alpha x_i^{\frac{1}{2}p} + \beta x_i^{\frac{1}{2}q})^2 \cdot f(x_i), \quad p \neq q,$$

où α, β désignent des nombres constants quelconques différents de zéro. Si l'on effectue les opérations indiquées, on peut écrire, en tenant compte de la formule (1).

$$\Sigma(\alpha \cdot x_i^{\frac{1}{2}p} + \beta \cdot x_i^{\frac{1}{2}q})^2 \cdot f(x_i) = \alpha^2 E(X^p) + 2\alpha\beta E(X^{\frac{1}{2}(p+q)}) + \beta^2 E(X^q)$$

ce qu'est une expression positive ou nulle, ayant égard à la supposition faite sur les valeurs de la variable X. Bien entendu, elle a une valeur nulle seulement si le facteur $\alpha x_i^{\frac{1}{2}p} + \beta x_i^{\frac{1}{2}q} = 0$ quel que soit i, c'est-à-dire si la variable X est une constante. Ce cas exclu, puisque la quantité X cesse d'être une variable aléatoire, nous arrivons à une inégalité

$$\alpha^2 E(X^p) + 2\alpha\beta\, E(X^{\frac{1}{2}(p+q)}) + \beta^2 \cdot E(X^q) > 0 \tag{2}$$

qui exprime que la forme quadratique binaire en α, β est une forme essentiellement positive.

De la théorie des formes quadratiques, il est bien connu que la condition nécessaire et suffisante pour que la forme quadratique soit une forme essentiellement positive est que le discriminant de la forme et ses déterminants mineurs soient positifs. Dans le cas étudié, on a donc nécessairement

$$D = \begin{vmatrix} E(X^p), & E(X^{\frac{1}{2}(p+q)}) \\ E(X^{\frac{1}{2}(p+q)}), & E(X^q) \end{vmatrix} > 0,$$

ou

$$[E(X^{\frac{1}{2}(p+q)})]^2 < E(X^p) \cdot E(X^q), \tag{3}$$

les valeurs probables étant positives par définition. D'après P. Lévy, cette dernière inégalité est appelée l'inégalité de Schwarz pour les valeurs probables.[3]) En prenant les logarithmes, nous en déduisons une inégalité

$$\log E(X^{\frac{1}{2}(p+q)}) < \tfrac{1}{2}\,[\log E(X^p) + \log E(X^q)]$$

exprimant que la fonction $\log E(X^p)$ est fonction convexe pure[4]) (constamment convexe) de l'exposant p au sens de Jensen dans tout le domaine des nombres réels. Comme $E(X^p)$ est une fonction continue de p et en même temps toujours positive, $\log E(X^p)$ est fonction continue du même argument.

Ce sont les fonctions convexes continues pour lesquelles Jensen a établi une inégalité générale

$$\varphi\left(\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu \,.\, x_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu}\right) \leqq \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu \,.\, \varphi_\nu(x_\nu)}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu},$$

a_ν étant des nombres positifs quelconques, qui en cas d'une fonction convexe pure se réduit à simple inégalité. Pour la fonction étudiée $\varphi(p) = \log E(X^p)$, il en suit l'inégalité

$$\varphi\left(\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu \,.\, p_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu}\right) < \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu \,.\, \varphi(p_\nu)}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu}$$

qu'on peut écrire, en remplaçant φ par son expression propre $\log E$, sous la forme

$$\log E\,\left(X^{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu \,.\, p_\nu \Big/ \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu}\right) < \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu \,.\log E\,(X^{p_\nu})}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu}.$$

d'où il résulte finalement

$$\left[E\,\left(X^{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu \,.\, p_\nu \Big/ \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu}\right)\right]^{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu} < \prod_{\nu=1}^{n} [E\,(X^{p_\nu})^{a_\nu}].$$

---

[3]) Calcul des probabilités, p. 157.

[4]) Le rapport logique entre les compréhensions des concepts de la fonction convexe et de la fonction convexe pure est le même que celui entre les compréhensions des concepts de la fonction monotone et de la fonction monotone pure.

En y posant $n = 2$, nous arrivons à l'inégalité

$$[E(X^{\frac{a_1 p_1 + a_2 p_2}{a_1 + a_2}})]^{a_1 + a_2} < [E(X^{p_1})]^{a_1} . [E(X^{p_2})]^{a_2} \tag{4}$$

dans laquelle a_1, a_2 sont des nombres positifs et p_1, p_2 des nombres réels quelconques.

