Aktuárské vědy

Vilém Havlík

Über die Bedeutung und Anwendung der Nomogramme in der Versicherungsmatematik

Aktuárské vědy, Vol. 1 (1930), No. 1, 13–21

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144502

month of August in the years 1753—1857 in Lund[1]) by means of the series (16). The constants corresponding to the series are

$$
\begin{array}{llllll}
m = 2, \ \mu_0 = 18.869 & & \mu_1 = & 29.098 & \mu_2 = & 69.618 \\
A_1 = 1.727 & & A_2 = & 2.791 & B_2 = & 3.932 \\
\alpha_0 = 18.869 & & \alpha_1 = & -\ 3.489 & \alpha_2 = & 7.868 \\
\beta_0 = 0.207 & & \beta_1 = & 0.211 & \beta_2 = & 0.432 \\
a_0 = 91.15 & & a_1 = & -\ 16.53 & a_2 = & 18.21
\end{array}
$$

The values in the column 5 given by Charlier on the page 30 of his mentioned book were calculated for $m = 2.133$. The expression by means of the series (16) is better fitting than that of Charlier.

Tab. 4.

x	y_x	$y_x\,\psi(2, x)$	Series (16) incl. polynomial of the 2. degree	Charlier's series incl. polynomial of the 2. degree	x
1	2	3	4	5	6
0	24	3.248	23.1	24.8	0
1	26	7.037	27.2	28.2	1
2	19	5.143	18.2	15.9	2
3	13	2.346	12.6	10.2	3
4	9	0.812	10.1	9.5	4
5	6	0.216	6.7	7.9	5
6	5	0.060	3.6	4.6	6
7	2	0.007	1.5	2.5	7
8	0	0.000	0.5	0.7	8
9	0	0.000	0.2	0.3	9
10	0	0.000	0.0	0.1	10
11	1	0.000	0.0	0.0	11

Über die Bedeutung und Anwendung der Nomogramme in der Versicherungsmatematik.

Dr. V. Havlík.

In der letzten Zeit scheint es noch fraglich zu sein, ob man in der Praxis der Versicherungsmathematik graphische Rechnungsmethoden und Rechentafeln gebrauchen könnte und sollte. Einige Versicherungsmathematiker weisen richtig darauf hin, dass in allen Wissenschaftszweigen, welche mit einer häufigen Anwendung in der täglichen Praxis

[1]) See L. Charlier: Vorlesungen über die Grundzüge der mathem. Statistik, p. 83 and 84.

zu rechnen haben, der Gebrauch von mechanischen Rechenhilsmitteln und daher auch von graphischen Tafeln und auf ihnen beruhenden Rechenmethoden immer mehr vordringt.

Man muss sich aber den allgemeinen Sinn und Vorteil dieses Gebrauches und insbesondere die Bedeutung der nomographischen Rechenweise für die in der versicherungsmathematischen Praxis vorkommenden Rechenvorgänge klarlegen.

Um das eingehende Studium der ganzen Theorie der Nomographie und aller ihrer Spezialisationen denjenigen Versicherungsmathematikern, welche erst nach dieser ersten Information zu der oben gestellten Frage Stellung nehmen sollten, vorläufig zu ersparen, sei zuerst kurz die Entwicklung und Gestalltung der Nomographie und der Nomogramme dargestellt.

Es sind wohl verschiedene „geometrische Lösungen" von einigen speziellen Aufgaben bekannt. Sie beruhen häufigst auf den Hauptregeln der elementaren Geometrie der Ebene. Es ist da sehr bald der Gedanke zur Geltung gekommen, die schon einmal vollgezogenen Lösungen derselben Aufgabe und desselben Lösungsvorganges für mehrere veränderliche Parameter der betreffenden Gleichung zu sammeln und in einer einzigen Tafel — Rechentafel — zweckmässig darzustellen.

Ein weiterer Schritt ist durch die Forderung hervorgerufen worden, es solle solche Disposition der oben erwähnten Lösungen konstruirt werden, mittels welcher man bei der Lösung z. B. irgend einer Gleichung.

