La possibilité de changer l'ordre d'intégration résulte des conditions nécessaires et suffisantes indiquées à la p. 262 du livre de M. Petr Integrální počet (Calcul intégral). Il est, d'abord, pour A, B, C, D, quelconques

$$\int_A^B dx \int_C^D \varphi(t, x)\, dt = \int_D^C dt \int_A^B \varphi(t, x)\, dx.$$

En effet, l'intégrale double

$$\iint_D \varphi(x, y)\, dx\, dy,$$

où D est un domaine borné quelconque, a un sens, car l'ensemble des points de discontinuité de la fonction $\varphi(t, x)$ est de mesure zéro, la fonction $f(t)$ étant intégrable au sens de Riemann.

Les intégrales

$$\left| \int_B^\infty \varphi(t,x)\, dt \right| < \int_B^\infty |f(t)|\, dt,$$

et

$$\left| \int_D^\infty \varphi(t, x)\, dx \right| < \frac{2\pi \sqrt{2}\, M}{D},$$

où M est la borne supérieure de $|f(t)|$, dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$, d'où l'on a exclu un certain ensemble de mesure zéro, tendent pour $B = \infty$ et $D = \infty$ vers zéro uniformément par rapport à x et t respectivement.

Enfin, l'intégrale

$$\left| \int_B^\infty dt \int_D^\infty \varphi(t, x)\, dx \right| < \frac{2\pi \sqrt{2}}{D} \int_B^\infty |f(t)|\, dt$$

converge pour $D = \infty$ vers zéro. Ce qui prouve que toutes les conditions citées ci-dessus sont vérifiées.

LITERATURA.

Mises: **Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit.** Berlín, Springer 1928.

Mises-ova kniha, vydaná jako třetí svazek sbírky Schriften zur wissenschaftlichen Weltauffassung, jest zajímavým pokusem vysvětliti nematematikovi základy axiomaticky podložené teorie pravděpodobnosti, kterou vyložil autor v řadě pojednání v Mathematische Zeitschrift, Naturwissenschaften a v Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Mám ovšem pochybnost, zdali nematematik bude s to, pochopiti myšlenkovou linii autorových prací, třeba že kniha neobsahuje jediného vzorce, a oceniti cíl, autorem sledovaný. Vysoký cíl, který si autor klade, jest totiž založiti počet pravděpodobnosti na přesně definovaném pojmu pravděpodobnosti a odvoditi z něho metodami, v matematice obvyklými, vědu, která „pokud se přesnosti a spolehlivosti týče, nezadá jiným exaktním vědám". Matematikovi přináší kniha ovšem mnoho cenného a specielně pro aktuáry jest četba její nejvýš poučná a to již základním stanoviskem autora, jenž buduje, jak známo, pojem pravděpodobnosti na idealisaci relativních četností, dále také svými partiemi kritickými.

Autor vychází ze dvou axiomů. V prvém z nich definuje, po příkladě Vennově, Cournotově, Brunsově a jiných, pravděpodobnost jako mezní hodnotu, k níž konverguje relativní četnost určitého znaku, v druhém definuje ponejprv a originelně nepravidelné přiřadění. Jsou-li spojeny oba tyto axiomy spolu s požadavkem neomezeného opakování pokusu (t. j. nekonečné posloupnosti relativních četností), lze teprve mluviti o kolektivu a pravděpodobnosti určitého znaku v tomto kolektivu. Výklad, podaný v knize, je pouze zjednodušením obecných definicí autorových, podaných pro bodové množiny vícedimensionálního znakového prostoru. Vycházeje z obou těchto axiomů a z definice pravděpodobnosti, na nich založené, klade Mises počtu pravděpodobnosti úkol, odvoditi z rozdělení určitého kolektivu, t. j. ze souboru čísel p_A (pravděpodobnost pro vyskytování se znaků A uvnitř kolektivu), rozdělení čísel $p_{A'}$ pro jiný znak nebo pro týž znak A v jiném kolektivu. Operace, kterými se dá nový kolektiv odvoditi z původního, lze matematicky přesně definovati, takže „míchání znaků", „volba", „dělení kolektivu", „spojování kolektivu", „křížení" a "skládání" (Faltung) mají matematický a nikoliv pouze gramatický význam. Partie, jednající o těchto pojmech mohou ovšem sloužiti matematikovi pouze jako úvod k podrobným úvahám autorovým. v cit. pojednáních. Nematematikovi budou tyto výklady, třeba velmi jasné, nesnadno pochopitelny. V důsledku svých axiomů jest nucen Mises rozeznávati, kromě definice pravděpodobnosti jako mezní hodnoty ještě dva zákony velkých čísel. V kritických částech zabývá se Mises vnitřními rozpory dosavadních definicí počtu pravděpodobnosti, obzvláště definice Laplace-ovy. Jest přiznati, že jeho pojetí jest prosto těchto rozporů. Důsledkem Misesovy teorie jest, že vylučuje z oboru aplikací počtu pravděpodobnosti důležité úvahy na př. o náhodovosti v tabulkách numerických. Závěrečné partie Misesovy knihy, pojednávající o statistice, nutno doporučiti pozornosti aktuárů, protože duchaplným způsobem seznamují s aplikacemi statistických metod ve fysice, v prvé řadě statistické mechanice, a mohou býti prvým uvedením do nich. O četné these Misesovy teorie je veden boj; tak na př. lze poukazovati s italskými matematiky (Cantelli) na to, že konvergence relativních četností k pravděpodobnosti je jiného rázu, nežli konvergence číselných posloupností k limitní hodnotě. Jiné námitky proti Misesově teorii mají Pólya a Weyl.