Si nous choisissons maintenant trois nombres réels arbitraires l, m, n de façon que

$$l > m > n, \tag{5}$$

c'est-à-dire que $l - m > 0$, $m - n > 0$, puis si nous posons dans l'inégalité (4)

$$p_1 = l,\ p_2 = n,\ a_1 = m - n,\ a_2 = l - m,$$

nous venons enfin à l'inégalité cherchée

$$[E(X^m)]^{l-n} < [E(X^l)]^{m-n} . [E(X^n)]^{l-m},$$

ou

$$[\Sigma x_i^m . f(x_i)]^{l-n} < [\Sigma x_i^l f(x_i)]^{m-n} . [\Sigma x_i^n f(x_i)]^{l-m}; \tag{6}$$

c'est la forme sous laquelle est elle citée par Liapounoff,[5]) cependant en se bornant aux nombres l, m, n positifs.

Cette inégalité est la base d'une inégalité plus spéciale, à savoir de l'inégalité

$$[\Sigma x_i^m f(x_i)]^l < [\Sigma x_i^l . f(x_i)]^m, \tag{7}$$

valable pour tous les nombres l, m supérieurs à zéro, d'après la condition (5) qui en suit pour $n = 0$, comme $\Sigma f(x_i) = 1$.

Par raisonnement tout à fait analogue, on peut établir les mêmes inégalités entre les valeurs probables (les moments) d'une variable éventuelle continue ne recevant que des valeurs positives. $f(x)$ étant la densité de probabilité de la variable éventuelle continue X, il existe alors les inégalités suivantes

$$\left(\int_0^\infty x^m . f(x)\, dx\right)^{l-n} < \left(\int_0^\infty x^l . f(x)\, dx\right)^{m-n} . \left(\int_0^\infty x^n . f(x)\, dx\right)^{l-m}, \tag{6 bis}$$

$$\left(\int_0^\infty x^m . f(x)\, dx\right)^l < \left(\int_0^\infty x^l . f(x)\, dx\right)^m \tag{7 bis}$$

qui ne sont qu'une modification des inégalités (6) et (7) établies pour une variable discrète.

La condition essentielle sous laquelle a été faite la démonstration ci-dessus était la supposition que la variable étudiée ne reçoive que des valeurs positives (ou nulles). On peut juger par conséquent que les inégalités analogues entre les valeurs probables des divers ordres sont

---

[5]) L. c. p. 2.

valables pour chaque fonction positive $y(x)$ de la variable X recevant des valeurs quelconques sous une condition seulement, à savoir que les valeurs probables correspondantes existent. Telle fonction positive de la variable X peut être par exemple $|x|$, $(x-x_0)^2$, $|x-x_0|$, x_0 étant une constante etc. On arrive donc aux inégalités

$$[\Sigma y(x_i)^m \cdot f(x_i)]^{l-n} < [\Sigma y(x_i)^l \cdot f(x_i)]^{m-n} \cdot [\Sigma y(x_i)^n \cdot f(x_i)]^{l-m}, \qquad (8)$$

$$[\Sigma y(x_i)^m \cdot f(x_i)]^l < [\Sigma y(x_i)^l \cdot f(x_i)]^m \qquad (9)$$

valables pour une variable éventuelle discontinue,

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(x)^m \cdot f(x)\,dx\right]^{l-n} < \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(x)^l \cdot f(x)\,dx\right]^{m-n} \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(x)^n \cdot f(x)\,dx\right]^{l-m}, \qquad (8\,\text{bis})$$

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(x)^m \cdot f(x)\,dx\right]^l < \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(x)^l \cdot f(x)\,dx\right]^m \qquad (9\text{ bis})$$

valables pour une variable éventuelle continue.

2. Pour illustrer l'application de ces inégalités, citons quelques exemples pour des valeurs particulières de la fonction $y(x)$ et des nombres l, m, n.

Posons dans l'inégalité (8) $y(x) = |x - \bar{x}|$, $\bar{x}$ étant la moyenne arithmétique $\bar{x} = \Sigma x_i\, f(x_i)$, et $l = 2 + \delta$, $m = 2$, $n = 1$ $(\delta > 0)$; il vient

$$[\Sigma(x_i - \bar{x})^2 f(x_i)]^{1+\delta} < [\Sigma|x_i - \bar{x}|^{2+\delta} \cdot f(x_i)] \cdot [\Sigma|x_i - \bar{x}| \cdot f(x_i)]^\delta,$$