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

zwischen den Lösungen für zwei bestimmte Gruppen der Veränderlichen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ durch Interpolation mit freiem Auge zu irgendwelchen Werten der Veränderlichen $\alpha_1 + \Delta$ und $\beta_1 + \delta$, wobei

$$|\Delta| < |\alpha_2 - \alpha_1|,$$
$$|\delta| < |\beta_2 - \beta_1|,$$

den Wert der Veränderlichen $\gamma_1 + d$ feststellen könnte, für welchen die Gleichung

$$F(\alpha_1 + \Delta,\ \beta_1 + \delta,\ \gamma_1 \mp d) = 0$$

auch besteht.

So wurde man zur folgenden Aufgabe hingeführt: Es sind in einer Ebene Systeme von geometrischen, zeichnerisch darstellbaren Elementen (Punkte, Kurven, Geraden) so zu konstruiren, dass man durch eine bestimmte Koordination dieser Elemente untereinander solche Gruppe bestimmter Parameter ihrer Systeme ${}_0t_1, {}_0t_2, {}_0t_3, \ldots {}_0t_n$ finden kann, dass sie die Lösung der Gleichung

$$F({}_0t_1, {}_0t_2, {}_0t_3, \ldots {}_0t_n) = 0$$

darstellen.

Die parametrischen Gleichungen der erwähnten Systeme sind in den Kartesischen Koordinaten z. B. folgenderweise darstellbar:

1. Punktreihe $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$,
2. Kurvenschaar $F(x, y, t) = 0$,
3. Geradenschaar $f(t) \cdot x + g(t) \cdot y + h(t) = 0$.

Eine einfachste und immer leicht konstruirbare graphische Rechentafel bietet die Lösung der Aufgabe, eine Tafel für eine Gleichung mit zwei veränderlichen

$$F(\alpha, \beta) = 0 \tag{1}$$

zu finden. Diese muss nur dann auf analytische Lösungsweise hingeführt werden, wenn es nicht gelingt die Gleichung (1) in die Form

$$f(\alpha) = g(\beta)$$

zu bringen. Ist es dieser Fall, so bekommt mann als Rechentafel eine Gerade als Träger zweier Punktreihen mit den Parametern α und β; zu jedem Punkte dieser Gerade sind dann leicht als Coten die beiden Werte α_0 und β_0 zu finden, welche die Lösung der Gleichung (1) darstellen. Solche graphische Tafeln finden sehr häufige Anwendung in der Praxis der Technischen Wissenschaften; es wurde z. B. von Tichi auch eine graphische Logarithmentafel konstruirt. In der Praxis der Versicherungsmathematik kommen Gleichungen mit zwei Veränderlichen nicht so häufig vor, wie die mit drei und mehr Veränderlichen.

Eine wichtige Gruppe von Nomogrammen bilden diejenigen für die Gleichungen mit drei Veränderlichen. Die erste der beiden Arten von solchen graphischen Tafeln sind die Kurvenkreutzungsrechentafeln. Es sei die Aufgabe, solche parametrische Gleichungen dreier Kurvenscharen

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y, \alpha) &= 0, \\ \Phi_2(x, y, \beta) &= 0, \\ \Phi_3(x, y, \gamma) &= 0 \end{aligned}$$

zu finden, dass durch Elimination der Koordinaten x und y die Gleichung

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \tag{2}$$

entsteht. Es treffen dann in einem einzigen Punkte diejenigen Kurven von drei Systemen, deren Parameter α, β, γ die Lösung von (2) darstellen. Ist es möglich die Gleichung (2) in der Form

$$\begin{vmatrix} f_1(\alpha), g_1(\alpha), h_1(\alpha) \\ f_2(\beta), g_2(\beta), h_2(\beta) \\ f_3(\gamma), g_3(\gamma), h_3(\gamma) \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

darzustellen, so kommt man zur Lösung durch drei Geradenschaaren:

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) \cdot x + g_1(\alpha) \cdot y + h_1(\alpha) &= 0, \\ f_2(\beta) \cdot x + g_2(\beta) \cdot y + h_2(\beta) &= 0, \\ f_3(\gamma) \cdot x + g_3(\gamma) \cdot y + h_3(\gamma) &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Als Beispiel ist in der Fig. 1 schematisch eine Lösung der Gleichung

