E. Bounitzky

Sur le problème d'interpolation

Aktuárské vědy, Vol. 1 (1930), No. 2, 69–82

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144512

tuts d'assurances suivant différents systèmes (utilisation de la poste au Japon; timbres à coller; organisation d'un service extérieur reposant exclusivement sur le systéme de provisions, avec l'aide de ce qu'on appelle le block-système, etc . . .).

Il résulte de la définition de l'assurance populaire que nous avons employée que nous ne prenons pas en considération les sociétés qui remplacent de façon irrationelle l'assurance populaire (caisses mortuaires, etc . . .). Il faut cependant remarquer que les membres de ces sociétés, qui existent dans presque tous les États, ont put se recruter grâce à l'ignorance et, en outre, à la méfiance que nourrissent les masses populaires à l'endroit des compagnies d'assurance privées. C'est à regretter, surtout si l'on tient compte des dommages économiques qui sont causés par ces institutions conduites comme des associations, ordinairement sans contrôle de l'État et sans les connaissances les plus élémentaires des mathématiques appliquées aux assurances.

(A suivre.)

Sur le problème d'interpolation.

E. Bounitzky.

1. En résolvant un problème d'interpolation on cherche d'ordinaire à approcher une fonction inconnue par les fonctions d'une forme déterminée (polynomes, fonctions trigonométriques, exponentielles etc.).

Mais on peut poser le problème d'une autre façon, en cherchant à determiner toutes les fonctions qui vérifient les conditions indiquées dans un problème d'interpolation. En interprétant de cette manière les problèmes liées à la formule interpolatoire de *Cauchy*, on obtient des solutions tout à fait générales, contenant une fonction arbitraire et parfois en outre des constantes arbitraires.

Ces solutions générales peuvent présenter pour les sciences empiriques et, en particulier, pour la statistique un bon moyen heuristique dans la recherche des solutions spéciales que l'on trouverait en choisissant convenablement la forme d'une fonction arbitraire.

2. La formule interpolatoire de *Cauchy* nous définit un polynome $f(x)$ qui vérifie les égalités

$$\left.\begin{array}{l} f(a_1) = A_{10},\ f'(a_1) = A_{11},\ f''(a_1) = A_{12},\ \ldots,\ f^{(\nu_1-1)}(a_1) = A_{1,\nu_1-1}, \\ f(a_2) = A_{20},\ f'(a_2) = A_{21},\ f''(a_2) = A_{22},\ \ldots,\ f^{(\nu_2-1)}(a_2) = A_{2,\nu_2-1}, \\ f(a_m) = A_{m0},\ f'(a_m) = A_{m1},\ f''(a_m) = A_{m2},\ \ldots,\ f^{(\nu_m-1)}(a_m) = A_{m,\nu_m-1}, \end{array}\right\} \quad (1)$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sont des nombres donnés inégaux, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ des entiers positifs donnés, $A_{10}, A_{11}, \ldots, A_{m,\nu_m-1}$ des nombres donnés, choisis arbitrairement. En posant $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m = n$, on démontre sans peine qu'il n'existe qu'un seul polynome parfaitement déterminé

$$f(x) = P_0 + P_1 x + \ldots + P_{n-1}\, x^{n-1}.$$

de degré $n-1$ au plus qui satisfasse aux conditions (1); c'est précisement le polynome défini par la formule de *Cauchy*. Les coefficients de ce polynome étant des fonctions linéaires homogènes des quantités A_{10}, $A_{11}, \ldots, A_{m, \nu_m - 1}$, on peut écrire ce polynome sous la forme

$$f(x) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\nu_\lambda - 1} A_{\lambda\gamma}\, g_{\lambda\gamma}(x)$$

ou, pour abréger,

$$f(x) = \sum_{\lambda\gamma} A_{\lambda\gamma}\, g_{\lambda\gamma}(x), \tag{2}$$

$g_{\lambda\gamma}(x)$ étant des certains polynomes de degré $n-1$ au plus dont les coefficients ne dépendent pas des quantités $A_{\lambda\gamma}$; ils sont parfaitement définis par l'ensemble de nombres $a_1, a_2, \ldots, a_m$ et $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$. Le nombre de tous les polynomes $g_{\lambda\gamma}(x)$ est égal à la somme $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \nu_\lambda = n$.