ce qui peut s'écrire sous la forme symbolique

$$\sigma^{2(1+\delta)} < \bar{\mu}_{2+\delta} \cdot (\vartheta)^\delta,$$

σ étant l'écart quadratique, ϑ l'écart moyen et $\bar{\mu}_k$ désignant généralement le moment d'ordre k des valeurs absolues des écarts comptés de la moyenne arithmétique

$$\bar{\mu}_k = \Sigma|x_i - \bar{x}|^{2+\delta} \cdot f(x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \bar{x}|^{2+\delta} \cdot f(x)\,dx,$$

de sorte que

$$\bar{\mu}_1 = \vartheta,\ \bar{\mu}_2 = \sigma^2.$$

Pour $\delta = 1$, on a donc

$$\sigma^4 < \vartheta \cdot \bar{\mu}_3,$$

et pour $\delta = 2$

$$\sigma^6 < \vartheta^2 \cdot \bar{\mu}_4.$$

De la même inégalité, on trouve, en posant encore $y(x) = |x - \bar{x}|$ et $l = 2 + \delta$, $m = 2 + \beta$, $n = 2$, $\delta > \beta \geqq 0$, une expression très générale

$$(\bar{\mu}_{2+\beta})^{\delta} < (\mu_{2+\delta})^{\beta} \cdot \sigma^{2(\delta-\beta)},$$

$\bar{\mu}_k$ ayant le même sens que plus haut.

Si nous posons dans l'inégalité (9) $y(x) = | x - \bar{x} |$, et si nous choisissons $l = 3$, $m = 2$, nous en obtenons

$$\sigma^6 < \mu_3^2;$$

pour la même fonction $y(x)$ et pour $l = 2$, $m = 1$, nous aurons également

$$\sigma^2 < \vartheta^2,$$

ce qui dit que le carré de l'écart quadratique est inférieur au carré de l'écart moyen.

De la même manière, on déduit de l'inégalité (9), en choisissant $y(x) = | x |$ et en posant $l = 2$, $m = 1$,

$$[\Sigma \mid x_i \mid f(x_i)]^2 < \Sigma x_i^2 \cdot f(x_i);$$

comme on a

$$\mid \Sigma x_i f(x_i) \mid \leqq \Sigma \mid x_i \mid \cdot f(x_i),$$

on voit qu'en réunissant ces deux inégalités, il résulte l'inégalité

$$[\Sigma x_i \cdot f(x_i)]^2 < \Sigma x_i^2 \cdot f(x_i)$$

exprimant que le carré de la moyenne arithmétique d'une variable éventuelle est inférieur à la moyenne des carrés de toutes les valeurs possibles de la même variable.

On pourrait former un grand nombre de telles inégalités entre les valeurs probables d'une variable éventuelle positive, mais ce ne sont que les inégalités entre les premiers quatre ou cinq moments (valeurs probables) qui ont une vraie importance pratique, par exemple, pour la statistique mathématique; l'importance théorique des inégalités ci-dessus est donnée par le fait qu'elles font une base indispensable pour la démonstration de quelques théorèmes parfois fondamentaux du calcul des probabilités et de la statistique mathématique.

II.

Dans l'ouvrage cité de M. Liapounoff, nous rencontrons encore une inégalité, non moins intéressante que les inégalités précédentes, conduisant de même à certaines relations entre les valeurs probables d'une variable éventuelle positive.

Considérons la fonction $\varphi(x) = x^p$, p étant un nombre réel quelconque et $x > 0$. Soient x, y deux nombres tels que $x > y > 0$; d'après la formule de la moyenne du calcul différentiel, on a

$$\varphi(x) - \varphi(y) = (x - y) \cdot \varphi'(\xi),$$

c'est-à-dire

$$x^p - y^p = p \cdot (x - y) \cdot \xi^{p-1}, \tag{10}$$

ξ désignant un nombre compris entre x et y. Si $p-1>0$, il suit sans peine de (10) que

$$p\,(x-y)\,.\,x^{p-1} > x^p - y^p > p\,(x-y)\,y^{p-1}. \tag{11}$$

En vertu de l'hypothèse faite sur les qualités de nombres x, y et p, on peut écrire

$$x^p > \left(\frac{x+y}{2}\right)^p > y^p:$$

en se servant de l'inégalité (11), la première fois pour la différence

$$x^p - \left(\frac{x+y}{2}\right)^p,$$

la deuxième fois pour la différence

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^p - y^p,$$

nous arrivons aux inégalités

$$x^p - \left(\frac{x+y}{2}\right)^p > p\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot\left(\frac{x+y}{2}\right)^{p-1},$$

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^p - y^p < p\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot\left(\frac{x+y}{2}\right)^{p-1}$$

et, en les ajoutant, il suit immédiatement l'inégalité

$$x^p - \left(\frac{x+y}{2}\right)^p > \left(\frac{x+y}{2}\right)^p - y^p,$$

ou

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^p < \frac{x^p+y^p}{2}.$$

Par définition, elle énonce que la fonction $\varphi(x) = x^p$ est une fonction constamment convexe pour $x>0$, $p>1$; en l'écrivant sous une autre forme

$$(x+y)^p < 2^{p-1}\,(x^p+y^p), \tag{12}$$

elle peut servir pour le but du calcul des probabilités.