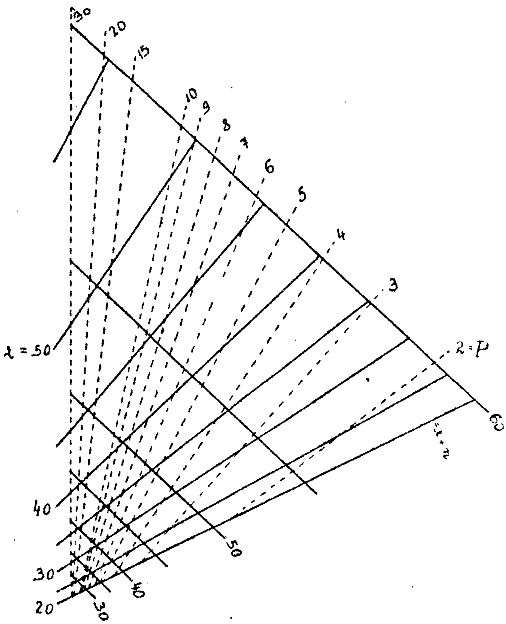
$$P = 100 \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

für die Jahresprämie der gemischten Versicherung dargestellt. Die Gleichungen der Geradenschaaren sind die folgenden

$$\begin{aligned} P \,.\, x + y &= 0, \\ M_x \,.\, x + N_x \,.\, y + 1 &= 0, \\ (M_{x+n} - D_{x+n}) \,.\, x + N_{x+n} \,.\, y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Fig. 1.

$$P = 100 \; \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$



Die zweite Art — sog. Fluchtlinien- oder Kollineare Rechentafeln gebraucht als Elementensysteme drei Punktreihen und als Koordinationsvorgang die Situirung der Punkte, deren Parameter α_0, β_0, γ_0 sind, auf einer bestimmten Linie. Ist diese Linie eine Gerade, so muss die Gleichung (2) in die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(\alpha), \psi_1(\alpha), 1 \\ \varphi_2(\beta), \psi_2(\beta), 1 \\ \varphi_3(\gamma), \psi_3(\gamma), 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

transformiert werden können. Die parametrischen Gleichungen der Punktreihen sind dann

$$x = \varphi_1(\alpha) \quad y = \psi_1(\alpha),$$
$$x = \varphi_2(\beta) \quad y = \psi_2(\beta), \tag{6}$$
$$x = \varphi_3(\gamma) \quad y = \psi_3(\gamma).$$

Mehrere Beispiele für die Anwendung dieser Art von Nomogrammen in der Versicherungsmathematik findet der Leser in der Publikation von J. Riedel: „Eine Sammlung von graphischen Rechentafeln der Versicherungsmathematik“ (Wien 1925 u. 1926).

Einen Übergang zu den Nomogrammen für Gleichungen mit mehreren Veränderlichen bietet eine kleine Abänderung der letztbenutzten parametrischen Gleichungen der Punktreihen. Die Gleichungen

$$x = \varphi(\alpha, \beta), \quad y = \psi(\alpha, \beta) \tag{7}$$

sind nähmlich parametrieche Gleichungen der Kreutzungspunkte von Kurven, die zu zwei Kurvenschaaren mit den Parametern α, β gehören. Durch Elimination eines dieser Parameter aus den beiden Gleichungen bekommt man die Gleichung der Kurvenschaar des zweiten Parameters. Man kann also auf diese Art und Weise die drei Kreutzungspunkte der sechs paarweise kreutzenden Kurvenschaaren, die durch Gleichungen, welche den Gleichungen (6) resp. (7) analog sind, dargestellt werden können, in der oben erwähnten Weise koordinieren, indem die Kreutzungspunkte der Kurven α_i, β_i auf der Koordinationslinie zu situiren sind. Ist die Koordinationslinie eine Gerade, so kommt man zur Gleichung der Form

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(\alpha_1, \beta_1), \psi_1(\alpha_1, \beta_1), 1 \\ \varphi_2(\alpha_2, \beta_2), \psi_2(\alpha_2, \beta_2), 1 \\ \varphi_3(\alpha_3, \beta_3), \psi_3(\alpha_3, \beta_3), 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

