

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Emilie Těšínská

Albert Einstein a století obecné relativity

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 60 (2015), No. 3, 215–238

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/144417>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2015

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Albert Einstein a století obecné relativity

Oldřich Semerák, Praha

Bylo jaro 1916 a z Berlína se do Evropy dál valilo zlo. Ve službě vlasti se předháněli i němečtí akademici, k oslavám boje se nechali strhnout dokonce Thomas Mann či R. Maria Rilke.¹ Právě takové ovzduší bylo Einsteinovi ze všeho nejvíc odporné. Velikonoční návštěva rodiny v Curychu dopadla špatně a on řešil na dálku vleklý rozvod se svou ženou Milevou. Ta navíc záhy onemocněla a ke všemu i jejich pětiletý syn Eduard. Říší se šířil hladomor a Einstein i při péči sestřenice Elsy nestrádal jen díky podpoře přátel a příbuzných ze Švýcarska a Švábska. Navzdory tomu všemu cítil uspokojení; 14. května psal Michelu Bessoovi do patentového úřadu v Bernu: „... Pracuji toho času opravdu střídavě, takže je mi blaze a žiju si poklidně, bez neladu. V gravitaci teď hledám okrajové podmínky v nekonečnu; je ale zajímavé rozmýšlet, zda existuje konečný svět, tj. svět konečného přirozeně měřeného rozsahu, v němž je všechna setrvačnost skutečně relativní. Dnes byl pohřeb Schwarzschilda, ředitele observatoře v Postupimi. Určitě jsem Ti o něm už vyprávěl; je ho škoda. Byl by býval perlou, být tak stejně slušný, jako byl chytrý...“

Einstein psal o poklidu po nejvš tvůrčivém období — po letech zápolení s novou teorií gravitace; v březnu ji konečně shrnul do pojednání *Základy obecné teorie relativity* (Annalen der Physik 49, 769–822).

1. Odpočívaje ve svém vesmíru

Byl to zvláštní typ odpočinku. Einstein odvodil linearizovaný gravitační zákon a sepsal první pojednání o slabých gravitačních vlnách (červen), a dále dva přelomové příspěvky ke kvantové teorii světla (červenec, srpen). V jednom zavedl pro emisi a absorpci záření molekulou koeficienty A a B a odvodil Planckův zákon z Boltzmannova rozdělení pro (kvantované) molekulové stavy. V druhé práci ukázal, že emise záření se neděje ve sférických vlnách, že kvanta světla musejí přenášet hybnost (o 10 let později se jim začalo říkat *fotony*); v odstavci o indukované emisi připravil půdu pro laser — a v odstavci o spontánní emisi uvedl do kvantové hry náhodu. Práce končí i slovy: „Slabí nou teorie . . . také je, že ponechává okamžik a směr elementárních procesů ‚náhodě‘. Nicméně nastoupené cestě plně důvěřuji.“ Současně vznikl také článek *Elementární teorie vodních vln a letu*, vysvětlující ptačí schopnosti. Již Besso našel v citovaném dopisu náčrt nového profilu křídla s proudnicemi obtékající tekutiny. (Křídlo nebylo

¹Ferdinand Peroutka se tou dobou snažil vyhnout odvodu.

komerčně úspěšné — zkušební piloti vyvázli jen taktak.) V říjnu následovalo variační odvození polních rovnic, doplňující postupy Hilberta a Lorentze, a v prosinci pak (komerčně velmi úspěšná) kniha *O speciální a obecné teorii relativity. Všeobecně srozumitelné*. Od listopadu 1915 do února 1917 Einstein publikoval 15 vědeckých prací. Mezitím dál uvažoval o konečném světě. . .

Pohřeb Schwarzschilda pro něj nebyl toho roku prvním. V únoru 1916 zemřel Ernst Mach, se kterým v duchu i poštou průběžně konzultoval cestu ke speciální i obecné relativitě. Einstein to také zmínil v nekrologu: „Není nepravděpodobné, že by Mach býval přišel na teorii relativity, pokud by v jeho době — když byl svěží a mladického ducha — fyziky vzrušovala otázka významu konstantnosti rychlosti světla.“ Právě v následujících dvou letech měly Einsteina „machovské“ úvahy provázet na každém jeho vesmírném kroku. Do jaké míry je geometrie určena hmotou a do jaké hraničními podmínkami? ptal se i v dopisu Bessoovi. Energická a věcná oponentura Willema de Sittera proti jeho „machovským“, a přesto metafyzickým „vzdáleným hmotám“ přivedla Einsteina ke konci roku 1916 k tomu, že svým polním rovnicím pomohl (zcela „ne-machovským“) kosmologickým členem ke statickému řešení. V souladu s intuící kladné křivosti, odpovídající přitažlivé gravitaci, je to řešení prostorově konečné, přitom bez hranice, takže setrvačnost je v něm možno nahlížet plně jako důsledek vzájemné interakce těles; a žádné místo není privilegované. Dne 4. února 1917 ohlašuje Einstein svému příteli Paulu Ehrenfestovi: „... Také jsem zase v teorii gravitace spáchal něco, co mě poněkud vystavuje hrozbě zavření do blázince. Doufám, že v Leidenu žádné nejsou, takže Tě budu moci znovu bezpečně navštívit.“

Einstein byl tou dobou dost nemocný (játra, žaludek), ale korespondence ho zajímala — a de Sitter ho nešetřil: „Není možné, že vysvětlení setrvačnosti je nakonec nutno hledat v nekonečně malých spíše než nekonečně velkých rozměrech?“ nebo „No dobře, pokud svou koncepci nechcete nutně spojovat s realitou, pak je mezi námi souhlas.“ ... V březnu 1917 navíc de Sitter nachází řešení rovnic s kosmologickým členem v podobě křivého, a přitom prázdného prostoru. Einsteina zneklidňuje, že by takový „antimachovský“ svět měl být možný: „Pole $g^{\mu\nu}$ by mělo být plně určeno hmotou, a nikoli schopné existovat bez hmoty.“ Pak se zmiňuje o předpokladu, že svět je mechanicky kvazistacionární. De Sitter rozhodně protestuje: „Máme k dispozici jen momentku vesmíru a nemůžeme a nesmíme z toho, že na ní nevidíme žádné velké změny, vyvozovat, že vše zůstane provždy stejné jako v okamžiku, kdy byl snímek pořízen.“

Na ruské straně válečné fronty působil v tu dobu jako dobrovolník Alexandr A. Friedmann, po válce profesor matematiky, fyziky a meteorologie na několika ruských univerzitách. O 5 let později, 29. května 1922, posílá do *Zeitschrift für Physik* článek *O křivosti prostoru*, v němž řeší Einsteinovy rovnice (i s kosmologickým členem) pro homogenní a izotropní vesmír vyplněný látkou, přičemž předpokládá kladnou konstantní křivost prostoru. Odvozuje rovnici, která dnes nese jeho jméno, a diskutuje ji metodou efektivního potenciálu. Dochází k různým možnostem vesmírného vývoje, speciálně rozlišuje monotónně expandující případy a případ periodický. Nalézá tak širokou třídu dynamických řešení, která obsahuje Einsteinův statický vesmír jen jako speciální „výjimku“ a de Sitterův vesmír jako limitní případ bez látky. V diskusi Friedmann užívá „čas od vzniku světa“ — jako „čas, který uplynul od okamžiku, kdy byl prostor jedním bodem, do dnešního stavu“; poznamenává, že tento čas je možná

nekonečný. V závěru článku dodává, že kosmologická konstanta Λ zůstává jako vnější parametr neurčena, a uvádí jako příklad, že pokud by byla nulová a vesmír by celkově obsahoval hmotnost $5 \cdot 10^{21}$ Sluncí, pak by byl periodický a perioda by trvala asi 10 miliard let. V listopadu 1923 Friedmann přidává druhý článek, v němž doplňuje třídu řešení se zápornou konstantní křivostí prostorových řezů. Ukazuje, že pro kladnou hustotu hmotnosti nepřipouští tato třída statický model, že však obsahuje protějšek de Sitterova vesmíru (dnes označovaný jako anti-de Sitterův vesmír). Uzavírá, že znalost prostorové křivosti sama nestačí k rozhodnutí, zda je vesmír konečný nebo nekonečný.

V roce 1927 pak Georges Lemaître analyzoval případ s kladnou kosmologickou konstantou, látkou i izotropním elektromagnetickým zářením (bohužel v poněkud zapadlých Análech Bruselské vědecké společnosti). Odvodil vztah pro vývoj hustoty látky a záření a diskutoval expandující modely, které začínají perturbací Einsteina statického případu. Především však odvodil vztah pro kosmologický frekvenční posun a vyslovil přesvědčení, že červené posuny spektra pozorované u „extragalaktických mlhovin“ jsou důsledkem rozpínání vesmíru.² Na závěr dodává: „Zbývá nalézt příčinu vesmírné expanze.“ Relativistický obraz vesmíru je v hrubých rysech hotový. O převaze červených posuvů se tou dobou skutečně vědělo, dokonce už nějakých 10 let: v srpnu 1914 Vesto Slipher oznámil, že z 15 mlhovin, které proměřil, jich 11 vykazuje zřetelný posun do červena. Do roku 1917 se skóre zvýšilo na 21:4 ve prospěch vzdalujících se mlhovin. (Na základě toho, že blízké hvězdy žádný systematický posun nevykazují, Slipher usoudil, že s námi tvoří společný systém, zatímco vzdalující se mlhoviny jsou podobné „cizí“ systémy.) Především ze Slipherových měření vycházel i Lemaître ve svém článku; tou dobou již vykazovala (ne)poměr 38:5.