V celku lze však prohlásiti Misesova pojednání, učiněná přístupnými v knize, o níž referuji, za veliké zobecnění vět počtu pravděpodobnosti a za vážný pokus učiniti z počtu pravděpodobnosti matematickou disciplinu.

Dr. E. Schoenbaum.

Charles Jordan: **Statistique mathématique**. Paris 1927, str. 344.

V stručném úvodu podává autor historický přehled rozvoje statistického bádání a seznamuje čtenáře s význačnějšími díly zabývajícími se matematickou statistikou. Předeslav ještě hlavní čtyři fáze vědecké metody statistické (sbírání dat, třídění jich, representace výsledků na podkladě teorie a vyšetřování vzájemných vztahů mezi kolektivy) shrnul autor v kap. I. velmi zdařile základy počtu diferenčního, používaje znenáhla převládající symboliky autorů severských. S použitím čísel Stirlingových prvého a druhého druhu odvozených z vyjádření funkce faktorielní v řadu mocninou a naopak, jak je autor provádí důsledně i v ostatních kapitolách knihy k elegantnímu vyjádření výsledků, setkává se čtenář v učebnici matematické statistiky po prvé v takovémto rozsahu. Kromě odvození polynomů Bernoulli-ho 1. i 2. druhu a summační formule Maclaurin-Eulerovy připojuje autor v kap. I. ku konci symboliku diferencí retrogradních a centrálních a základní vlastnosti diferenčních poměrů (dělených diferencí). Obsahově souvisí s touto kapitolou kapitola III., v níž jsou odvozeny obyčejné formule interpolační. Veliký zájem vzbudí u čtenáře kap. II. zabývající se ortogonálními systemy polynomů a použitím jich k aproximativnímu vyjádření funkcí, dále Thieleovými semiinvarianty a některými transcendentami vyskytujícími se v počtu pravděpodobnosti. Kromě všeobecně známé soustavy polynomů Legendrových a Hermitových nalézá tu čtenář též zevrubný výklad o polynomech

$$Q_m = \frac{1}{m!\, 2^m h^m} \mathop{\Delta^m}_{h} [(x-a)_m (x-b)_m],$$

(v knize vyskytá se tisková chyba $\frac{d^m}{dx^m}$ místo $\mathop{\Delta^m}_{h}$), a o polynomech

$$G_s(m, x) = (-1)^s \frac{\Delta^s \psi(m, x-s)}{\psi(m, x)}, \quad \left(\psi(m, x) = \frac{m^x e^{-m}}{x!}\right),$$

jimiž se autor zabýval zevrubně již v dřívějších svých pracích uveřejněných v r. 1921 a 1926. Základy počtu pravděpodobnosti obsahuje kap. IV, v níž zvláštní pozornosti zasluhuje vyjádření momentů mocninných i faktorielních funkce $P_x = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ dále vyjádření P_x použitím polynomů Hermitových a výše uvedených polynomů $G_s(m, x)$ a srovnání výsledků takto obdržených s výsledky vykládanými obvykle v učebnicích počtu pravděpodobnosti.

Vlastní matematická statistika počíná kapitolou V. Z této partie třeba upozorniti zvláště na kapitolu IX. a X. Kapitola IX věnována jest použití metody momentů k vyjádření frekvenčních funkcí, kapitola X použití metody nejmenších čtverců k témuž účelu. V prvém případě kromě systémů ortogonálních polynomů Hermitových, Legendrových, polynomů Q a G výše zmíněných jsou to zejména frekvenční křivky Pearsonovy, o nichž pojednává autor dosti obšírně. Při aplikaci metody nejmenších čtverců uvedeny jsou opět polynomy Legendrovy a polynomy Q, jež splňují podmínky obou metod (o této vlastnosti jedná autor ve zvláštních poznámkách připojených na konci knihy), dále polynomy Hermitovy, nahradíme-li charakteristickou funkci $e^{-k^2x^2}$ funkcí $e^{-\frac{k^2}{2}x^2}$, polynomy G, nahradíme-li charakteristickou funkci $\psi(m, x)$ hodnotou $\sqrt{\psi(m, x)}$ a konečně řady Fourierovy funkcí trigometrických. V kap. XI. dotýká se autor krátce mechanického vyrovnání pozorovaných hodnot tvořením aritmetických průměrů (Woolhouse, Spencer) a vyrovnání metodou nejmenších čtverců použitím polynomů Q. Další kapitola (XII) věnována jest hetorográdní statistice o 2 a více proměnných znacích. Upozorňuji zejména na interressantní vyjádření frekvenční funkce dvou proměnných při normálním rozdělení frekvencí použitím polynomů Hermitových a polynomů G.