Für die Versicherungsmathematik ist von grossem Interesse die Lösung von Gleichungen mit mehr als drei Veränderlichen. Hiefür hat man viele und mannigfaltige Hilfsmittel gefunden, die aber doch noch weit nicht hinreichen alle spezielle Wünsche zu befriedigen. Es kommen da zwei Richtlinien in Betracht: Die erste bedient sich mit Hilfsveränderlichen wobei die Gleichung

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$$

durch ein System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} F_t(\alpha_1, \quad \alpha_2, t) &= 0 \\ F_u(\alpha_3, \quad t, \quad u) &= 0 \\ F_w(\alpha_4, \quad u, \quad w) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ F_z(\alpha_{n-1}, \alpha_n, z) &= 0 \end{aligned}$$

zu ersetzen ist, so dass z. B. bei einer Gleichung mit vier Veränderlichen fünf Kurvenschaaren zu bilden sind. Man verfolgt die durch den Kreutzungspunkt der Kurven α_0, β_0 gehende Hilfslinie t_0 bis zu ihrem Kreutzungspunkte mit der Kurve γ_0 und hier findet man die diesen Punkt treffende Kurve δ_0. Ein analogischer Vorgang wird bei den

Fluch-tlinientafeln benützt. Bei einer grösseren Anzahl von Veränderlichen ist es ein mühesammer Weg, welcher auch die Gefahr einer bedeutenden Vergrösserung der Fehler mitbringt.

Die zweite Richtlinie bestrebt womöglich viele spezielle nomographisch lösbare Gleichungen zu finden. Eine Gleichung wurde schon in der Gleichung (8) gezeigt. Es soll da nur auf eine Art von Nomogrammen hingewiesen werden, die übrigens bei irgendwelchen Reduktion von Elementensystemen auf die schon vorgebrachten Arten zurückgeführt werden kann. Bei dieser Art von Nomogrammen, welche Superpositionsnomogramme genannt werden können, wird die Koordination zwischen Elementensystemen zweier in allgemeinem übereinander gelegenen Ebenen ausgeübt. Dabei muss eine eindeutige Position der Koordinatensysteme der beiden Ebenen gesichert werden. Diese Art von Nomogrammen bietet eine Gelegenheit zu manigfaltigsten Kombinationen in der Koordination der Elemente, um viele weitere lösbare Gleichungen zu erreichen. Wichtig ist aber dabei, dass man hier zu Gleichungsen mit einer grossen Anzahl von Veränderlichen gelangt, so dass die Bahn für die günstigste Spezialisation frei ist.

Diese speziellen Type von Nomogrammen zu erörtern, ist im Rahmen eines informativen Artikels nicht möglich. Es ist in diesem Überblicke nur auf diejenige Spezialisationen aufmerksam zu machen, welche von verschiedensten Typen der Nomogramme direkt oder indirekt zu Rechenschiebern führen. Ihre Grundidee hat wohl ein jeder Praktiker am logarithmischen Rechenschieber kennen gelernt. Es gibt mehrere Arten der Rechenschieber, von denen die meisten alle Gleichungen von der Form:

$$\Sigma f_{ik} (\alpha_i, \alpha_k) = 0$$

lösen.

Dazu ist zu bemerken, dass die Rechenschieber am besten den Weg zeigen, welchen die praktische Anwendung der Nomographie in allen Anwendungen der Mathematik suchen und finden muss; den Weg zur grössten Mechanisierung oder sozusagen Maschinisierung der graphischen Rechenhilffsmittel.