Edwin P. Hubble vystudoval práva v Oxfordu, ale rok po škole, zpět v Americe (právě když v Evropě začínala válka) „... jsem s nimi praštil kvůli astronomii; věděl jsem, že i když v ní budu druhou nebo třetí třídou, je to astronomie, na které mi záleží.“ Do roku 1924 Hubble sesbíral dost důkazů pro to, že „mlhoviny“ jsou skutečně jiné, vzdálené vesmírné ostrovy, podobné naší Galaxii. Do roku 1929 pak zvýšil „skóre“ jejich frekvenčních posunů na 40:6 a potvrdil, že Slipher, de Sitter, Friedmann a Lemaître měli pravdu — náš vesmír se rozpíná. 29. ledna 1931 navštívili Hubblea na jeho observatoři Mount Wilson v jižní Kalifornii manželé Einsteinovi. Zatímco Einstein se západem prolézal dalekohled, Else vysvětlovali, jak tímto mohutným přístrojem zkoumají uspořádání vesmíru. Odvětila prý: „Hm, to můj manžel dělá na zadní straně staré obálky.“

2. Bern a Praha: princip ekvivalence

Na svou obecnou teorii však Einstein spotřeboval obálky mnohem víc než v roce 1905 na teorii speciální. Článek *O elektrodynamice pohybujících se těles* dle svých vzpomínek sepsal za 5 nebo 6 týdnů, ale cesta k obecné relativitě trvala 8 let a nebyla nijak přímá. Když připravoval na podzim 1907, stále ještě jako zaměstnanec Patentového úřadu v Bernu, přehledovou stať *K principu relativity a závěrům z něj vyvozeným*

²Usoudil dokonce na vztah mezi dopplerovsky interpretovaným posunem a vzdáleností, který však měl být později připisován Hubbleovi. V anglickém překladu francouzského originálu z roku 1931 totiž přesně tato pasáž a klíčová část vzorečku chybějí...

pro Ročenku radioaktivity a elektroniky, doplnil na poslední chvíli kapitolu *Princip relativity a gravitace*, kterou začíná stručným návrhem na zobecnění Galileiho univerzality volného pádu na univerzalitu gravitace vůbec: (i) jsou-li v daném gravitačním poli všechna tělesa urychlena stejně, lze toto zrychlení „nasimulovat“ urychlením vztažné soustavy; (ii) v následující diskusi proto předpokládáme úplnou fyzikální ekvivalenci gravitačního pole a odpovídajícího zrychlení vztažné soustavy. A pokračuje: „Tento předpoklad rozšiřuje princip relativity na rovnoměrně zrychlený translační pohyb referenčního systému. Heuristická hodnota předpokladu spočívá v tom, že dovoluje nahradit homogenní gravitační pole rovnoměrně zrychleným vztažným systémem, kterýžto je ve větší míře přístupný teoretickému zpracování.“ Podtržení jsme dodali my, abychom zdůraznili, že Einstein si byl od počátku vědom, že zrychlením systému se dají nahradit pouze vlivy intenzity pole, nikoli její případné nehomogenity (druhé derivace potenciálu). Na základě zformulovaného principu ekvivalence pak Einstein v závěru článku předpovídá efekty dilatace času, posunu frekvence a ohybu světla v gravitačním poli.

Další kroky směrem k nové teorii gravitace jsou spojeny až s Prahou a Viničnou ulicí, kde Einstein zastával od dubna 1911 do července 1912 místo profesora v Ústavu teoretické fyziky německé Karlo-Ferdinandovy university. Především se vrátil k prin-



Obr. 1. „Nejšťastnější nápad mého [Einsteinova] života“: v homogenním gravitačním poli se vzhledem k volně padající soustavě všichni tito volní pánové pohybují (či dokonce stojí) bez zrychlení. (René Magritte: Golconde, 1953)

cipu ekvivalence a podrobněji z něj odvodil gravitační posun frekvence a ohyb paprsků.³ Od přelomu let 1911/12 se Einstein snažil zahrnout gravitaci do speciální relativity (do Minkowského tvaru metriky) skrze závislost rychlosti světla v členu $c^2(x, y, z) dt^2$ na poloze, přičemž se soustředil na případ statického pole. Posléze (v Curychu) tento směr opustil, ale právě nad tímto členem zřejmě došel k tomu, že rovnice popisující gravitační pole budou nelineární — v zákonech zachování mu totiž vyšel člen, který říkal, že „i gravitační energie budí gravitaci“. V březnu 1912 si uvědomil zvlášť podstatnou věc: v obecném, nehomogenním poli může mít princip ekvivalence toliko lokální význam (gravitační pole lze nasimulovat nebo naopak „zrušit“ nejdříve v malém okolí daného bodu). Ukázal rovněž, jak (variačně) získat rovnici pro pohyb testovacích částic, a promýšlel, jak gravitace ovlivní „negravitační“ fyziku, speciálně hydrodynamiku a termodynamiku.

Zajímavý výsledek poslal do švýcarského Čtvrtletníku pro soudní lékařství a veřejné zdravotnictví — totiž svému příteli, curyšskému lékaři H. Zanggerovi k narozeninám. Na základě principu ekvivalence a s využitím modifikované ploché metriky ukázal, že pokud se částice umístí dovnitř hmotné sféry, její setrvačnost vzroste. Navíc, pokud se sférou cukne, částice uvnitř bude rovněž urychlena stejným směrem; uvnitř urychlené sféry tedy není nulové pole. Rozdíl oproti newtonovskému pohledu je ještě zřetelnější na interpretaci: s částicí cukne setrvačná síla, poněvadž vůči místnímu inerciálnímu systému, „strženému“ urychlením sféry, se stojící částice pohybuje zrychleně v opačném směru. Později se Einstein přesvědčil, že částice zareaguje i na rotaci sféry (objeví se Coriolisova síla), tedy že statická a stacionární situace jsou odlišné podobně jako v elektromagnetismu — a na rozdíl od Newtonovy gravitace. O rok později referuje Ernstu Machovi: „To naznačuje, že celá setrvačnost hmotného bodu je následkem přítomnosti všech ostatních hmot, který je založen na jistém druhu interakce s nimi,“ — zcela ve shodě s Machovým chápáním (mimochodem rovněž „pražským“). Ještě dodává: „Do jaké míry je tato představa oprávněná, se zjistí, až se nám podaří získat použitelnou dynamiku gravitace.“

Představa plně oprávněná nebyla (např. i jeden jediný hmotný bod v Minkowského prostoročasu má setrvačnost, přestože nemá s čím interagovat), avšak předběžné závěry se sférou se zanedlouho po získání „použitelné dynamiky gravitace“ potvrdily. O potvrzení se zasloužil v první řadě Einstein sám, když „usměrnil“ studium účinků rotujících těles Hansem Thirringem a Josefem Lensem v letech 1917–18. Efekty „strhávání“ (dragging) inerciálních systémů proudy hmotnosti–energie, ve kterém již Einstein ve svém pražském článku nahlížel protějšek elektrodynamické indukce, jsou i dnes diskutovány jako „magnetické“ projevy gravitace a mají i v pozdější historii obecné relativity speciální místo. Působí i ve slabém poli (jsou silnější než vlivy křivosti prostoru) a jejich odhalení v gravitačním poli Země i ve Sluneční soustavě bylo již věnováno nemálo úsilí. Zatím jen zčásti úspěšného, poněvadž „magnetická“ složka pole slábne se vzdáleností od (rotujícího) zdroje mnohem rychleji než „coulombická“ složka newtonovská. V okolí rychle rotujících velmi kompaktních těles jsou však efekty drag-

³Během týdenní návštěvy Berlína v dubnu 1912 si do notýsku načrtl také schéma a základní vzorec gravitačního čočkování. Předpověď tehdy pro slabost a nepravděpodobnost jevu dále nerozvíjel, k „Linsenswirkung“ se vrátil ještě 15. října 1915 v dopise příteli H. Zanggerovi, ale pak až v roce 1936 v Princetonu. Opět za českých okolností: Einsteina tam navštívil český židovský emigrant Rudi W. Mandl. Po sérii jeho naléhání Einstein opublikoval krátkou poznámku, která se stala klasikou oboru. (Mezitím se efektu věnovali i další, např. také český astronom František Link.)

gingu významné i astrofyzikálně, poblíž rotujících černých děr dokonce dominují nad „radiální“ přitažlivostí.

3. Curych: obecná kovariance

Einstein z Prahy odjžděl s docela jasnou představou budoucí teorie. S tou nejobtížnější stránkou se však ještě bude muset vyrovnat. S tou, od níž svou pouť vlastně kdysi (a to už před „záračným rokem“ 1905) začal a která už sama o sobě jeho teorii z velké části určuje: myšlenkou rovnocennosti vztažných soustav, „principem relativity“. Tento „estetický“ předpoklad jednoduchosti, symetrie — chcete-li, určité harmonie světa — je již ve své speciální verzi, kde zahrnuje jen inerciální soustavy, velmi nesamozřejmý, ba překvapivý, když uvážíme, jak silně rozlišuje mezi vztažnými soustavami hmota (její uspořádání a pohyb). Privilegovány jsou jistě klidové systémy Země, Slunce, naší Galaxie. . . Mikrovlnné záření kosmického pozadí definuje „klidový systém vesmíru“ (ten, vůči němuž je izotropní) a ustředněné velkoškálové rozložení vesmírné látky ho docela dobře potvrzuje. Navzdory tomu fyzikální „pravidla hry“ zřejmě mezi soustavami nerozlišují.⁴ Toto samo — spolu s předpokladem, že maximální možná rychlost šíření energie je konečná — stačí k odvození speciální teorie relativity. „Je myslitelné, aby princip relativity platil také pro soustavy, které jsou vůči sobě urychlené?“ ptá se Einstein v úvodu poslední kapitoly přehledu z podzimu 1907. S rovnoměrným translačním zrychlením se vypořádal (pozitivně) hned v následujících odstavcích, s nerovnoměrným pak v Praze, v obou případech pomocí principu ekvivalence. Ale mohou být rovnocenné soustavy, které navzájem rotují?

Newtonovsky určitě ne, poněvadž v nich působí odlišné setrvačné síly: v rotujícím vědru se hladina kapaliny zakříví, kdežto ve stojícím zůstane rovná. Einsteina však vedly myšlenky Macha, podle nichž setrvačnost (i) není vnitřní vlastností tělesa, ale důsledkem jeho interakce s veškerou ostatní hmotou, a (ii) projevuje se při urychlení tělesa nikoli vůči nějakému vztažnému systému (natož „absolutnímu“), nýbrž vůči ostatní hmotě ve vesmíru. Jakkoli je to představa obtížně kvantifikovatelná, jasně sděluje relativitu rotace: hladina by se zakřivila i ve „stojícím“ vědru, pokud by se kolem něj otáčel okolní svět. Zdálo se, že princip relativity lze rozšířit i na soustavy jakkoli urychlené a rotující. To však znamenalo, že je třeba připustit i obecnější transformace než Lorentzovy, poněvadž ty svazují jen inerciální systémy, a že je třeba požadovat invarianci teorie — konkrétněji kovarianci (zachování tvaru) podstatných rovnic — vůči této širší třídě transformací.