Chacun des polynomes $g_{\lambda\gamma}(x)$ représente un polynome défini d'une manière univoque de degré $n-1$ au plus, satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned}
&f(a_1) = 0,\ f'(a_1) = 0, \ldots, f^{(\nu_1-1)}(a_1) = 0,\\
&f(a_2) = 0,\ f'(a_2) = 0, \ldots, f^{(\nu_2-1)}(a_2) = 0,\\
&f(a_\lambda) = 0,\ f'(a_\lambda) = 0, \ldots, f^{(\gamma-1)}(a_\lambda) = 0,\ f^{(\gamma)}(a_\lambda) = 1,\ f^{(\gamma+1)}(a_\lambda) = 0, \ldots,\\
&\qquad \ldots f^{(\nu_\lambda-1)}(a_\lambda) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f(a_m) = 0,\ f'(a_m) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots f^{(\nu_m-1)}(a_m) = 0.
\end{aligned}$$

On le prouve immédiatement, en posant dans la formule (2), pour les indices λ et γ fixés, $A_{\lambda\gamma} = 1$ et en remplaçant par zéro chacune des autres quantités A_{pq}. Par suite, chacun des polynomes $g_{\lambda\gamma}(x)$ satisfait aux relations

$$\begin{aligned}
&g_{\lambda\gamma}^{(k)}(a_p) = 0,\ p \neq \lambda,\ k = 0, 1, 2, \ldots, \nu_p - 1,\\
&g_{\lambda\gamma}^{(k)}(a_\lambda) = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots, \gamma - 1, \gamma + 1, \ldots, \nu_\lambda - 1,\ g_{\lambda\gamma}^{(\gamma)}(a_\lambda) = 1.
\end{aligned} \tag{3}$$

Remarque. Nous posons partout, pour chaque fonction $\varrho(x)$, $\varrho^{(o)}(x) = \varrho(x)$. Ainsi on aura $g_{\lambda\gamma}^{(o)}(a_p) = g_{\lambda\gamma}(a_p)$, $g_{\lambda\gamma}^{(o)}(a_\lambda) = g_{\lambda\gamma}(a_\lambda)$.

3. En s'appuyant sur les relations (3), on démontre la proposition suivante.

Théorème I. Toutes les fonctions $F(x)$ qui satisfont pour une suite donnée de nombres inégaux $a_1, a_2, \ldots, a_m$ et pour les valeurs données des $A_{\lambda\gamma}$ aux conditions (1) s'expriment par la formule générale*)

$$F(x) = \psi(x) + \sum_{\lambda\gamma}[A_{\lambda\gamma} - \psi^{(\gamma)}(a_\lambda)]\, g_{\lambda\gamma}(x), \tag{4}$$

où les polynomes $g_{\lambda\gamma}(x)$ ont la même signification que dans la formule (2), $\psi(x)$ étant une fonction arbitraire, ayant pour $x = a_\lambda$ des dérivées finies jusqu' à l'ordre $\nu_\lambda - 1$ inclusivement.

Remarque. La fonction $\psi(x)$ doit être définie pour les mêmes valeurs de x pour lesquelles on veut définir la fonction $F(x)$. Par exemple. on peut la définir, ce qui est le plus naturel, dans l'intervalle entre le plus petit et le plus grand des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Fixons les indices λ et γ et différentions pour $x = a_\lambda$ la fonction $F(x)$ définie par l'équation (4) γ fois, si l'on a $0 < \gamma \leqq \nu_\lambda - 1$, ou, si $\gamma = 0$, posons dans l'équations (4) $x = a_\lambda$. On aura

$$F^{(\gamma)}(a_\lambda) = \psi^{(\gamma)}(a_\lambda) + \sum_{pq}[A_{pq} - \psi^{(q)}(a_p)]\, g_{pq}{}^{(\gamma)}(a_\lambda)$$

ou, en vertu des relations (3),

$$F^{(\gamma)}(a_\lambda) = \psi^{(\gamma)}(a_\lambda) + [A_{\lambda\gamma} - \psi^{(\gamma)}(a_\lambda)] = A_{\lambda\gamma}.$$

Par suite, la fonction $F(x)$, définie par la formule (4), satisfait aux conditions (1) quelle que soit la fonction $\psi(x)$. Réciproquement, si la fonction $F(x)$ satisfait aux conditions (1), toutes les différences $A_{\lambda\gamma} - \psi^{(\gamma)}(a_\lambda)$ s'annulent, et on aura identiquement

$$F(x) = F(x) + \sum_{\lambda\gamma}[A_{\lambda\gamma} - F^{(\gamma)}(a_\lambda)]\, g_{\lambda\gamma}(x).$$

Donc, on peut représenter la fonction $F(x)$ par la formule (4) en posant $\psi(x) = F(x)$. Ainsi la formule (4) nous donne une expression générale de toutes les fonctions qui vérifient les conditions (1).

4. Cherchons maintenant une forme générale des fonctions qui vérifient pour un ensemble donné de nombres inégaux a_λ et de nombres arbitrairement choisis $A_{\lambda\gamma}$ les conditions (1) et de plus les égalités

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx = Q_1, \quad \int_{a_2}^{a_3} f(x)\,dx = Q_2, \ldots, \int_{a_m}^{a_{m+1}} f(x)dx = Q_{m-1}, \tag{5}$$

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_{m-1}$ étant des nombres donnés.