Již z uvedeného přehledného obsahu knihy Jordanovy jest patrno, že se jedná o vážné dílo založené na širokém podkladě, v němž shrnuty jsou a originelním způsobem podány hlavní výsledky vědeckého bádání v tomto oboru až do nejnovější doby. S hlediska ryzí matematiky stojí kniha na vysoké úrovni; veskrze jasné a dostatečně podrobné podání autorovo umožňuje však i čtenářům s menší erudicí matematickou přikročiti bez obav k studiu knihy. K tomu přispívá dále okolnost, že teoretické výklady téměř všude jsou doprovázeny četnými příklady s úplným numerickým řešením, čímž studium obtížnějších partií knihy podstatně jest usnadněno. Učebnice Jordanova shrnující též mnoho původních prací autorových obohatila značně odbornou literaturu statistickou. Jsem ubezpečen, že nejen začátečník, ale i ten, kdo s moderní matematickou statistikou jest dobře obeznámen, najde v knize mnoho nového a přečte ji s trvalým zájmem od počátku až do konce. *L. Truksa.*

Dr. Václav Lenz: **O převodních částkách v sociálním pojištění.** Rozpravy Jednoty pro vědy pojistné č. 4 str. 17.

Pojednání uveřejněné pod tímto titulkem, mající předmětem podle svého názvu otázku převodních částek v sociálním pojištění, zabývá se v části I premiovou reservou životního pojištění soukromého způsobem nevyčerpávajícím zdaleka látku, a nepřinášejícím vlastně nové myšlenky. Autor odvozuje ze známého vzorce pro premiovou reservu obvyklým postupem její diferenciální rovnici a tu potom integruje, aby dostal výraz opět známý. Při tom není funkce výplatní vůbec definována a jak jest z pozdějšího použití patrno, ani správně pojata. K odvození premiové reservy pro úplnou reservu podle Bergera, připomínám, že předpokladem Bergerovým jest jednak úplná shoda početních podkladů se skutečností a dále hypothesa, že není předčasných výstupů. Jinak nutno uvažovati řád „věrných" pojištěnců místo dekrementní tabulky žijících (viz Jörgensen Jahrb. f. Versich. Math. str. 253). Výklad o zillmerování, odkupní hodnotě a jejím stanovení stojí bohužel hluboko pod úrovní nejběžnějších učebnic (Loewy, Berger atd.) a obsahuje několik omylů, jež prokazují, že autor nezná bohaté literatury tohoto oboru. Aby odůvodnil na př. nižší určení odkupní hodnoty uvádí autor ze čtyř běžných odůvodnění právě odůvodnění v literatuře popírané. Je totiž i z elementárních učebnic (Loewy, Berger) známo, že nelze statisticky prokázati lepší zdravotní stav předčasně vystupujících pojištěnců, jak pan autor tvrdí, naopak tato t. zv. antiselekce, jež by měla za následek zhoršení stavu „věrných" pojištěnců, je popírána na př. statisticky Fredholmem na základě statistického materiálu „Scandie" nebo Besantem (J. I. A. XXXV)*) a důvody věcnými obsáhle Bergerem v učebnici, jíž pan autor sám cituje. Z toho důvodu se už dávno v odborné literatuře neodůvodňuje takto snížení odkupních hodnot, což by panu autorovi mělo býti známo.

V druhé části článku jest odvozena známá diferenciální rovnice pro premiovou reservu pojištění invalidního důchodu postupem, jejž nelze nazvati logickým. Integrál vyjadřující hodnotu důchodu jest derivován. Diferenciální rovnice pro premiovou reservu jest pak opět integrována. Samozřejmě ovšem vyjde známý elementární výsledek, zaměníme-li exponenciely výrazem D_x^{aa}, což pan autor by měl aspoň poznamenati. V nejlepším případě lze označiti tuto část za cvičení v derivování a v integrování nejjednodušších diferenciálních rovnic. Citát na str. 10. je nepřípadný, ježto Loewy zabývá se úvahami daleko obecnějšími. Výrazů odvozených pro invalidní důchod není dále vůbec použito a nejsou ani odvozeny touto metodou výrazy pro daleko složitější druhy ostatních nároků sociálního pojištění (nároky na důchody pozůstalých), jichž odvození působí ovšem jisté potíže, ale bylo by aspoň nové.