V této klíčové chvíli Einstein ještě nevěděl, jaké všechny transformace přibrat do hry a jak zajistit kovarianci vůči nim. Dnes se odpověď zdá být jednoduchou: „zapiš to v tenzorovém tvaru“. Již speciální relativita se téměř samozřejmě vyučuje v geometrickém hávu, průběžně se zdůrazňuje význam abstraktně definovaných matematických veličin (zejména tenzorů), jejichž smysl nezávisí na vlastnostech a vůbec existenci vztažných soustav, a naopak se upozorňuje na to, že souřadnicové údaje samy

⁴Fyzika je tedy *absolutní*, na soustavě nezávislá; Einstein proto v roce 1905 hovořil o teorii invariantů. Max Planck sice také viděl v nové teorii především cestu k „tomu, co je absolutní, obecné a neměnné“, ale v roce 1907 užil nešťastného označení relativní teorie, které pak už kuloáry jen upravily na (podobně nešťastné) teorie relativity. Absolutní prvky teorie vystupují zvlášť zřetelně v Minkowského geometrickém podání z let 1907–08; Hermann Minkowski spolu s ním poskytl i efektivní „světový“ slovník, ale s termínem „postulát absolutního světa“ již ani on neuspěl.

nevyovídají o skutečných, měřitelných poměrech v prostoročasu či v jeho tečných prostorech. Rovnice tenzorové povahy jsou automaticky kovariantní, takže v čem byl problém? — Jednak v tom, že prostě byla jiná doba. Základní nástroje této oblasti diferenciální geometrie (*absolutního diferenciálního počtu*, dnes říkáme *tenzorového počtu* či *diferenciální geometrie*) sice již poskytl Gauss, Riemann, Christoffel, Ricci-Curbastro a Levi-Civita až v roce 1917, tedy 63 let po Riemannově tenzoru a až *po* dokončení obecné relativity! Einstein znal jen Christoffelovy symboly; (ii) nebylo zdaleka zvykem v geometrické řeči zapisovat fyzikální zákony. Když takto Minkowski přeformuloval speciální relativitu, Einstein si postěžoval: „Od té doby, co se mé teorie zmocnili matematikové, už jí nerozumím.“ Je to citát pro usmání, ale Einstein to zjevně nemyslel z legrace. Popravdě, nechoval tou dobou k matematice zvlášť vřelý vztah. Mělo se to pronikavě změnit právě při dokončování obecné relativity.⁵

Na existující matematický aparát upozornil Einsteina již v Praze jeho univerzitní kolega Georg A. Pick a záhy po návratu do Curychu (v létě 1912) se ho ujal bývalý spolužák z místní Polytechniky (dnes ETH) Marcel Grossmann. Do května 1913 spolu vypracovali *Nástin zobecněné teorie relativity a teorie gravitace* (*Zeitschrift für Mathematik und Physik* 62, 225–261), dnes zmiňovaný jako „Entwurf“. Einstein především opustil představu, že gravitační pole je popsáno jediným „potenciálem“, a v článku argumentuje, že tuto roli převezme „fundamentální tenzor“ (metrický tenzor), který určuje invariantní prostoročasový interval mezi blízkými událostmi. S tímto novým pohledem nejdříve zobecňuje (z případu statického pole) variační nalezení světočáry volné částice a přichází ke geodetice. Poté se obrací k polním rovnicím. Inspirován odpovídající Newtonovou rovnicí⁶ $\Delta\Phi = 4\pi\rho$, klade na zdrojovou stranu rovnic tenzor napětí a energie (dnes častěji zvaný tenzorem energie a hybnosti), jehož dominantní složkou je hustota hmotnosti-energie, a na polní (geometrické) straně předpokládá tenzor vytvořený z derivací metrického tenzoru až do druhého řádu. Ačkoli opakovaně zmiňuje požadavek obecné kovariance, nyní (nesprávně) uvádí, že „se ukazuje nemožným najít diferenciální výraz, jenž by byl zobecněním $\Delta\Phi$ a který by se choval jako tenzor vůči libovolným transformacím“ [odkaz na druhou, Grossmannovu část práce], ideálu obecné kovariance se vzdává a od polních rovnic nadále požaduje jen kovarianci vůči lineárním transformacím. Podobu jejich polní strany poté omezuje z požadavku, aby z nich automaticky plynuly zákony zachování energie a hybnosti, přičemž uvažuje příspěvek od zdrojů i od samotného gravitačního pole. Dochází ke tvaru

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}{}_{,\beta}) - g^{\alpha\beta} g_{\tau\rho} g^{\mu\tau}{}_{,\alpha} g^{\nu\rho}{}_{,\beta} = \kappa (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}), \quad (1)$$

⁵ „Zaměstnává mě teď plně gravitační problém a věřím, že s pomocí svého zdejšího matematického přítele budu schopen překonat všechny obtíže. Jedna věc je jistá: ještě nikdy jsem ničemu nevěnoval takové úsilí a získal jsem nesmírný obdiv k matematice, jejíž jemnější partie jsem dosud pokládal, pro svou neznalost, za pouhý luxus!“ (Z dopisu A. Sommerfeldovi 29. října 1912.)

⁶ Protože polní rovnice obecné relativity budu zmiňovat v obvyklých geometrizovaných jednotkách, v nichž rychlost světla c a gravitační konstanta G jsou rovny jedné, zapisuji stejně i tuto odpovídající Newtonovu rovnici.

když zavede „tenzor energie a hybnosti gravitačního pole“ $t^{\mu\nu}$ vztahem⁷

$$-2\kappa t^{\mu\nu} = \left(g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \right) g_{\tau\rho, \alpha} g^{\tau\rho}_{, \beta}.$$

Odsud skutečně vyplývají zákony zachování

$$\partial_\nu [\sqrt{-g} (T_\sigma{}^\nu + t_\sigma{}^\nu)] = 0.$$

Později se ukáže, že $t^{\mu\nu}$ se obecně netransformuje jako tenzor, a bude se mu proto říkat Einsteinův komplex. V další sekci ještě Einstein podává návod, jak zjistit vliv gravitačního pole na jiné, „negravitační“ procesy, a jako k hlavnímu principu se opět vrací k obecné kovarianci; speciálně vyvozuje obecně kovariantní tvar Maxwellových rovnic.

Grossmann v druhé části detailně probírá sled matematických úprav a argumentů. Zajímá nás přirozeně odstavec o zobecnění $\Delta\Phi$: autoři věděli o Ricciho tenzoru a Einsteinovým *no-go* výrokem nechtěli zpochybnit, že je obecně kovariantním výrazem druhého řádu v derivacích metriky — Grossmann ho také hned uvádí jako možnost — avšak chybně se domnívali, že $\Delta\Phi$ není jeho vyhovující newtonovskou limitou ve statickém případě. V červnu 1913 Einstein krátce zapojil do výpočtů také dalšího starého přítele, Michela Besso: v nepublikovaném „Einsteinově–Bessoově rukopisu“ spočítali, vycházejíce z *Entwurfu*, že anomální posun perihelia Merkuru by měl činit 18'' za století (správná hodnota je 43'' za století) a že světlo by mělo být odkloněno Sluncem o 0.83'' (správná hodnota je dvojnásobná). Einstein rovněž zkontroloval, že metrika v rotujícím systému také řeší polní rovnice, a spokojeně referoval Machovi: „... setrvačnost má svůj původ v jisté interakci mezi tělesy, zcela v souladu s Vaším pohledem na Newtonův pokus s vědrem.“

Entwurf sám není adekvátním odrazem myšlenkového úsilí, které musel Einstein během období od léta 1912 do jara 1913 vynaložit už jen na přechod ke geometrickému pojetí gravitace. Naštěstí se v Einsteinově pozůstalosti našel curyšský zápisník, z jehož 84 popsaných stran je 43 „gravitačních“ a zájemci si na nich mohou drama této peripetie užít naplno. Poznámky pokrývají dobu od příjezdu z Prahy do přelomu let 1912–13. Na 14. straně Einstein náhle (a vůbec poprvé) nadepisuje obecnou definici prostoročasové metriky, transformuje metrický tenzor a během prvních dvou týdnů srpna 1912 se pak seznamuje s hlavními veličinami Riemannovy geometrie; dá se dokonce poznat, kdy mu Grossmann řekl o Riemannově tenzoru (Einstein si u něj totiž poznamenal „Grossmann Tensor vierter Mannigfaltigkeit“). Poznamenává si i Ricciho tenzor $R_{\mu\nu}$ a jeho skalární zúžení, a hned ho zkouší na „levé“ straně hledaných rovnic pole, tedy píše $R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, kde $T_{\mu\nu}$ je tenzor energie a hybnosti a κ nějaká konstanta. Nejdřív odvozuje limitu rovnic pro slabé pole: rozepisuje metriku na plochou plus „poruchu“, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, a po linearizaci v $h_{\mu\nu}$ dostává vlnovou rovnici

$$\square h_{\mu\nu} = -2\kappa T_{\mu\nu}, \quad (2)$$

když předpokládá, že v používaných souřadnicích platí harmonická podmínka (známá též jako Lorentzova či Hilbertova)

$$2h^{\mu\nu}_{, \nu} = h^{, \mu},$$

⁷Konstantní faktor κ je fixován newtonovskou limitou a závisí na přesné definici tenzoru energie a hybnosti. Standardně se bere roven 8π , ve fyzikálních jednotkách $8\pi G/c^4$.

kde $h := h_{\mu}^{\mu}$ a čárka v indexové pozici značí parciální derivaci. Z linearizovaných zákonů zachování $T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$ a polních rovnic odvozuje $(\square h^{\mu\nu})_{,\nu} = 0$ a odsud díky harmonické podmínce $(\square h)_{,\nu} = 0$, takže $\square h = \text{konst.}$ Stopa polních rovnic tím pádem vynucuje také $T = \text{konst.}$, což je ovšem obecně nepřijatelné (Einstein úvahy průběžně testoval na nekoherentním prachu, pro který je $T = -\rho$, a hustota ρ jistě obecně není konstantní).

Dále by měli (zápisník) číst jen fanoušci s dobrými nervy. Einstein totiž zanedlouho po zjištění problému *pozměňuje* linearizované polní rovnice (2) do správného tvaru

$$\square \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu} \right) = -2\kappa T_{\mu\nu}.$$

Odvozuje zákony zachování (přitom právě zavádí již zmíněný „tenzor energie a hybnosti“ gravitačního pole), poté mu však zřejmě nevyhází přijatelný výsledek ve statickém případě. Jak víme především z pražských prací, Einstein měl totiž (nesprávně) za to, že ve slabém statickém poli se dá metrika vždy uvést do tvaru

$$ds^2 = -c^2(x, y, z) dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

(užíváme dnes obvyklejší signaturu +2, Einstein používal opačnou), což odpovídá odchylce od Minkowského s jedinou nenulovou složkou h_{00} . Pro takovouto metriku je $h^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$, tudíž harmonická podmínka implikuje $\nabla h = 0$. To ovšem znamená, že také $\square h = 0$, takže stopa polních rovnic by ve statickém případě nutně vedla k $T = 0$ (nulová hustota energie). Einstein se vrací na začátek a na podnět Grossmanna zkouší popsat pole jen pomocí

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu,\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa} \Gamma^{\kappa}_{\nu\lambda}. \quad (3)$$

Znovu se dostává velmi blízko ke správnému tvaru rovnic. Při odvozování linearizované varianty tentokrát uvažuje souřadnicovou podmínku $h^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$ a opět dochází k rovnici (2). Z linearizovaných zákonů zachování $T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$ a polních rovnic mu vychází $(\square h^{\mu\nu})_{,\nu} = 0$ stejně jako výše, což je ve shodě s nynější podmínkou a nevede to k žádnému omezení na stopu T . Ve statickém poli, kde se metrika redukuje na h_{00} , je podmínka splněna triviálně a linearizované rovnice dávají

$$(\square h_{00} =) \Delta h_{00} = -2\kappa T_{00},$$

což vypadá rozumně. Einstein však i tuto cestu záhy opouští a od přímé inspirace Riemannovým tenzorem se prozatím definitivně odvrací. Dodejme, že výraz (3) se získá z Ricciho tenzoru, pokud se položí $\sqrt{-g} = 1$; badatelé jej označují jako „listopadový tenzor“ (chová se však jako tenzor jen vůči transformacím, které zachovávají determinant metriky, tedy které samy mají determinant jednotkový), poněvadž Einstein se k němu vrátil v listopadu 1915 — právě u něj začalo závěrečné dějství příběhu. Pro tuto chvíli se však příběh prodlužuje o 3 roky...