Als ein Beispiel sei hier ein „Universalrechenschieber“ für die Grundelemente aller versicherungsmathematischen Berechnungen dargestellt. Diese Elemente können folgenderweise geschrieben werden:

$$k = c \frac{F_z}{D_x}, \quad k = c \frac{F_z}{N_x - N_y}, \tag{9}$$

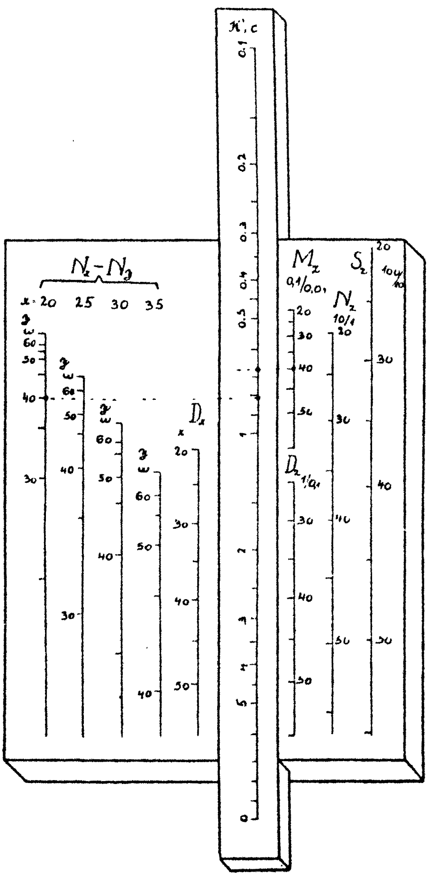
wo der Funktion F_z eine der Funktionen $D_z, N_z, M_z, \ldots$ usw. gleich zu setzen ist. Durch logarithmische Transformation der Gleichungen (9) und Anwendung des Prinzipes des gewöhnlichen Rechenschiebers bekommt man eine einfache Lösung, welche in der Fig. 2 schematisch dargestellt ist. Die Adjustierung des Rechenschiebers ist noch in einfacheren Formen möglich. Die Anwendung diesen Rechenschiebers ist die folgende: die Zunge wird so weit ausgeschoben, dass der Punkt c_0

mit dem Punkte z_0 z. B. auf der M_z-Skala koinzidiert. Zu dem Werte k_0 gelangt man dann mittels Koinzidenz des Punktes x_0 auf der D_x-Skala und Multiplikation des zugehörigen Wertes, der von der k-Skala abzulesen ist, mit dem ersten der Faktore (0·1, 0·01), welche der M_z-Skala hinzugefügt sind. Bei der Lösung des zweiten Gleichungstypus von (9), welche in analogischer Weise mittels der Skalen, die unter der Überschrift $N_x - N_y$ gruppiert sind, fortgeführt werden, multipliziert man mit dem zweiten der Faktore.

Fig. 2.

1. $k = c\,\dfrac{F_z}{D_x}$

2. $k = c\,\dfrac{F_z}{N_x - N_y}$



Bei der Betrachtung der Frage, ob und in welcher Weise und Maass es möglich und vorteilhaft ist, bei der Praxis der Versicherungsmathematik nomographische Rechentafeln zu benutzen, ist es zuerst zu betonen, dass die meisten versicherungsmathematischen Funktionen und Berechnungen auf empirischen statistischen Funktionen beruhen. Die Grundzahlen tragen infolgedessen ein Gepräge von Funktionen, welche einen gewissermaasen unregelmässigen, analytisch schwer darstellbaren Verlauf vorweisen, und zeichnerisch in der Regel nur punktweise aufgetragen werden können.

Bei einer jeden Konstruktion von Rechentafeln ist also zu erwägen, ob die Investitionsarbeit für ihre Konstruktion, wenn sie eine grössere Anzahl von Berechnungen benötigt, entweder geringer ist, als diejenige für die numerische Rechentafel, oder ob die weitere Arbeits- und Zeitersparniss eventuelle Schwierigkeiten der Konstruktion als geringfügig zu betrachten erlaubt. Bei dem ersten Einblicke in die vorangehenden Beispiele wird es wohl klar sein, dass, was die tägliche Praxis anbelangt, die numerischen Tafeln in einem Teile vielleicht vorteilhafter scheinen werden. Es ist aber auf die wohlbekamten Argumente hinzuweisen, bei denen der Umfang der graphischen Rechentafeln und ihre Reduktion z. B. bis zu Rechenschiebern, die einfache und schnelle Handhabung und die Weise der Interpolation hervorgehoben wird.