A cet effet construisons d'abord un polynome qui satisfasse aux conditions (1) et (5). En désignant ce polynome par $f(x)$ et posant

$$\int_{a_1}^{x} f(y)dy = F(x), \tag{6}$$

*) Cette formule, ainsi que la formule (18) se trouve dans mon travail „K teorii interpolacii", Zapiski Novorossijskago Universiteta, 1916 en russe; „Contribution à la théorie de l'interpolation", Annales de l'Université Néorussienne d'Odessa).

on aura

$$F(a_1)=0, \quad (7) \qquad f(x)=F'(x), \quad (8) \qquad f^{(i)}(x)=F^{(i+1)}(x). \quad (9)$$

D'après les égalités (6), (7) et (5) il vient

$$\int_{a_1}^{a_k} f(y)dy = F(a_\varkappa) = \int_{a_1}^{a_2} f(y)dy + \int_{a_2}^{a_3} f(y)dy + \ldots +$$

$$\int_{a_{\varkappa-1}}^{a_k} f(y)dy = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_{k-1} \qquad (k=2, 3, \ldots, m).$$

Ainsi, en posant

$$Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_{k-1} = c_k \quad (k=2, 3, \ldots, m) \tag{10}$$

et en particulier $Q_1 = c_2$, on a

$$F(a_k) = c_k \quad (k=2, 3, \ldots, m). \tag{11}$$

De plus, ayant en vue les égalités (8) et (9), on peut écrire les équations (1) sous la forme

$$F^{(\gamma+1)}(a_\lambda) = A_{\lambda\gamma}. \tag{12}$$

Donc, le polynome $F(x)$ doit satisfaire d'après les équations (7), (11) et (12) aux $n+m$ conditions

$$\begin{array}{l} F(a_1)=0,\ F'(a_1)=A_{10},\ \ F''(a_1)=A_{11}, \ldots, F^{(\nu_1)}(a_1)=A_{1,\nu_1-1}, \\ F(a_2)=c_2,\ F'(a_2)=A_{20},\ \ F''(a_2)=A_{21}, \ldots, F^{(\nu_2)}(a_2)=A_{2,\nu_2-1}, \\ F(a_3)=c_3,\ F'(a_3)=A_{30},\ \ F''(a_3)=A_{31}, \ldots, F^{(\nu_3)}(a_3)=A_{3,\nu_3-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F(a_m)=c_m,\ F'(a_m)=A_{m0},\ \ F''(a_m)=A_{m1}, \ldots, F^{(\nu_m)}(a_m)=A_{m,\nu_m-1}. \end{array} \tag{13}$$

En applicant la formule (2) de *Cauchy*, on construit un polynome $F(x)$ parfaitement déterminé de degré $n+m-1$ au plus, satisfaisant aux conditions (13). Ce polynome est représenté par l'équation de la forme

$$F(x) = \sum_{\lambda\gamma} A_{\lambda\gamma}\, \chi_{\lambda\gamma}(x) + \sum_{k=2}^{k=m} c_k \psi_k(x),$$

$\chi_{\lambda\gamma}(x)$ et $\psi_k(x)$ étant des polynomes dont les coefficients ne dépendent que des quantités $a_1, a_2, \ldots, a_m$. En substituant les valeurs des c_k conformément aux équations (10), on a

$$F(x) = \sum_{\lambda\gamma} A_{\lambda\gamma}\, \chi_{\lambda\gamma}(x) + \sum_{i=1}^{i=m-1} Q_i \varphi_i(x), \tag{14}$$

$\varphi_i(x)$ étant aussi des polynomes dont les coefficients ne dépendent que des a_λ. Différentiant l'équation (14) et tenant compte de l'égalité (8), il vient

$$f(x) = \sum A_{\gamma\lambda}\, \chi'_{\lambda\gamma}(x) + \sum_{i=1}^{i=m-1} Q_i\, \varphi_i{}'(x)$$

ou, en posant $\chi'_{\lambda\gamma}(x) = H_{\lambda\gamma}(x)$, $\varphi'_i(x) = s_i(x)$,

$$f(x) = \sum_{\lambda\gamma} A_{\lambda\gamma}\, H_{\lambda\gamma}(x) + \sum_{i=1}^{i=m-1} Q_i\, s_i(x), \tag{15}$$

$H_{\lambda\gamma}(x)$ et $s_i(x)$ étant des polynomes parfaitement déterminés dont les coefficients ne dépendent que des quantités $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Il est à remarquer que, la fonction $F(x)$ étant parfaitement définie par les conditions (13) comme un polynome de degré $n + m - 1$ au plus, la formule (15) définit aussi d'une manière univoque le polynome $f(x)$ de degré $n + m - 2$ au plus, satisfaisant aux conditions (1) et (5).