Ani Einsteinovy dopisy a pozdější vzpomínky neposkytly jasné vysvětlení, proč napoprvé „správnou stopu“ opustil. Předběhneme-li, tak v dopise A. Sommerfeldovi z 28. listopadu 1915 (tedy z doby těsně po nalezení konečného tvaru rovnic) píše: „Tyto rovnice jsem uvažoval už před 3 lety s Grossmannem . . . , ale tehdy jsem došel k závěru, že z nich nevyhází newtonovské přiblížení, což bylo chybné. Klíč k řešení jsem našel, když jsem si uvědomil, že přirozeným vyjádřením ‚složek‘ gravitačního pole

nejsou $g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu,\lambda}$, nýbrž odpovídající Christoffelovy symboly $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$.“ Zmínka je zajímavá hlavně jako připomenutí toho, že tehdy ještě nebyla známa afinní konexe. Experti ji nicméně nepovažují za dostatečný důvod neúspěchu a poukazují spíš na jiné dva okruhy problémů:

- Einstein nebyl schopen najít *obecně* kovariantní výraz, kterým by reprezentoval energii a hybnost gravitačního pole, tedy zformulovat vyhovující zákony zachování. (Jak již zmíněno, Einsteinův *komplex* pro energii a hybnost gravitačního pole skutečně není obecným tenzorem.) Citujme z dopisu H. A. Lorentzovi z 16. srpna 1913: „Omezili jsme se na vztažné soustavy, vzhledem k nimž zákony zachování hybnosti a energie platí v dané podobě. Ukazuje se, že pokud se upřednostní takovéto vztažné soustavy, zůstanou jako povolené jen obecné lineární transformace. Tedy krátce řečeno: *postulováním zákonů zachování dojde člověk k velmi omezené volbě vztažného systému a povolených transformací.*“
- Einstein často užíval souřadnicových podmínek implicitně, a to *nejen* v případě limity slabého pole. Tato druhá domněnka (ale vlastně i první) míří do obtížné oblasti, která souvisí s obsahem pojmu obecná kovariance a potažmo i s obsahem „Machova principu“ (jak Einstein označoval Machovo pojetí setrvačnosti), a zdá se být plausibilní i proto, že Einstein zanedlouho přišel s výslovným argumentem proti příliš široké kovarianci. Tento argument ilustruje, s jakým typem úvah mohl mít potíže, a je dost možné, že osvětluje pozadí celé zápletky s Einsteinovým–Grossmannovým *Nástinem*.

3.1. Die Lochbetrachtung — argument s dírou

Z korespondence (hlavně s H. A. Lorentzem) je zřejmé, že neúplná kovariance rovnic z *Nástinu* Einsteina znepokojovala. Změnilo se to během léta 1913. Při přednášce pro Švýcarskou přírodovědeckou společnost 9. září ve Frauenfeldu ohlásil, že rovnice pole skutečně nemohou být obecně kovariantní, a 21. září to zopakoval ve Vídni pro Německou společnost přírodovědců a lékařů. 2. listopadu píše Ludwigu Hopfovi: „Jsem nyní s gravitační teorií velice spokojen. Skutečnost, že gravitační rovnice nejsou obecně kovariantní, která mě před časem trápila, se ukázala být nevyhnutelnou; snadno jde dokázat, že teorie s obecně kovariantními rovnicemi nemůže existovat, pakliže požadujeme, aby bylo pole matematicky plně určeno hmotou.“

Představme si prostoročas vyplněný hmotou, kromě určité prázdné oblasti („díry“). Zvolíme nějaké souřadnice x^μ a v nich najdeme řešení polních rovnic pro danou situaci, $g_{\alpha\beta}(x^\mu)$. Nyní uvažujme souřadnice x'^μ , které se všude kromě díry přesně shodují s x^μ , avšak uvnitř díry se od x^μ hladce odklánějí (jsou vůči původním zdeformovány). Odpovídající metrika $g'_{\alpha\beta}(x'^\mu)$ je dána standardní tenzorovou transformací. Pokud jsou polní rovnice kovariantní, je ovšem jejich řešením také $g'_{\alpha\beta}(x'^\mu)$ (čárkovaná metrika, do níž se pouze dosadí $x'^\mu = x'^\mu(x^\rho)$), protože pro splnění rovnic je podstatná funkční závislost $g'_{\alpha\beta}(\cdot)$, nikoli souřadnice, v nichž je vyjádřena. To však znamená, že pro dané rozložení hmoty máme uvnitř díry více (dokonce nekonečně) možných konfigurací pole, poněvadž obecně $g'_{\alpha\beta}(x'^\mu) \neq g'_{\alpha\beta}(x^\mu)$, takže metrický tenzor nabývá určitých hodnot v *různých* časech a/nebo místech vakuové oblasti. Vzhledem k tomu, že $g'_{\alpha\beta}(x'^\mu)$ dle předpokladu reprezentuje *stejnou* fyzikální situaci jako $g_{\alpha\beta}(x^\mu)$, jen v jiných souřadnicích, lze učiněný závěr vyslovit také tak, že máme *jedny* souřadnice x^μ a v nich dvě *různé* metriky, $g_{\alpha\beta}(x^\mu)$ a $g'_{\alpha\beta}(x^\mu)$. Takováto nejednoznačnost je z „ma-

chovského“ pohledu nepřijatelná: pro danou konfiguraci zdrojů by mělo být pole dáno jednoznačně, nezávisle na zvolených souřadnicích.

Kde je v argumentu chyba? My, kteří se relativitu učíme a používáme ji už hotovou, navíc s paralelní přípravou geometrickou, nemusíme nad odpovědí moc přemýšlet, poněvadž si vlastně ani nepřipouštíme otázku; řekneme jen, že teorie je invariantní vůči kalibračním transformacím, takže všechny příslušné *push-forwardy* metriky jsou samozřejmě také řešeními — a ta všechna jsou geometricky ekvivalentní. Einstein sám později kroutil hlavou nad tím, jak byl jeho argument *děravý*, když přiznává souřadnicím realitu nezávislou na metrice. V autobiografických poznámkách, sestavených ke konci života, vzpomínal: „Proč bylo třeba dalších sedmi let ke konstrukci obecné teorie relativity? Hlavní důvod leží ve skutečnosti, že není snadné osvobodit se od myšlenky, že souřadnice musejí mít bezprostřední metrický význam.“ Ve skutečnosti je obdivuhodné, podle mne ještě víc než samotné sestavení polních rovnic, že Einstein nakonec dokázal proniknout do těchto obtížně přístupných hlubin kovariance a kalibrační invariance, jež ukrývají „ontologii“ matematického podloží teorie, šalebně nasvícenou Machovými náhledy.

Výrok $g'_{\alpha\beta}(x'^{\mu}) \neq g'_{\alpha\beta}(x^{\mu})$ není správně interpretován tak, že „metrický tenzor nabývá určitých hodnot v *různých* událostech prostoročasu.“ Bez metriky totiž *nevíme, kde jsme*, protože nevíme, jak je to odněkud někam daleko — každé souřadnice sice určitým způsobem číslovají události v prostoročasu, ale *jen podle těchto čísel* nejde poznat, kdy a kde se tyto události staly, a to ani vůči jiným událostem. Nejde tedy *nejdříve* říct, že $x'^{\mu} \neq x^{\mu}$ značí *jiné* události (tj. takové, které se staly jindy a jinde), a *pak teprve* na obou „různých“ sítích souřadnic rozprostřít (stejnou) metriku. Stejně tak není správný výrok, že $g_{\alpha\beta}(x^{\mu})$ a $g'_{\alpha\beta}(x'^{\mu})$ představují „*různá* pole v *daných* událostech prostoročasu“, protože pro různé metriky má „dané“ číslování x^{μ} odlišný význam — odpovídá *odlišným* geometrickým poměrům v prostoročasu. Nelze si představit, že během výměny metriky $g_{\alpha\beta}$ za $g'_{\alpha\beta}$ budou souřadnice x^{μ} označovat stále stejné body prostoročasu. Krátce řečeno, díky tomu, že v obecné relativitě hraje metrika *obojí* fundamentální roli — určuje (gravitační) pole, a zároveň časo-prostorové vztahy — nemůže existovat žádný apriorní, na metrice nezávislý způsob, jak identifikovat události (a hodnoty polí v nich). Bez metriky nemá jasný smysl ani *relativní pohyb*, Machem tak zdůrazňovaný. Bez metriky vlastně ani nevíme, *kde* je rozprostřena hmota! Tensor energie a hybnosti ostatně typicky *obsahuje* metriku — a i pokud ji neobsahuje, jako např. tenzor $T^{\mu\nu} = \rho u^{\mu} u^{\nu}$ nekoherentního prachu (ρ je klidová hustota a u^{μ} čtyřrychlost), bez metriky nejde vyměřit objem, tedy určit vlastní hustotu, a nejde také zajistit správnou normalizaci čtyřrychlosti. A i kdyby $T^{\mu\nu}$ měl jasný význam, stejně metriku neurčuje plně, protože podstatné jsou rovněž okrajové podmínky. Einsteinova představa, že primární je konfigurace hmoty ($T^{\mu\nu}$) a metrika je touto hmotou již plně určena, je tak kromě speciálních případů neudržitelná. Metrika a hmota jsou dvě rovnocenné, ne nutně zcela závislé základní reality.