Třetí část, která vůbec nesouvisí s částí prvou a druhou, obsahuje v podstatě referát o pracích Schärtlinově a Küttnerově a o úředních pracích konaných matematickým oddělením Ústřední sociální pojišťovny při výpočtu tabulek převodních částek podle zákona č. 221/24.

Referát podává slovný výklad tam, kde resultují důsledky přímo z elementárních vzorců, což je v práci určené aktuárům zbytečno. Námět na str. 13, určiti koeficient tak, „aby byla zachována rovnováha mezi provedenými přestupy," není blíže vůbec sledován a je podle mého

---

*) Podle Besanta mělo 77% všech případů storna jím vyšetřovaných důvod v zhoršených poměrech hospodářských a více než 80% storen po třech letech pojištění týkalo se smluv, na něž byly poskytnuty zápůjčky.

úsudku v této formě neproveditelný. Míněno jest snad zachování rovnováhy ve stavu „věrných" pojištěnců. Myšlenka (nejasně stylisovaná), odložiti převody až do nastoupení pojistného případu a rozděliti pak břemena na súčastněné nositele pojištění v poměru dávek na ně připadajících, kterou končí pojednání, není nová. Pan autor měl snad upozorniti méně informovaného čtenáře, že je uskutečněna v Německu v pojištění zaměstnanců od r. 1913 pro přestupy mezi hlavním nositelem pojištění a náhradními pokladnami, a v jiné formě v poměru dělnického invalidního a zaměstnaneckého pojištění, a že byla opětovně uvažována i u nás.

Vadou této části referátu jest, že se vůbec nezmiňuje o spolupracovnících a zvláště o tom, že zásluhu o použití metody Küttnerovy a o samostatné odvození jejích výsledků má pan dr. Havlík. Bylo by velmi zlé pro naši odbornou literaturu, kdyby tento podivný postup — totiž zamlčeti spolupráci a zásluhy jiných — měl zobecniti.

Celkem lze označiti pojednání pana dra Lenze za nevyčerpávající a místy vadný referát o několika otázkách životních a sociálního pojištění, nepřinášející nových myšlenek. Dr. *E. Schoenbaum.*

Rozptyl škod v požárním pojištění budov. Statistická studie na podkladě průběhu škod u První české vzájemné pojišťovny (zal. r. 1827). Píše chef-matematik ústavu Lad. Cvetnič.

V pamětním spise První české vzájemné pojišťovny, vydaném v upomínku jejího výročí (r. 1928) jest obsažena výše uvedená cenná studie o průběhu a povaze škod požárního pojišťování budov. Na podkladě statistického materiálu získaného zkušeností svého ústavu po dobu dlouholetého (1827—1927) provozování tohoto pojištění, zabývá se autor studiem disperse škod za tím účelem, aby zjistil, jak dalece frekvenční čísla škod mají charakter statistických pravděpodobností. Pomocí opatrně volených hypotes o intensitě $f(x)\,dx$ pro nastoupení škody v mezích hx až $h(x + dx)$ a o intensitě $\varphi(y)\,dy$ pojištěných částek v mezích hy až $h(y + dy)$ stanoví průměrné střední risiko R, připadající na jednotku pojištěné částky; teoretická pravděpodobnost, že diference mezi průměrnou frekvencí škod a mezi skutečnou frekvencí některého roku nepřevýší $|\varepsilon| = \gamma R\sqrt{2}$, jest dána hodnotou

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\,dt;$$

z toho plyne, že teoretická četnost těchto čísel $|\varepsilon|$ v n letech v mezích $\pm\,\gamma R\sqrt{2}$ jest dána číslem $n\,\Phi(\gamma)$. Pro jednotlivé skutečně pozorované hodnoty $|\varepsilon|$ stanoví pak hodnoty γ, jichž uspořádáním podle velikostí dostává četnost $|\varepsilon|$ v určitých mezích. Tu pak porovnává s teoretickou četností $n\,\Phi(\gamma)$, a dochází k výsledku, že skutečná četnost značně liší se od teoretické. Z toho uzavírá, že frekvence škod nemají charakteru statistických pravděpodobností a zdůrazňuje jako důsledek velikou nebezpečnost požárního pojištění a ukazuje na nutnost vybudování dostatečně silného bezpečnostního fondu.

Pojednání je velmi cenným obohacením naší, v tomto oboru dosud velmi chudé literatury; váha a důležitost jeho zvyšována jest okolností, že statistický materiál, z něhož vychází, jest čerpán ze zkušeností českého ústavu a tedy výsledky mohou býti bezprostředně aplikovány na naše poměry. Dr. *A. Zelenka.*