En fixant les indices λ et γ, posons dans la formule (15) $A_{\lambda\gamma} = 1$ dans l'hypothèse que toutes les autres quantités A_{pq}, de même que tous les nombres Q_i s'annulent. Après une telle substitution l'équation (15) devient

$$f(x) = H_{\lambda\gamma}(x).$$

Il résulte delà que $H_{\lambda\gamma}(x)$ est un polynome de degré $n + m - 2$ au plus, défini univoquement par les conditions (1) et (5) pour le choix des nombres $A_{\lambda\gamma}$ et Q_i qui vient d'être indiqué. Donc le polynome $H_{\lambda\gamma}(x)$ satisfait aux relations

$$\begin{gathered} H_{\lambda\gamma}{}^{(q)}(a_p) = 0, \quad p \neq \lambda, \quad q = 0, 1, 2, \ldots, \nu_p - 1, \\ H_{\lambda\gamma}{}^{(q)}(a_\lambda) = 0, q = 0, 1, 2, \ldots, \gamma - 1, \gamma + 1, \ldots, \nu_\lambda - 1; \\ H_{\lambda\gamma}{}^{(\gamma)}(a_\lambda) = 1, \\ \int_{a_{k-1}}^{a_k} H_{\lambda\gamma}(x) dx = 0, \ k = 2, 3, \ldots, m. \end{gathered} \tag{16}$$

De même, en posant dans la formule (15) $Q_i = 1$ pour une valeur fixée de l'indice i et en remplaçant toutes les autres quantités Q_r ainsi que toutes les quantités $A_{\lambda\gamma}$ par zéro, on aura

$$f(x) = s_i(x).$$

Donc, le polynome $s_i(x)$ de degré $n + m - 2$ au plus est parfaitement défini par les conditions (1) et (5) pour le choix des nombres Q_i et $A_{\lambda\gamma}$ indiqué plus haut, d'où suivent les relations

$$\begin{gathered} s_i{}^{(\gamma)}(a_\lambda) = 0, \ \lambda = 1, 2, \ldots, m, \ \gamma = 1, 2, \ldots, \nu_\lambda - 1; \\ \int_{a_{k-1}}^{a_k} s_i(x) dx = 0, k = 2, 3, \ldots, i - 1, i + 1, \ldots, m, \\ \int_{a_i}^{a_{i+1}} s_i(x) dx = 1. \end{gathered} \tag{17}$$

5. Ayant recours aux relations (16) et (17), on démontre la proposition suivante.

Théorème II. Toutes les fonctions $f(x)$ qui satisfont aux conditions (1) et (5) pour un ensemble donné de quantités a_λ, $A_{\lambda\gamma}$ et Q_i s'expriment par la formule générale

$$f(x) = \psi(x) + \sum_{\lambda\gamma} [A_{\lambda\gamma} - \psi^{(\gamma)}(a_\lambda)]\, H_{\lambda\gamma}(x) + \sum_{i=1}^{i=m-1} [Q_i - \int_{a_i}^{a_{i+1}} \psi(y)dy]\, s_i(x), \tag{18}$$

où $H_{\lambda\gamma}(x)$ et $s_i(x)$ sont les mêmes polynomes que dans l'équation (15), $\psi(x)$ étant une fonction arbitraire. Cette fonction a par hypothèse pour $x = a_\lambda$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, m$) des dérivées finies jusqu'à l'ordre $\nu_\lambda - 1$ inclusivement; de plus elle est intégrable dans chacun des intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ ou, ce qui est équivalent, dans un intervalle du plus petit jusqu'au plus grand des nombres a_λ.

Remarque. On voit ainsi que la fonction arbitraire $\psi(x)$ de la formule (18) est définie, de même que la fonction $\psi(x)$ de la formule (4), dans l'intervalle du plus petit jusqu'au plus grand des nombres a_λ.

En fixant les valeurs des indices λ et γ, différentions pour $x = a_\lambda$ la fonction $f(x)$, définie par l'équation (18) γ fois, si l'on a $0 < \gamma \leqq \nu_\lambda - 1$, ou, si $\gamma = 0$, posons dans cette équation $x = a_\lambda$. On aura

$$f^{(\gamma)}(a_\lambda) = \psi^{(\gamma)}(a_\lambda) + \sum_{pq} [A_{pq} - \psi^{(q)}(a_p)]\, H_{pq}^{(\gamma)}(a_\lambda) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{i=m-1} [Q_i - \int_{a_i}^{a_{i+1}} \psi(y)\, dy]\, s_i^{(\gamma)}(a_\lambda)$$

ou, en vertu de trois premières des relations (16) et de la première des relations (17),

$$f^{(\gamma)}(a_\lambda) = \psi^{(\gamma)}(a_\lambda) + [A_{\lambda\gamma} - \psi^{(\gamma)}(a_\lambda)] = A_{\lambda\gamma}.$$

Donc, la fonction $f(x)$ définie par l'équation (18) satisfait aux conditions (1), quelle que soit la fonction arbitraire $\psi(x)$. Intégrons maintenant les deux membres de l'équation (18) dans l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, la valeur de l'indice k étant fixée. On aura