Einstein uvedl svůj „argument s dírou“ také v několika článcích. Jednak v poznámce připojené k reprintu *Entwurfu*, dále v samostatné stati pro lednový (1914) *Physikalische Zeitschrift*, a poté v článku s výslovným titulem *Vlastnosti kovariance polních rovnic gravitační teorie založené na zobecněné teorii relativity*, který sepsal opět s Grossmannem a který se objevil v *Zeitschrift für Mathematik und Physik* v květnu 1914: „Gravitační rovnice, které jsme zformulovali, jsou obecně kovariantní jen do

té míry, aby fundamentální tenzor $g_{\mu\nu}$ byl plně určen.“ Když článek vyšel, byl už Einstein měsíc v Berlíně, kam byl pozván a zvolen do Pruské akademie věd. Slavnostní nástup v této věhlasné instituci zkalil rozchod s první ženou Milevou a dvěma syny, o měsíc později navíc vypuknutí války. Einstein pohrdá všudypřítomným vlastenčením a i mezi akademiky těžko hledá spojení proti řinčení zbraní. V ústraní se však dokáže soustředit i na další práci. V říjnu dokončuje rozsáhlý přehled *Formální základy obecné teorie relativity*, v němž — nyní na základě *metrické* teorie — znovu odvodil geodetiky jako světočáry volných testovacích částic, ohyb světla a gravitační posun frekvence a probral souvislost mezi gravitací a rotačním zrychlením vztažného systému. V práci rovněž podává souhrn nezbytného tenzorového počtu a kapitulu o polních rovnicích uvozuje „argumentem s dírou“.

Einsteinova „machovská víra“ se začala viklat právě při dokončování obecné relativity, a ještě víc pak nad prvními řešeními finálních rovnic, zejména těmi kosmologickými. Byl to pro Einsteina nesmírně důležitý posun a v dalších letech shrnoval svou teorii poněkud jinak než dřív: „Pokud si představíme, že gravitační pole, tedy funkce $g_{\mu\nu}$, z prostoru odstraníme, nezbude prázdný prostor, nýbrž absolutní nic, ani ‚topologický prostor‘. Funkce $g_{\mu\nu}$ totiž popisují nejen pole, ale zároveň také topologickou a metrickou strukturu variety. Minkowského prostor, posuzováno z hlediska obecné teorie relativity, není prostorem bez pole, nýbrž speciálním případem pole, pro které — v použité souřadné soustavě, což samo nemá žádný objektivní význam — mají funkce $g_{\mu\nu}$ hodnoty nezávislé na souřadnicích. Neexistuje taková věc jako prázdný prostor, tj. prostor bez pole. Prostorčas neexistuje sám o sobě, ale jen jako strukturální vlastnost pole.“

4. Berlín: správná stopa

Koncem června 1915 zavítal Einstein na týden do Göttingen, aby tam na univerzitě navštívil Davida Hilberta a Felixe Kleina. Podal sérii šesti přednášek, v nichž osvětlil obecnou teorii relativity, a byl nadšený, že zde jeho matematice plně porozuměli. Znovu ho však tížila nekovariance polních rovnic a také příliš malý výsledek pro posun perihelia Merkuru. Když na začátku září navštívil Švýcarsko, sešel se také s Besseem a ten mu připomněl své upozornění z jara 1914, totiž že ve 2 roky starém „rukopise“ udělali chybu — že metrika zapsaná v rotujícím systému neřeší polní rovnice z *Entwurfu* přesně a že tato chyba možná ovlivňuje i výsledek pro Merkur. Einstein tomu dosud nevěnoval pozornost, ale nyní mu kontrola přinese horké chvíle. Již 30. září o tom píše roztrpčený dopis příteli Erwinu Freundlichovi⁸ a dodává, že

⁸Erwin F. Freundlich, německý matematik a astronom, spolupracoval s Einsteinem od roku 1911 na observačním ověření zobecněné teorie relativity. V roce 1913 zpřesnil měření dráhy Merkuru (navzdory varování ředitele berlínské observatoře publikoval výsledek jako potvrzení nesprávnosti Newtonovy teorie). V roce 1914 se vypravil na Krym, kde chtěl 21. srpna během zatmění Slunce změřit ohyb světla; po vypuknutí války 1. srpna však byla expedice zajata, zatmění propásla a jen se štěstím se nakonec vrátila do Německa. (Pokus o zopakování výpravy k jejímu 100. výročí by býval mohl skončit ještě hůř.) Na přelomu let 1914/15 Freundlich proměřoval spektra dvojhvězd, aby získal „nezpochybnitelné důkazy, mluvící ve prospěch existence gravitačního posunu.“ (Ty se však záhy ukázaly být chybnými.) Hned v roce 1916 napsal knihu *Základy Einsteinovy teorie gravitace*. Po útěku z Německa v roce 1933 a několika letech v Istanbulu se dostal do Prahy, kde v letech 1937–38 přednášel astronomii na Německé univerzitě v Praze, ale poté musel před nacismem opět odejít, aby nakonec (na doporučení Eddingtona) získal místo ve Skotsku. Během dalšího života vedl ještě několik expedic, když se měřením ohybu světla snažil *zpochybnit* (!) obecnou relativitu.

by k odhalení chyby zjevně potřeboval „někoho s nezkaženou mozkovou tkání“. Navíc si uvědomuje, že s Grossmannem postulované zákony zachování ani s požadavkem kovariance jednoznačně neurčují lagrangian. K tomu všemu se dozvídá, že Hilbert se začal formulaci gravitačních rovnic intenzivně věnovat, se zřejmou snahou o prvenství. Začínají klíčové dva měsíce. Einstein pracuje „se šíleným zápalem“, spí nepravidelně, na jídlo zapomíná, v dopisech současně řeší spory s bývalou rodinou ve Švýcarsku. . .

Čtvrtek, 4. listopadu 1915. Přednáška pro zasedání Pruské královské akademie věd. Einstein sděluje, že polní rovnice, které poslední dva roky obhajoval, je třeba zapomenout — a navrhuje vrátit se ke tvaru⁹

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu,\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\nu\lambda} = \kappa T_{\mu\nu}$$

ze svého curyšského zápisníku z léta 1912. Vzpomíná, jak tehdy s Grossmannem — a s *těžkým srdcem* — opustil obecnou kovarianci. Vycházejí z lagrangianu $g^{\sigma\tau}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}\Gamma^{\beta}_{\tau\alpha} - \kappa T$, odvozuje variačně zákony zachování $\partial_{\lambda}(T_{\sigma}^{\lambda} + t_{\sigma}^{\lambda}) = 0$ a připomíná, že veličina

$$t_{\sigma}^{\lambda} = \frac{1}{\kappa} g^{\mu\nu} \left(\Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\nu\alpha} - \frac{1}{2} \delta_{\sigma}^{\lambda} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} \right),$$

popisující energii a hybnost gravitačního pole, se chová jako tenzor jen při lineárních transformacích. Kontrakcí polních rovnic pak získává vztah

$$\partial^{\alpha}\partial_{\alpha}(\ln\sqrt{-g}) = -\kappa T,$$

který interpretuje takto: „Je nemožné volit souřadný systém tak, aby bylo $\sqrt{-g} = 1$, protože skalár tenzoru energie nemůže být položen roven nule.“ Nakonec krátce odvozuje linearizovanou verzi rovnic a ukazuje, že z ní plyne vyhovující newtonovská limita.

Čtvrtek, 11. listopadu, další zasedání Akademie. Einstein uvádí, že podobně jako je nulová stopa tenzoru energie a hybnosti pro elektromagnetické pole T , může být nulová i pro látku. Pokud by totiž látka — jak se často uvažuje — byla venkoncem elektromagnetické povahy, není nerozumné předpokládat, že pro ni bude $T = 0$; kladný příspěvek může dodávat teprve její gravitační pole, charakterizované komplexem t_{σ}^{λ} . Za předpokladu $T = 0$ lze polní rovnice uvést do *obecně* kovariantního tvaru $R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$. Pokud se souřadnice zvolí tak, že $\sqrt{-g} = 1$, přechází rovnice na tvar ze 4. listopadu; rovnost $T = 0$ lze pak chápat jako důsledek polních rovnic. Odpovědně si Einstein najde čas, aby odpověděl na dopis z berlínské Goetheho federace, kam poslal protiválečný příspěvek. Hlásí se k Tolstému, který měl patriotismus za epidemii psychopatologie, vedoucí lidi k válčení.

Dopis od Hilberta. Zve Einsteina, aby v úterý 16. přijel do Göttingenu na jeho přednášku *Fundamentální rovnice fyziky*. Píše, že sice chtěl nejdříve promyslet fyzikální důsledky své teorie, ale vzhledem k tomu, jak je Einstein zvědavý, představí „axiomatické řešení Vašeho velkého problému“ podrobně. Přednáška začíná v 18 hodin, tak navrhuje Einsteinovi, aby přijel vlakem ve tři nebo v půl šesté, a nabízí přespání ve

⁹Einstein má v rovnici minus kvůli efektivně opačné definici Ricciho tenzoru; užíváme dnes obvyklejší konvence. Při této příležitosti přiznám, že přepis rovnic z původních článků není zvláště pohodlný, protože Einstein užíval dnes méně obvyklé signatury metriky $(---+)$ a rovněž opačné definice „složek afinní konexe“ pomocí Christoffelových symbolů, $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta})$ (proto *efektivně* opačná definice Riemannova a následně Ricciho tenzoru i skaláru). Konvence navíc občas mírně měnil. Naštěstí notace se dnes používá téměř stejná.

svém domě. Nakonec poznamenává: „Rozumím-li správně Vaší nové stati, Vaše řešení se od mého velmi liší.“ Životopisec Walter Isaacson vidí situaci Einsteina jako poměrně nepohodlnou: nabízí se mu *kuriózní potěšení* vyslechnout si dovršení teorie, se kterou zápolí už řadu let, od svého soupeře. (A pak u něj spokojeně přespát.)

Není to určitě výmluva, když Einstein odmítá se stížností na únavu a žaludeční problémy. Pokračuje v práci. Odvozuje přibližné řešení pro své nové polní rovnice. Řešení, které zkoušeli už přede dvěma lety s Bessoem, tehdy s neuspokojivým výsledkem. Rozvíjí veličiny v M/r a zjišťuje, že již v lineárním řádu se prostorová metrika liší od ploché. V důsledku toho dostává pro ohyb paprsku prolétávajícího kolem hmotného tělesa dvojnásobek toho, co mu vycházelo dříve z principu ekvivalence (a než vychází také z Newtonovy teorie spojené s korpuskulární představou světla); pro paprsek tečný ke Slunci je to konkrétně 1.7 úhlových vteřin. Druhý řád obsahuje informaci o odchylce vázaných orbit od elips; pro dráhu Merkuru obdrží Einstein precesi hlavní osy o 43" za století. Nebyl-li dosud dost neklidný, tak nad touto hodnotou se mu skutečně rozbuší srdce: *přesně tak velká* je anomálie, kterou u dráhy Merkuru zaznamenal již Urbain Le Verrier v roce 1859 — efekt, který se nezdá být možno vysvětlit (vlivem planet) v rámci Newtonovy teorie. Ve čtvrtek 18. listopadu Einstein opět předstupuje před plénum berlínské Akademie. Ještě předtím ráno hlásí pokrok Hilbertovi a dodává: „Nakolik mohu soudit, Vámi poskytnutý systém přesně souhlasí s tím, na co jsem přišel za poslední čtyři týdny a co jsem přednesl na půdě Akademie.“ Hilbert druhý den odpovídá vlídně a s vtipem, ale nezmiňuje se o tom, že hned zítra (v sobotu 20. listopadu) bude mít před Královskou vědeckou společností v Göttingenu další přednášku. A nemá to být nějaká podružná poznámka, jak napovídá titul *Základy fyziky* . . .