Soit $\bar{x} = \Sigma x_i\, f(x_i)$ la moyenne arithmétique d'une variable éventuelle X et soit δ un nombre quelconque positif ou nul. On a évidemment, en vertu de la proposition sur la valeur absolue d'une différence,

$$|\,x_i - \bar{x}\,|^{2+\delta} \leqq (|\,x_i\,| + |\,\bar{x}\,|)^{2+\delta}; \tag{13}$$

en appliquant à l'expression $(|\,x_i\,| + |\,\bar{x}\,|)^{2+\delta}$ le résultat de l'inégalité (12), on peut écrire

$$(|\,x_i\,| + |\,\bar{x}\,|)^{2+\delta} < 2^{1+\delta}\,(|\,x_i\,|^{2+\delta} + |\,\bar{x}\,|^{2+\delta})$$

et, ayant égard à la relation (13), on déduit enfin l'inégalité

$$|x_i - \bar{x}|^{2+\delta} < 2^{1+\delta} \cdot (|x_i|^{2+\delta} + |\bar{x}|^{2+\delta})$$

citée par Liapounoff.[6])

Cette inégalité sert à établir une inégalité remarquable entre les moments d'une variable éventuelle, à savoir entre des moments d'écarts absolus d'une côté, et des moments de valeurs absolues de la même variable d'une autre côté, comme il suit. En la multipliant par la probabilité $f(x_i)$ relative à la valeur x_i et en sommant ensuite pour tous les i possibles, nous aurons l'inégalité

$$\bar{\mu}_{2+\delta} < 2^{1+\delta} \{m_{2+\delta} + |\bar{x}|^{2+\delta}\}, \tag{14}$$

où $\bar{\mu}_{2+\delta}$ désigne, comme plus haut, la valeur probable d'ordre $2+\delta$ de l'écart absolu de la variable X

$$\bar{\mu}_{2+\delta} = \Sigma \, |x_i - \bar{x}|^{2+\delta} \cdot f(x_i),$$

et $\bar{m}_{2+\delta}$ la valeur probable de même ordre pour les valeurs absolues de la variable étudiée

$$\bar{m}_{2+\delta} = \Sigma \, |x_i|^{2+\delta} \cdot (f(x_i).$$

L'interprétation de l'inégalité (14), ainsi que celle de l'inégalité

$$\sigma^2 < 2 \, (\Sigma \, x_i^2 \cdot f(x_i) + \bar{x}^2),$$

qui en suit pour $\delta = 0$, ne présente aucune difficulté.

LITERATURA.

Transactions of the Actuarial Society of America. Říjen 1930.

E. Olifiers: **Vyrovnání tabulek sňatků a znovuprovdání pomocí matematických vzorců.** Z přibližného vztahu mezi pravděpodobností, že se x-letá osoba dožije stáří $(x + 1)$ let, a pravděpodobností, že se tato osoba ožení během příštího roku, odvozuje autor přibližný vzorec pro hodnotu pojištění spojených životů.

R. B. Robbins: **Učitelské pense a náš obecnější starobní problém.** Autor podává přehled charakteristických znaků, společných četným systémům učitelských pensí, které ve Spojených státech existují, a podává některé zásady, na jichž podkladě by se tyto systémy měly vyvíjeti.

J. E. Hoskins: **Některé základní charakteristické znaky vzájemného životního pojištění.**

O. W. Perrin: **Zkušenosti s úmrtností v pojišťovně Penn Mutual Life Insurance Company v případech pojištění kapitálu 50.000 dolarů a více.**

H. J. Stowe: **Poznámky o pojištění orientálních životů.**

A. Hunter: **Hraničná risika.** Hraničná risika jsou taková, jež jsou na hranicích mezi normálními a méněcennými risiky. Autor snaží se vymeziti pokud možno pojem hraničného risika a připojuje poznámky o úmrtnosti těchto risik a jiných otázkách s tímto pojmem souvisících.

---

[6]) L. c. p. 4.