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx = \int_{a_k}^{a_{k+1}} \psi(x)dx + \sum_{\lambda\gamma} [A_{\lambda\gamma} - \psi^{(\gamma)}(a_\lambda)] \int_{a_k}^{a_{k+1}} H_{\lambda\gamma}(x)dx +$$
$$\int_{i=1}^{i=m-1} [Q_i - \int_{a_i}^{a_{i+1}} \psi(y)dy] \int_{a_k}^{a_{k+1}} s_i\,(x)dx$$
$$(k = 1, 2, \ldots, m-1),$$

d'où il suit, conformément à la quatrième des relations (16) et à deux dernières des relations (17),

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx = \int_{a_k}^{a_{k+1}} \psi(x)dx + [Q_k - \int_{a_k}^{a_{k+1}} \psi(y)dy] = Q_k.$$

Il en résulte que la fonction $f(x)$ définie par l'équation (18) satisfait aussi aux conditions (5), quelle que soit la fonction arbitraire $\psi(x)$.

Réciproquement, si la fonction $f(x)$ satisfait aux conditions (1) et (5), toutes les différences

$$A_{\lambda\gamma} - f^{(\gamma)}(a_\lambda), \qquad Q_i - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(y)dy$$

s'annulent, et on a identiquement

$$f(x) = f(x) + \sum_{\lambda\gamma} [A_{\lambda\gamma} - f^{(\gamma)}(a_\lambda)]\, H_{\lambda\gamma}(x) + \sum_{i=1}^{i=m-1} [Q_i - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(y)dy]\, s_i(x).$$

On peut donc représenter la fonction considérée $f(x)$ par la formule (18) en posant $\psi(x) = f(x)$. Par suite, la formule (18) donne vraiement l'expression générale d'une fonction satisfaisant aux conditions (1) et (5).

Remarque. On obtient de même la formule

$$f(x) = \psi(x) + \sum_{i=1}^{i=m-1} [Q_i - \int_{a_i}^{a_{i+1}} \psi(y)\, dy] s_i(x) \tag{18'}$$

qui détermine l'ensemble de toutes les fonctions $f(x)$, satisfaisant aux conditions (5) considérées séparément. Dans cette formule les polynomes $s_i(x)$ sont les mêmes que dans la formule (18) et $\psi(x)$ est une fonction arbitraire. On peut déduire la formule (18') immédiatement de la formule (18) en y remplaçant $\psi(y)$ par l'expression

$$\psi(y) + \sum_{\lambda\gamma} [A_{\lambda\gamma} - \psi^{(\gamma)}(a_\lambda)]\, H_{\lambda\gamma}(y), \tag{18''}$$

où $A_{\lambda\gamma}$ sont des constantes arbitraires ; c'est permis en vertu de la dernière des relations (16). En changeant les notations et en remplaçant l'expression (18'') de nouveau par $\psi(y)$, on obtient la formule (18'), où $\psi(y)$ est aussi une fonction arbitraire.

6. Nous avons trouvé ainsi des solutions générales du problème d'interpolation de *Cauchy* et du problème analogue que l'on résout au moyen de la formule (18). On peut appeler ces problèmes d'interpolation **problèmes linéaires**, en ayant en vue que les formules correspondantes (2) et (15) contiennent linéairement les quantités données $A_{\lambda\gamma}$ ou $A_{\lambda\gamma}$ et Q_i.

A son tour les formules (4) et (18) donnent les solutions générales de ces deux problèmes linéaires. Désignons par N le nombre de conditions auxquelles doit satisfaire la fonction cherchée d'un problème linéaire. Il est à remarquer que **précisement** la **dérivée d'ordre** N d'une solution générale du problème linéaire à N conditions est tout à fait arbitraire.

En effet, le nombre N du problème de *Cauchy* est égal à la somme $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m = n$, les polynomes $g_{\lambda\gamma}(x)$ de la formule (4) étant de degré $n - 1 = N - 1$ au plus. Le nombre N du problème analogue, résolu par la formule (18), est égal à $N = n + m - 1$, les polynomes $H_{\lambda\gamma}(x)$ et $s_i(x)$ étant de degré $n + m - 2 = N - 1$ au plus. Par suite, différentiant les équations (4) et (18) N fois, c'est à dire respectivement n et $n + m - 1$ fois, il viendra

$$f^{(N)}(x) = \psi^{(N)}(x),$$

la dérivée d'ordre N d'une solution générale $f(x)$ étant ainsi égale à la dérivée d'ordre N d'une fonction arbitraire $\psi(x)$.

7. Pour illustrer l'application des formules (4) et (18) résolvons quelques problèmes particuliers.

Problème 1. Trouver l'équation générale d'une famille de courbes passant par deux points donnés dont les abscisses a et b sont inégales.

Remarque. Nous considérons partout les courbes de la forme $y = f(x)$ en coordonnées cartésiennes.