Je opět čtvrtek, 25. listopadu, a Berlínská akademie očekává další Einsteinovu přednášku. Netrvá dlouho. Einstein krátce připomíná své předchozí závěry, speciálně to, že souřadnicová volba odpovídající $\sqrt{-g} = 1$ vynucovala podle polních rovnic $T = 0$. Nyní přišel na to, jak se obejít bez této podmínky na tenzor energie a hybnosti, aniž by to ovlivnilo vakuovou verzi rovnic, ze které před týdnem obdržel vysvětlení posunu perihelia Merkuru: upravuje rovnice do tvaru

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right). \quad (4)$$

Připomíná, že za podmínky $\sqrt{-g} = 1$ se Ricciho tenzor vlevo redukuje na „listopadový tenzor“ (3), takže rovnice vypadají

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu,\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa} \Gamma^{\kappa}_{\nu\lambda} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right), \quad (5)$$

a ukazuje, že z nich v tom případě plynou zákony zachování $\partial_{\lambda}(T_{\sigma}^{\lambda} + t_{\sigma}^{\lambda}) = 0$. Poté velmi krátce naznačuje, co jej vedlo k doplnění stopy T na pravou stranu rovnic; pochopitelněji to však vykládá až v březnovém souhrnu *Základy obecné teorie relativity*: po zvednutí indexu u vakuových rovnic

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu,\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa} \Gamma^{\kappa}_{\nu\lambda} = 0 \quad (6)$$

(pamatujme, že budeme celou dobu v souřadnicích, v nichž $\sqrt{-g} = 1$) nejprve upravil $g^{\nu\sigma} \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu,\kappa} = \partial_{\kappa}(g^{\nu\sigma} \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}) - g^{\nu\sigma}_{,\kappa} \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = \partial_{\kappa}(g^{\nu\sigma} \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}) + g^{\sigma\rho} \Gamma^{\nu}_{\rho\kappa} \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} + g^{\nu\lambda} \Gamma^{\sigma}_{\lambda\kappa} \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}$

a všiml si, že po dosazení se druhý člen vykrátí s druhým členem (6) (vynásobeným $g^{\nu\sigma}$) a navíc že třetí člen se dá vyjádřit pomocí komplexu pro gravitační pole

$$g^{\nu\lambda}\Gamma^\sigma_{\lambda\kappa}\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \kappa \left(t_\mu^\sigma - \frac{1}{2} t \delta_\mu^\sigma \right),$$

takže rovnice lze uvést do tvaru

$$\partial_\kappa(g^{\nu\sigma}\Gamma^\kappa_{\mu\nu}) = \kappa \left(t_\mu^\sigma - \frac{1}{2} t \delta_\mu^\sigma \right).$$

Sem nyní symetricky doplnil zdroje,

$$\partial_\kappa(g^{\nu\sigma}\Gamma^\kappa_{\mu\nu}) = \kappa \left[(t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma) - \frac{1}{2} (t + T) \delta_\mu^\sigma \right],$$

a nakonec získal tvar (5) tím, že na levou stranu vrátil ze vztahů výše původní tvar (6).

Na závěr přednášky ještě upozorňuje, že do obecné relativity lze integrovat jakoukoli teorii, která je ve shodě se speciální relativitou, takže obecná relativita neposkytuje žádná nová omezení na to, jaké fyzikální teorie jsou přípustné. „Jeho poslední stanovisko zabralo jen tři stránky. Nejsou v nich žádné chyby, nic, co by bylo třeba dodat. Práce je u konce. Domluví, pár nezbytných rozhovorů s kolegy a odchází domů. Příteli Bessoovi posléze napíše, že je spokojený, ale ‚kaputt‘. Tam, kde bývala Newtonova teorie, stojí nyní teorie jeho.“¹⁰

4.1. Hilbert „ve shodě“ s Einsteinem

David Hilbert podal psanou verzi své přednášky z 20. listopadu hned týž den do matematicko-fyzikálních Zpráv Královské vědecké společnosti v Göttingenu. Publikace vyšla až 31. března 1916. Usilovala o jednotnou teorii gravitace a elektromagnetismu a obsahovala také rovnice ekvivalentní s Einsteinovými rovnicemi gravitačního pole. Otázky kolem priority ožily v roce 1997, kdy byly v göttingenském archívu objeveny korektury Hilbertova článku a ukázalo se, že jeho původní znění z 20. listopadu bylo v podstatných ohledech odlišné od konečné, publikované verze. Polní rovnice se tam především explicitně neobjevují, Hilbert však uvádí, že jejich gravitační část se odvodí variací výrazu $\sqrt{-g} R$ vzhledem k metrice (odtud *Hilbertova akce*). Až konečná verze upřesňuje, že tato variace je rovna $\sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu})$, nikoli však na základě odvození, ale na základě argumentu, že je to zřejmé, protože Ricciho tenzor je jediným tenzorem 2. řádu a jeho stopa R jediným skalárem sestaveným z metriky a jejích prvních a druhých derivací. O linearitě v 2. derivacích se Hilbert zmiňuje na jiném místě, ale koeficient $\frac{1}{2}$ ani tak vysvětlen není. Někteří badatelé namítají, že zmíněná variace byla pro matematika tohoto formátu detailem, tak ji nepotřeboval detailně předvádět; v revidované verzi článku, kterou Hilbert publikoval v roce 1924, každopádně už původní argument neuvádí a variaci skutečně počítá, ovšem tak, že nejdříve vybere speciální souřadnice, v nichž vymizují všechny derivace metriky.

Podle razítka byly korektury Hilbertovi předány 6. prosince, tedy až po publikaci Einsteinova finálního pojednání 2. prosince; Hilbert provedl změny mezi 6. prosincem

¹⁰Z knihy Thomase Levensona *Einstein v Berlíně* (Práh, Praha, 2004).

a začátkem února 1916. Mohl tak být k „Einsteinovu tenzoru“ inspirován obdobným tenzorem $T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}$, ke kterému mezitím Einstein došel na pravé straně rovnic (ekvivalence těchto dvou tvarů rovnic se dostane velmi snadno vystopováním). Hilbert navíc v originální verzi článku tvrdí, že jeho teorie nemůže být kovariantní, a dokonce uvádí důvod podobný „argumentu s dírou“ (včetně odkazu na Einsteina). Fixuje proto souřadnice pomocí „axiomu prostoru a času“, totiž tak, aby v nich platil „teorém energie“, neboli zákony zachování. Do konečné verze článku rovněž doplnil několik poukazů na priority Einsteina, především pak u polních rovnic píše: „Výsledné diferenciální rovnice gravitace jsou, jak se mi zdá, ve shodě s rozšířenou teorií obecné relativity vytvořenou Einsteinem v jeho posledních pracích.“ Zajímavý detail našli J. Renn a J. Stachel v úvodu Hilbertova pojednání: ve větě „Ve smyslu axiomatické metody dále odvozují, v zásadě ze tří axiomů, nový systém základních rovnic fyziky, dokonale krásných, abych, jak věřím, vyřešil předložené problémy.“ autor před publikací vyškrtl slovo „nový“.

Milovníci spiknutí si mohou snadno dohledat, že v originálních Hilbertových korekturách určitá malá část chybí (je vytržena), což vedlo ke spekulacím, zda právě tam nebyly napsány „Einsteinovy“ rovnice. Pečlivou analýzou toku textu (i řady dalších pramenů) došel před 10 lety T. Sauer k přesvědčení, že nikoli, že chybějící rovnicí bylo téměř jistě vyjádření skaláru křivosti pomocí Ricciho tenzoru z důvodu jeho specifikace jako lagrangiánu pro variační princip.

Nezdá se, že by další vztahy obou velikánů byly událostmi z konce roku 1915 citelněji poznamenány. Einstein byl zpočátku znechucený, ale Hilbert se záhy omluvil a Einstein mu už 20. prosince napsal smířlivý dopis. V dalších letech pak Hilbert vždy uznával Einsteina jako tvůrce obecné relativity, naopak Einstein uznával, že Hilbert je autorem elegantního, variačního odvození rovnic.

5. Kolaps? Kolaps!

Einsteinovo statické kosmologické řešení nebylo prvním přesným řešením nového gravitačního zákona. První předložil Karl Schwarzschild. Tento všestranný astronom a matematik byl z těch, kdo sledovali Einsteinovo úsilí, nejlépe připraven na levou stranu polních rovnic; sám se už delší dobu zamýšlel nad eventualitou, že svět je (prostorově) zakřivený. Nebyla to žádná novinka — naopak hlavní vlna zájmu o zakřivený svět kulminovala ještě v 19. století. Cestu k neeukleidovským geometriím otevřeli na začátku 19. století Gauss, Bolyai a Lobačevskij, ale až známá habilitační přednáška G. F. Bernhardta Riemanna z června 1854 ji rozšířila do libovolné dimenze — a hlavně propojila se zkušeností: Riemann zdůrazňoval, že reálný prostor nemusí splňovat axiomy Eukleidovy geometrie a že se to musí zjistit měřením. Dodával, že „prostor konstantní křivosti je nutně konečný, pokud je tato křivost kladná, ač jakkoli malá. . .“ a také že podstatné odchylky od plochého prostoru mohou existovat v mikroskopickém měřítku. Končil slovy: „To nás však přivádí na pole jiné z věd, fyziky. . .“ Křivé světy se však nejprve rozšířily do fantastické četby, i když probíhaly též vážné diskuse (vyjadřoval se v nich i J. C. Maxwell, ačkoli v tomto směru nijak nadšeně). Úvahy W. K. Clifforda o tom, že energie a látka jsou ve skutečnosti projevy zakřiveného prostoru, předznamenaly dokonce jednotící snahy Hilberta, Weyla a Einsteina, později pak teorie superstrun. Clifford zemřel 11 dní před narozením Einsteina.