Dagegen ist der Vorteil der graphischen Rechentafeln unbestreitbar, wenn es sich um Rechentafeln mit einer grösseren Anzahl von Veränderlichen handelt. Die numerischen Rechentafeln gelangen da einerseits zu einem grösseren Umfange, oder andererseits benötigen ihre Resultate eine weitere rechnerische Behandlung. Die graphischen Rechentafeln dürfen nie zu einem grossen Umfange gelangen und bei ihrer Anwendung soll eine jede Lösung schnell und mittels einfachen Operationen erreicht werden — und zwar in der Regel das Endresultat. Solche Gleichungen mit mehreren Veränderlichen kommen in der Praxis des inneren Betriebes vor und zwar am meisten einerseits z. B. bei der Berechnung von Prämienreserven einer Kollektivversicherung, wo die Versicherten in Klassen eingeteilt sind und ihr Versicherungsverlauf sich mannigfaltig gestaltet, und anderseits bei der Berechnung von Tarifen und ähnlichen Arbeiten. Bei diesen Arbeiten wird aber der weitere Vorteil in Vordergrund treten, und zwar die Möglichkeit den ganzen Verlauf der einzelnen Grund- und Gesammtfunktionen zu verfolgen. Eine numerische Tafel wird diese Möglichkeit erst dann bieten, wenn sie durch eine Differenzentafel ergänzt wird. Die Herstellung solcher Tafeln, deren je bei einer Gleichung mit mehreren Veränderlichen eine grosse Anzahl nötig ist, ist sehr zeittraubend. Die Information über den Verlauf der Funktionen ist da aber nie so klar, belehrend und zusammengefasst, wie bei einer graphischen Rechentafel, wo sie auch keine Detailberechnung benötigt. Es ist zu bemerken, wenn bei der Konstruktion der Rechentafel die Absicht den Verlauf der Funktionen zu verfolgen besteht, dass die Kurvenkreutzungsnomogramme den besten Weg dazu bieten.

Bei der Konstruktion der Rechentafel soll immer die Rücksicht darauf genommen werden, dass man die Resultate schnell, durch einfache Manipulation und ohne irgendwelche weitere rechnerische Operationen erlangen soll. Es soll auch immer eine Interpolation bei den sämtlichen Veränderlichen leicht vollgezogen werden können. Die numerischen Rechentafeln entsprechen nicht immer allen diesen Forderungen und benötigen am meisten noch Ergänzung durch rechnerische Operationen, welche erst mittels Maschinenrechnen beschleunigt werden können, sonst aber doch die ganze Operation verlängern und komplizieren.

Es ist schon bei der Anwendung von graphischen Rechentafeln in den anderen Wissenschaftszweigen — auch in der Finanzmathematik — geprüft und bewiesen worden, dass sich diese Rechentafeln grösstensteils eng dem soeben erwähnten Ziel annähern. Es besteht nun die Aufgabe auch für die Versicherungsmathematik diejenigen Type von Nomogrammen zu finden, welche den Zwecken und der Gestalltung der Praxis entsprechen. Es wäre ein Missverständnis, wenn man denken sollte, dass dieses Bestreben unter der Devise stehen soll, die numerischen Tafeln überhaupt zu beseitigen. Dieses Bestreben bestand nicht bei der Einführung des Maschinenrechnens und soll auch hier nicht bestehen, wo es sich eigentlich nur um eine Erweiterung der Hilfsmittel zur göstmöglichen Mechanisierung der Rechenvorgänge der Praxis handelt.

Dieser Artikel soll im Anschlusse an andere Arbeiten die Anregung zur Vertiefung des Studiums und zur Ausbreitung des Verwendungsgebietes dienen. Es ist die Sache der Praktiker der einzelnen Versicherungszweige die Möglichkeit und Form der Anwendung von graphischen Rechentafeln und von ihnen stammenden Rechenhilfsmitteln zu prüfen.

The development of population in the Czechoslovak Republic.

Dr. Jar. Stránský. — Jar. Bulina.

Solving the problems of social insurance, particularly when we take into consideration the generations which will enter the insurance in the future, it is necessary to know not only the state of the present population, but also to make a supposition about its development in the future. It is natural that the development of population in the past is of great importance for the choice of this supposition; to be able to draw conclusions on the future we first have to know the past.