D'après la formule (2) le polynome $\varphi(x)$ du premier degré, satisfaisant aux conditions $\varphi(a) = A$, $\varphi(b) = B$, s'exprime par la formule

$$\varphi(x) = \frac{x - b}{a - b} A + \frac{x - a}{b - a} B.$$

Par suite, conformément à la formule (4), l'équation

$$f(x) = \psi(x) + [A - \psi(a)] \frac{x - b}{a - b} + [B - \psi(b)] \frac{x - a}{b - a},$$

où $\psi(x)$ est une fonction arbitraire, représente toutes les fonctiones $f(x)$ satisfaisant aux conditions $f(a) = A$, $f(b) = B$.

Donc, l'ensemble de toutes les courbes qui passent par deux points donnés a, A et b, B s'exprime par l'équation

$$y = \psi(x) + [A - \psi(a)] \frac{x - b}{a - b} + [B - \psi(b)] \frac{x - a}{b - a}.$$

Problème 2. Trouver l'équation générale de toutes les courbes qui aient une aire donnée Q comprise entre la courbe, l'axe des x et les deux droites $x = a$ et $x = b$ $(a \neq b)$. En construisant au moyen de la formule (15) un polynome $\varphi(x)$ de degré zéro qui vérifie l'égalité

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = Q,$$

on aura

$$F(x) = \frac{x - a}{b - a} Q, \quad \varphi(x) = F'(x) = \frac{Q}{b - a}.$$

Donc, d'après la formule (18), l'équation

$$f(x) = \psi(x) + \frac{1}{b-a}\left[Q - \int_a^b \psi(y)dy)\right],$$

où $\psi(x)$ est une fonction intégrable dans l'intervalle $<a, b>$ et d'ailleurs arbitraire, donne l'expression genérale de toutes les fonctions $f(x)$ satisfaisant à la condition

$$\int_a^b f(x)dx = Q.$$

Par suite, la famille de courbes en question est déterminée par l'équation

$$y = \psi(x) + \frac{1}{b-a}\left[Q - \int_a^b \psi(y)dy\right].$$

Problème 3. Trouver l'équation générale de toutes les courbes qui passent par deux points donnés (a, A) et (b, B) et qui interceptent une aire donnée Q entre le contour de la courbe, l'axe des x et les deux droites $x = a$ et $x = b$ $(a \neq b)$.

Le problème se réduit à la construction d'une expression genérale de toutes les fonctions $f(x)$ qui satisfassent aux conditions

$$f(a) = A, \quad f(b) = B, \quad \int_a^b f(x)dx = Q. \tag{19}$$

Donc, en posant

$$F(x) = m + n(x-a) + p(x-a)^2 + q(x-a)^2\,(x-b), \tag{20}$$

on aura besoin, conformément aux formules (14) et (15), de choisir les coeficients m, n, p, q d'une telle façon qu'ils satisfassent aux équations

$$F(a) = 0,\ F'(a) = A,\ F(b) = Q,\ F'(b) = B.$$

Aprés avoir calculé les coefficients m, n, p, q au moyen de ces équations, on aura

$$m = O\ ,\ n = A,\ p = \frac{Q}{(b-a)^2} - \frac{A}{b-a},\ q = \frac{A+B}{(b-a)^2} - \frac{2Q}{(b-a)^3}.$$

Désignons par $\varphi(x)$ un polynome du deuxième degré, satisfaisant aux conditions

$$\varphi(a) = A,\ \varphi(b) = B,\ \int_a^b \varphi(x)dx = Q.$$

En faisant usage des formules (14) et (15), il vient

$$\varphi(x) = F'(x) = n + 2p(x-a) + q[(x-a)^2 + 2(x-a)\,(x-b)]$$

ou, en substituant les valeurs de n, p, q trouvées plus haut,

$$\varphi(x) = \frac{A(x-b)(3x-2a-b)}{(b-a)^2} + \frac{B(x-a)(3x-2b-a)}{(b-a)^2} - \\ - \frac{6Q(x-a)(x-b)}{(b-a)^3}.$$

Donc, d'après la formule (18), l'équation

$$f(x) = \psi(x) + [A-\psi(a)]\frac{(x-b)(3x-2a-b)}{(b-a)^2} + \\ + [B-\psi(b)]\frac{(x-a)(3x-2b-a)}{(b-a)} - \\ - 6\left[Q - \int_a^b \psi(y)dy\right]\frac{(x-a)(x-b)}{(b-a)^3}, \tag{21}$$

où $\psi(x)$ est une fonction arbitraire, donne l'expression générale de toutes les fonctions qui satisfont aux conditions (19). Par suite, la famille cherchée de courbes est représentée par l'équation

$$y = \psi(x) + [A-\psi(a)]\frac{(x-b)(3x-2a-b)}{(b-a)^2} + \\ + [B-\psi(b)]\frac{(x-a)(3x-2b-a)}{(b-a)^2} - \\ - 6\left[Q - \int_a^b \psi(y)dy\right]\frac{(x-a)(x-b)}{(b-a)^3}.$$