I Karl Schwarzschild šel do války dobrovolně (proto Einsteinova narážka na jeho charakter v dopisu Bessoovi citovaném v úvodu); zprávy z Pruské akademie věd ho zastihly v Rusku. Už necelý měsíc po zveřejnění konečné podoby teorie, 22. prosince 1915, píše jejímu autorovi, že našel řešení polních rovnic (patrně jejich verze z 11. listopadu) pro bodový zdroj. Končí slovy: „Jak vidíte, válka je ku mně laskava, navzdory divoké střelbě v rozhodně pozemské vzdálenosti mi dovoluje tuto vycházku do krajiny Vašich myšlének.“ Einstein je překvapen: „To jsem nepomyslel, že by přesné pojednání bodového problému bylo tak jednoduché.“ Ještě víc byl překvapen tím, že jeho rovnice vůbec takové řešení připouštějí: v duchu Macha a podle principu ekvivalence by gravitace neměla být *vnitřní* vlastností tělesa, ale vlastností danou vzájemným působením všech hmot ve vesmíru. Je-li ovšem ve vesmíru jen jeden hmotný bod...? V březnu zobecňuje H. Reissner Schwarzschildovo řešení na případ elektricky nabitého zdroje (jeho závěry doplní o dva roky později G. Nordström) a původní, nenabitý případ záhy potvrdí elegantněji také J. Droste (květen) a D. Hilbert (prosinec).

Dne 6. února 1916 odesílá Schwarzschild do Berlína druhý dopis. Doplnuje vnitřní řešení pro sférickou „hvězdu“ z nekoherentního prachu¹¹ s konstantní hustotou. Řešení má zvláštní rys: je-li poloměr hvězdy menší než $r = 2GM/c^2$, kde M je její hmotnost, nemůže být hvězda v žádném případě v rovnováze. Cokoliv, co se pod tímto „gravitačním“ poloměrem vyskytne, včetně světla, je přitaženo do bodu $r = 0$. V roce 1930 naznačí S. Chandrasekhar, že se možná nejedná jen o limitní, akademickou eventualitu — zjistí totiž, že „chladná hvězda“ není schopna ubránit se (patříčným průběhem tlaku) vlastní gravitaci, pokud její hmotnost převyší asi 1.5 hmotnosti Slunce. Po vyčerpání jaderné energie by tedy centra velmi hmotných hvězd skutečně měla podléhat extrémní kontrakci. A. S. Eddington s většinou astrofyziků v reakci požaduje „přírodní zákon, který by hvězdě zabránil chovat se tak pošetile“. I L. D. Landau, ač sám obdržel závěr podobný Chandrasekharovu, dočasně soudí, že „všechny hvězdy hmotnější než $1.5 M_{\odot}$ obsahují oblasti, v nichž jsou porušeny zákony kvantové mechaniky.“ Chandrasekhar si později postěžuje, jak byly těmito názory kvadrzeny aplikace obecné relativity. Sám Einstein v roce 1939 analyzuje chování sférického shluku orbitujících částic a zjistí, že pokud by byl poloměr systému menší než $2GM/c^2$, musely by se částice pohybovat nadsvětelně. Usoudí, že „základním výsledkem tohoto výzkumu je jasné pochopení, proč nemohou Schwarzschildovy singularity existovat ve fyzikální realitě.“

Téhož roku 1939 J. Oppenheimer a H. Snyder spočítají průběh úplného gravitačního zhroucení sférické homogenní hvězdy z nekoherentního prachu pod gravitační poloměr. Vně hvězdy využijí Schwarzschildova řešení, zatímco uvnitř řešení „kosmologického“ — dynamického, Friedmannova. Je to zásadní výsledek, ale jen málokdo mu tehdy věnuje pozornost.¹² Když po válce fyzikové „obrátili směr času“ ve svých algoritmech určených k modelování výbuchů, začalo se potvrzovat, že gravitační kolaps je možný. J. A. Wheeler ještě v roce 1958 raději spekuluje o tom, že se v kolabujícím jádře hvězdy nukleony (neznámým procesem) překotně přemění na záření a to odnese koncentrující se energii pryč. O sedm let později však R. Penrose zavede jako symptom extrémně silné gravitace „zachycené plochy“ a ukáže, že v jejich nitru musí být pro-

¹¹Tedy spojitě vyplněnou částicemi integrujícími jen gravitačně.

¹²Svět tou dobou mnohem víc zajímal článek *Mechanismus jaderného štěpení* Bohra a Wheelera, který v časopise od Oppenheimerova a Snyderova výsledku odděluje jen 5 stránek dnes zapomenuté statě o nitrech neutronových hvězd. Jednalo se o časopis *Physical Review*, číslo z 1. září 1939. . .

storočasná singularita. Na workshopech už tou dobou zaznívá termín „černá díra“, který se později rozšíří hlavně díky J. Wheelerovi.

6. Nebeská světla jsou nakřivo!

Čtvrtek 6. listopadu 1919, v Burlington House na londýnské Piccadilly se koná plenární schůze britské Královské společnosti a speciálně Královské astronomické společnosti. Na pořadu je zpráva o dvou expedicích za měření ohybu světla v gravitačním poli Slunce během zatmění 29. května 1919. Počasí ani fungování přístrojů nebyly tehdy právě nakloněny, nicméně vedoucí expedic F. W. Dyson a A. S. Eddington se spolehli na velmi omezený počet obstojných snímků slunečního okolí a shromáždění s nimi souhlasilo, že naměřené hodnoty se jasně kloní k Einsteinově předpovědi (která je naštěstí dvakrát větší než newtonovská).

V té době znalo obecnou relativitu jen pár lidí. Na britských ostrovech dva — Arthur Eddington a Ludwik Silberstein. Silberstein pocházel z Varšavy, ve zmíněné době dělil práci mezi Řím a Londýn. Již v roce 1914 vydal knihu *Theory of Relativity* (o speciální relativitě), v roce 1922 pak *The Theory of General Relativity and Gravitation* (to už působil v Americe). Arthur Eddington, o 10 let mladší Angličan, napsal v roce 1920 *Report on the Relativity Theory of Gravitation* a hned následně knihu *Space, Time and Gravitation: An Outline of the General Relativity Theory*, v roce 1923 pak velmi uznávanou *The Mathematical Theory of Relativity*. Tito dva muži se údajně setkali při odchodu z listopadové schůze. Silberstein podotkl, že během jednání se po sále šuškal, že obecné relativitě rozumějí na světě jen tři lidé. Eddington nic neříkal, tak ho Silberstein popíchl: „No nebuďte tak skromný...“ Oblékaje si dál zadumaně kabát, Eddington odpověděl: „Ale ne, já jen přemýšlím, kdo by mohl být ten třetí.“ Vskutku britská replika, zvláště když uvážíme, koho Silberstein *samozřejmě* pokládal za toho *druhého*... Je to pěkná historka i z jiného důvodu. Oba protagonisté se později stali ilustrací toho, jak obtížné bylo i pro řadu „poučených“ (ba nadšených) přijmout posléze i předpovědi obecné relativity. O Eddingtonově odporu proti představě gravitačního kolapsu už byla řeč a také Silberstein se přesunul mezi oponenty. V roce 1935 se dostal s Einsteinem do sporu ohledně interpretace statických a osově symetrických řešení polních rovnic. Konkrétně pokládal za nepřijatelné řešení pro dva stojící hmotné body, protože v důsledku vzájemné přitažlivosti by na sebe musely nutně spadnout. Úvaha byla vlastně *správná*, avšak Einstein s Rosenem se mu snažili vysvětlit, že rovnice tento rozpor „poznají“ a mezi zdroje — aby mohly zůstat statickými — do řešení samy doplní singulární „vzpěru“. Silberstein tomu však moc nevěřil a nakonec si i utrhl ostudu před historií, když nevydržel a napsal do torontského Evening Telegram článek pod senzacechtivým titulkem *Fatal blow to relativity issued here*.

Ale vraťme se do listopadu 1919. Einstein se tehdy o senzaci starat nemusel. Londýnské The Times hned 7. listopadu přinesly o výsledcích zatmění nadšený článek (*Revoluce ve vědě — Nová teorie vesmíru — Newtonovy myšlenky překonány*) a další den pak představily čtenářům hrdinu jako „zhruba padesátiletého švýcarského Žida“ (takže mu 10 let přidaly). Dne 9. listopadu zareagovaly i The New York Times. Einsteina představily jako „profesora fyziky z pražské univerzity“, což byl tou dobou více než 7 let starý údaj. Další den pak přidaly i pěkné titulky, např. *Vesmírná světla jsou našikmo — Hvězdy nejsou tam, kde se zdály být nebo kde byly vypočítány, ale nikdo se*

nemusí obávat — *Kniha pro 12 moudrých mužů*. Tolik jich mělo nové teorii rozumět. Učitel a 12 apoštolů... Pro obecnou relativitu to byl triumfální úspěch a Einstein se záhy stal světovou celebritou.

7. Černé díry v astrofyzice

Je 22. 2. 2002 a data se do počítače moc nehrnou. Rentgenová družice Chandra dokončuje poslední ze série snímků čtvrtiny čtverečního stupně v souhvězdí Ursa Major. Kolem přelomu tisíciletí nastřádala celkem 23 dnů expozice této oblasti, některé ze zachycených zdrojů jsou vzdáleny více než 12 miliard světelných let. V červnu 2003 jsou data zpracována. „Je to zatím nejcitlivější či ‚nejhlubší‘ expozice. Nejslabší zdroje vyslaly jen jeden X-foton za 4 dny. Na tomto vysokoenergetickém vzorku raného vesmíru je přítomno více než 500 rentgenových zdrojů. Většinou z nich jsou supermasivní černé díry nacházející se v centrech galaxií. Je-li počet supermasivních černých děr viditelných na tomto místě oblohy typický, pak na celé obloze by se jich s touto citlivostí dalo zachytit 300 milionů.“ V prosinci 2006 píše M. Camenzind v předmluvě své knihy o kompaktních objektech: „Naše Galaxie je obývána miliardami bílých trpaslíků, několika sty miliony neutronových hvězd a pravděpodobně několika sty tisíci černých děr. Ze všech těchto objektů byla zatím jen nepatrná část odhalena astronomickými přístroji, pouze několik tisíců bílých trpaslíků, okolo 2 000 neutronových hvězd a jen pár tuctů černých děr. Ze všech těchto objektů jen černé díry mohou znatelněji nabývat na hmotnosti. Je jedním z velkých úspěchů posledních 15 let, že bylo prokázáno, že skoro každé jádro galaxie ukrývá supermasivní černou díru s hmotností v rozsahu od jednoho milionu do několika miliard slunečních hmotností. Viditelný vesmír tím pádem obsahuje přinejmenším 100 miliard supermasivních černých děr. Jen kolem 100 000 z těchto objektů bylo dosud zjištěno v kvasarech a jen kolem 50 v centrech blízkých galaxií.“

Moderní historie černých děr začala v roce 1963 dvěma nezávislými (a tehdy navzájem značně odlehlými) objevy. 5. února astronoma M. Schmidta napadlo, že podivné spektrální čáry, pozorované u nového typu zdrojů nazvaných „kvasary“, jsou čarami běžně známými, ale posunutými velmi daleko k červenému konci spektra. Zdroje tím pádem musí být nesmírně vzdálené, a tedy extrémně svítivé. O pár měsíců později našel matematik R. Kerr řešení Einsteinových rovnic, o kterém se ukáže, že popisuje rotující černou díru. (S. Chandrasekhar později označoval tento výsledek za největší *astrofyzikální* objev druhé poloviny 20. století.) Během roku 1964 navrhli nezávisle E. Salpeter a J. Zeldovič, že ohromnou svítivost by mohla produkovat akrece látky na velmi kompaktní objekt. Na podzim pak matematik R. Penrose upřesnil pomocí pojmu zachycených ploch základní vlastnost oblastí velmi silného gravitačního pole a následně zjistil, že uvnitř takových oblastí nemůže být prostoročas všude regulární. „Zlatý věk“ černých děr a relativistické astrofyziky začíná.