8. Désignons par $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ les n quantités $f^{(\gamma)}(a_\lambda) = A_{\lambda\gamma}$ figurant dans les egalités (1) et proposons nous de trouver une fonction $f(x)$ qui satisfasse aux k conditions, exprimées par un système d'équations

$$\Phi_p(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n;\quad Q_1, \ldots, Q_{m-1}) = 0 \ (p = 1, 2, \ldots, k), \tag{22}$$

où l'on pose, comme dans les équations (5),

$$Q_i = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx \quad (i = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Si le système d'équations (22) est incompatible, le problème proposé n'est pas résoluble. Si, au contraire, les équations (22) sont compatibles, on les résout en obtenant un ou plusieurs systèmes des valeurs définitives des quantités $A_{\lambda\gamma}$, Q_i ou bien en les exprimant par un ou par plusieurs paramètres arbitraires. Dans les deux cas, en substituant les valeurs ainsi trouvées des $A_{\lambda\gamma}$ et des Q_i dans la formule (18), on trouve une expression générale des fonctions cherchées. Dans le second cas cette expression contient outre la fonction arbitraire $\psi(x)$ des constantes arbitraires. Si le système d'équations (22) est linéaire, la distinction de deux cas indiqués plus haut se fait d'après les règles simples bien connues. Soit à trouver, par exemple, l'expression générale d'une fonction qui vérifie les égalités

$$f(a) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = A, \ f(b) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = B, \tag{23}$$

a, b ($a \neq b$), A, B étant des nombres donnés. En posant

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = C,$$

on a, en vertu des équations (23),

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\,C, \quad f(a) = A + C, \ f(b) = B + C.$$

Donc, d'après ces relations et conformément à la formule (21) l'expression générale de la fonction cherchés $f(x)$ est représentée par l'équation

$$f(x) = \psi(x) + [A + C - \psi(a)]\,\frac{(x-b)\,(3x-2a-b)}{(b-a)^2} +$$
$$+ [B + C - \psi(b)]\,\frac{(x-a)\,(3x-2b-a)}{(b-a)^2} -$$
$$- 6\left[(b-a)\,C - \int_a^b \psi(y)dy\right]\frac{(x-a)\,(x-b)}{(b-a)^3}$$

ou, après quelques transformations,

$$f(x) = \psi(x) + [A - \psi(a)]\,\frac{(x-b)\,(3x-2a-b)}{(b-a)^2} +$$
$$+ [B - \psi(b)]\,\frac{(x-a)\,(3x-2b-a)}{(b-a)^2} +$$
$$+ \frac{6(x-a)\,(x-b)}{(b-a)^3}\int_a^b \psi(y)dy + C,$$

$\psi(x)$ étant une fonction arbitraire et C une constante arbitraire.

Cherchons encore l'équation générale de toutes les courbes de la forme

$$y = f(x)$$

qui aient pour les abscisses $x = -a$ et $x = a$ des ordonnées égales et qui interceptent entre l'axe des x, l'axe des y et la droite $x = -a$ la même aire qu'entre l'axe des x, l'axe des y et la droite $x = a$.

En posant

$$f(-a) = A, \quad f(a) = B, \quad \int_{-a}^{0} f(y)dy = Q, \quad \int_{0}^{a} f(y)dy = Q_1. \tag{24}$$

on a pour chacune des courbes cherchées

$$A = B, \quad Q = Q_1. \tag{25}$$

En construisant au moyen de la formule (15) un polynome $\varphi(x)$ du troisième degré au plus qui satisfasse aux conditions (24), on aura

$$\int_{-a}^{x} \varphi(y)dy = F(x), \quad \varphi(x) = F'(x),$$

$$F(-a) = O, \; F'(-a) = A, \; F(O) = Q, \; F(a) = Q + Q_1, \; F'(a) = B. \tag{26}$$

Donc, en posant

$$F(x) = m + n(x+a) + p(x+a)^2 + q(x+a)^2(x-a) + \\ + r(x+a)^2(x-a)^2, \tag{27}$$

on cherchera à déterminer les coefficients m, n, p, q, r d'une telle manière que les équations (26) soient satisfaites. Tous les calculs faits, on trouve

$$m = O, \; n = A, \; p = \frac{Q + Q_1 - 2Aa}{4a^2}, \; q = \frac{Ba + Aa - Q - Q_1}{4a^3},$$

$$r = \frac{2Q - 2Q_1 - Aa + Ba}{4a^4}.$$

Après avoir substitué ces expressions de m, n, p, q, r dans l'équation (27), on aura, en différentiant

$$F'(x) = \varphi(x) = \frac{A(4x^2 + ax - a^2)(a - x)}{4a^3} + \frac{B(4x^2 - ax - a^2)(x + a)}{4a^3} + \\ + \frac{Q(8x - 3a)(x^2 - a^2)}{4a^4} - \frac{Q_1(8x + 3a)(x^2 - a^2)}{4a^4}.$$

Par suite, une famille de fonctions $f(x)$, satisfaisant aux conditions (24), est représentée par la formule

$$f(x) = \psi(x) + [A - \psi(-a)]\frac{(4x^2 + ax - a^2)(a - x)}{4a^3} + \\ + [B - \psi(a)]\frac{(4x^2 - ax - a^2)(x + a)}{4a^3} + \\ + \left[Q - \int_{-a}^{0} \psi(y)dy\right]\frac{(8x - 3a)(x^2 - a^2)}{4a^4} -$$

$$-\left[Q_1-\int_0^a \psi(y)dy\right]\frac{(8x+3a)(x^2-a^2)}{4a^4},$$

$\psi(x)$ étant une fonction arbitraire. On trouve donc l'expression générale de l'ordonnée de la courbe cherchée en remplaçant dans la dernière équation, conformément aux égalités (25), B par A et Q_1 par Q. Il en résulte que la famille cherchée de courbes se représente par l'équation

$$y=\psi(x)+[A-\psi(-a)]\frac{(4x^2+ax-a^2)(a-x)}{4a^3}+$$

$$+[A-\psi(a)]\frac{(4x^2-ax-a^2)(x+a)}{4a^3}+$$

$$+\left[Q-\int_{-a}^0 \psi(y)dy\right]\frac{(8x-3a)(x^2-a^2)}{4a^4}-$$

$$-\left[Q-\int_a^0 \psi(y)dy\right]\frac{(8x+3a)(x^2-a^2)}{4a^4},$$

$\psi(x)$ étant une fonction arbitraire, A et Q étant des constantes arbitraires.

9. On étend sans peine la méthode exposée plus haut sur les problèmes analogues concernant les fonctions de plusieurs variables et sur les intégrales multiples.

Ainsi, par exemple, l'expression générale d'une fonction $f(x)$, satisfaisant à l'équation

$$\int_a^b\left[\int_a^x f(y)dy\right]dx=Q,$$

a, b ($a \neq b$) et Q étant des nombres données, est représentée par la formule

$$f(x)=\psi(x)+\frac{2}{(b-a)^2}\left[Q-\int_a^b\int_a^z \psi(y)dydz\right],$$

où $\psi(x)$ est une fonction arbitraire, intégrable dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$.

Désignons par

$$I_n=\int_a^b\int_a^x f(x)dx^n$$

une intégrale déterminée par les formules réccurentes

$$I_1(x)=\int_a^x f(y)dy,\quad I_2(x)=\int_a^x I_1(y)dy,$$

$$I_k(x) = \int_a^x I_{k-1}(y)dy \quad (k = 2, 3, \ldots, n-1); \quad I_n = \int_a^b I_{n-1}(y)dy,$$

a et b ($a \neq b$) étant des nombres donnés. En gardant ces notations, on démontre que toutes les fonctions $f(x)$ qui satisfont à la condition

$$\int_a^b \int_a^x f(x)dx^n = Q,$$

Q étant un nombre donné, s'expriment par une formule générale

$$f(x) = \psi(x) + \frac{n!}{(b-a)^n}\left[Q - \int_a^b \int_a^y \psi(y)dy^n\right],$$

où $\psi(x)$ est une fonction arbitraire, intégrable dans l'intervalle $\langle a, b \rangle$.

La formule

$$\psi(x, y, z) - \psi[x, g(x), o] = 0,$$

contenant une fonction arbitraire $\psi(x, y, z)$, représente une équation générale des surfaces qui passent par une courbe donnée

$$y = g(x),$$

située dans le plan xy.

L'expression générale des fonctions $f(x, y)$ dont l'intégrale dans un domaine donné σ à deux dimensions a une valeur donnée Q est déterminée par la formule.

$$f(x, y) = \psi(x, y) + \frac{1}{s} \cdot [Q - \int_\sigma \psi(u, v)\, dudv],$$

$\psi(x, y)$ étant une fonction arbitraire, intégrable dans le domaine σ et s désignant l'aire de ce domaine.

Einige Bemerkungen zur Novellierung des tschechoslovakischen Gesetzes betreffend die Versicherung der Arbeitnehmer für den Fall der Krankheit, der Invalidität und des Alters.

Von Dr. *A. Zelenka*. (Fortsetzung.)

Die Wege, auf welchen die Frage der Grundzahlen im Antrag der Z. S. V. A. und nachher im Entwurf des soz. politischen Ausschusses gelöst wurde, waren bis auf einige Abweichungen, über die des weiteren noch referiert werden soll, im Prinzip dieselben. Vor allem wurden natürlich sämtliche Voraussetzungen und statistische Grundlagen, wie sie zur Aufstel-