I díky dalším zjištěním. V roce 1962 byly objeveny rentgenové zdroje a v roce 1967 pulsary, tedy další objekty, jejichž parametry je těžké vysvětlit jinak než přítomností černých děr nebo neutronových hvězd. Zakrátko osídlila tato relativistická tělesa i astrofyzikální literaturu a dnes je s nimi spojena převážná část astrofyziky vysokých energií. Kromě toho byl roku 1967, jako náhodný výsledek satelitní kontroly jaderných testů, poprvé nepochybně zaznamenán mimozemský gama záblesk. Po 6 letech vyšel

o těchto jevech první vážný článek, a když se během 90. let potvrdila jejich kosmologická povaha, ukázaly se být neenergetičtějšími známými událostmi ve vesmíru. Vysvětlení vychází z gravitačního kolapsu jednotlivé hvězdy nebo binárního systému neutronových hvězd.

Co se nedá pozorovat přímo, je třeba stopovat přes gravitační vliv na okolí. Černá díra je nejsilnějším zdrojem gravitace, tedy nejsilněji působí na látku a pole kolem sebe. Látky uděluje velmi vysoké rychlosti, takže při kolizích různých jejích proudů vzniká mnoho tvrdého záření. Díky aberaci je toto záření výrazně soustředěno do směru pohybu zdroje a díky Dopplerovu efektu také spektrálně posunuto. Směr šíření záření (tedy i intenzita) i jeho frekvence (tedy tvar spektra) jsou navíc přímo ovlivněny gravitací díry. Černá díra je také *nejmenším* zdrojem gravitace, takže procesy probíhající v jejím okolí vykazují ve srovnání s jinými zdroji téže hmotnosti velmi rychlou proměnlivost, zejména v nejtvrdším záření, které vzniká nejbliže u horizontu. Ve světelných křivkách některých zdrojů byly odhaleny i kvaziperiodické oscilace, jejichž frekvence se rozumně shodují s charakteristickými časy systému dominovaného ultrakompaktním tělesem (zejména s oběžnou periodou a s periodami tzv. epicyklických kmitů, vyvolaných poruchami oběhu).

Pro aktivitu je klíčové, zda má kompaktní objekt s čím interagovat. Látka do/na něj přitéká s obrovskou potenciální energií a typicky i s nenulovým orbitálním momentem hybnosti (tj. nikoli přesně radiálně). Díky němu kolem centra vytvoří disk, jehož rovnováha je zajišťována odstředivou silou a stabilita centrálním tělesem. Ve vysoce nehomogenním poli oběžná rychlost materiálu v radiálním směru rychle klesá, takže jeho vazbová energie může být uvolňována v podobě tepla viskozitním třením sousedních vrstev disku. Účinnost disipace může dosáhnout až desítek procent, přičemž látka v jejím důsledku pomalu spiráluje k centru. U objektů s pevným povrchem (neutronových hvězd) je další část orbitální energie a momentu přeměněna na teplo a záření při dopadu, zatímco u černých děr skončí látka nakonec pod horizontem. Kromě disipace a příspěví k parametrům centra však připadá v úvahu ještě další „kanál“: z řady akrečních systémů vycházejí — nezdělaná ultrarelativistickými rychlostmi — výtrysky („*jetty*“) kolimované podél jejich rotační osy. Energie a moment hybnosti výtrysku nemusejí pocházet jen z akreční hydrodynamiky, mohou být čerpány i ze samotného (rotujícího) centrálního objektu, nejspíše elektromagnetickou cestou. Různé aspekty chování studovaných zdrojů jsou často časově korelované, což signalizuje, že zdroje přecházejí mezi několika akrečními režimy.

Zvlášť silná zpráva od obecné relativity dorazila k Zemi ve středu 19. března 2008 v 7:12:49 SEČ. Družicové detektory rentgenového a gama záření zaznamenaly nevídané zvýšení toku ze směru nedaleko hvězdy γ Bootis; zdroj dostal rutinní označení GRB 080319B. Díky rychlé reakci sítě přístrojů a dlouhému „dozvuku“ výbuchu (několik hodin) se podařilo získat světelné křivky a kvalitní spektrum v tvrdých oborech i ve viditelné oblasti. Záblesk byl teoreticky (na zcela temné obloze) po 30 sekund viditelný pouhým okem, přitom jeho „redshift“ $z = 0.937$ ukázal na vzdálenost 7.5 miliardy světelných let! Ve viditelném a infračerveném oboru byl tím pádem nejsvětivější událostí, jaká byla kdy pozorována; kdyby se takové vzplanutí odehrálo poblíž jádra naší Galaxie, převýšil by na Zemi jeho jas naše Slunce. Pokud byl záblesk izotropní, dosáhl při něm špičkový zářivý výkon řádu 10^{53} erg/s a celkově bylo vyzářeno $4 \cdot 10^{54}$ erg energie. To se však zdá být nemožné, odpovídalo by to plné přeměně asi

dvou sluncí na energii během pár hodin. Je proto pravděpodobné, že záblesk byl velmi kolimovaný a v oblasti naší galaxie obzvláště jasný díky její vhodné poloze. Zůstala po GRB 080319B neutronová hvězda, nebo černá díra?

Téměř žádné pochybnosti, zdá se, nezůstávají v případě jádra naší Galaxie. Dráhy hvězd, které kolem samotného středu obíhají, prozrazují, že v jejich společném ohnisku se nachází hmotnost asi 4 milionů Sluncí. (V oblasti o rozměru jednoho parseku kolem středu je kromě toho ve hvězdách a plynu rozptýlen asi 1 milion Sluncí.) Navzdory observačně nevýhodné pozici je do jádra na některých (rádiových a infračervených) frekvencích „vidět“ — avšak žádný patřičně hmotný objekt tam *vidět* není. Hvězda známá pod označením S2 (případně S0–2) již vykonala pod dohledem přístrojů jeden a půl celého oběhu; její perioda je totiž asi 16 let a nejmenší vzdálenost od středu jen 120 AU, tedy asi $4\times$ více než poloměr dráhy Neptunu (a asi $3000\times$ více než Schwarzschildův poloměr předpokládané superhmotné černé díry). Plný oběh je znám i u hvězdy zvané S0-102, u ní trvá jen 11.5 roku; dráha je však méně excentrická než u S2, takže pericentrum je vzdálené podobně.

8. Princip ekvivalence ve vašem automobilu

Velké tuzemské budovatelské projekty bývají snadno zaskočeny vlhkostí či deštěm (a samozřejmě gravitací. . .), takže se zdá neuvěřitelným, že vývoj prvního systému satelitní navigace GPS už od teoretických počátků v 50. letech bral v úvahu obecnou relativitu, totiž rozdílný chod času v místech s rozdílným gravitačním potenciálem (na zemi a na satelitu). Přesněji řečeno, k takovéto prozíravosti stačí znalost principu ekvivalence (a speciální relativity), takže spíše než s nalezením polních rovnic by bylo na místě ji spojovat s Einsteinovým bernským nápadem z konce roku 1907 a jeho pražským rozvinutím. I někteří z nás, co pokládáme Einsteinovu teorii za svou obživu, jsme se však významu obecné relativity v GPS na první pohled divili, a tak stojí za to připomenout, že za jejími efekty není nutné chodit do extrémně silných gravitačních polí nebo do kosmologie. Skutečně, díky kontaktu přijímače s vícero satelity a vyhodnocování *rozdílu* příchodu signálů je GPS vůči chybě „nultého řádu“ imunní, ale kdyby byl satelit jen jeden (nad vámi) a chtěli byste měřit svou nadmořskou výšku, činila by při zanedbání rozdílného chodu hodin chyba po uplynutí jednoho dne 11.5 kilometru!

Pokud tedy někdy vyjedete z trojského ústí červí díry v Praze známé pod jménem Blanka a příjemný dámský hlas vám nařídí „po 900 metrech odbočte vlevo,“ můžete mít pocit, že jste v kontaktu se strukturou prostoročasu (a po odbočení u nás na fakultě zajít na relativistický seminář).

9. Gravitační vlny: 1916–2016?

„Vážený pane, svůj rukopis jsme Vám (pan Rosen a já) zaslali k publikaci, a nezmocnili jsme Vás, abyste ho ukazoval specialistům dřív, než bude otištěn. Nevidím žádný důvod, abychom reagovali na — beztak chybné — poznámky Vašeho anonymního odborníka. Po tomto incidentu dávám přednost publikaci článku jinde.“ Dlouholetý hlavní editor Physical Review John T. Tate dostal rozhořčený dopis od Einsteina patrně v úterý 28. července 1936. A Einstein do jeho časopisu od toho dne už nic neposlal. Zřejmě poprvé se setkal s anonymní recenzí (v Německu tato praxe ještě zave-

dena nebyla a jeho předchozí práce pro „Phys-Rev“ přijal Tate bez recenze). V článku s N. Rosenem zkoumali přesně cylindrické gravitační vlny a nedařilo se jim získat regulární metriku, což je spolu s energetickými úvahami přivedlo k závěru, že gravitační vlny jsou nestabilní a tedy vůbec nemohou existovat. Po 69 letech od „incidentu“ potvrdil časopis domněnku, že recenzentem byl Howard P. Robertson. Ve svém desetistránkovém (!) posudku nesouhlasil se závěrem autorů; s odkazem na literaturu správně uváděl, že metrika nekonečných vln je nutně singulární a přináší „kaustiku“ v pohybu částic, ale že to ještě neindikuje skutečnou patologii prostoročasu. Literatura již tou dobou opravdu existovala: O. Robert Baldwin a George B. Jeffery v roce 1926 publikovali v Proceedings of the Royal Society of London A práci *The relativity theory of plane waves* (dnes jsou tato nejjednodušší vlnová řešení přesných Einsteinových rovnic známa jako pp-vlny), v níž se s podobnou singularitou také setkali. A ještě o rok dříve našel Guido Beck (rodák z Liberce) rodinu všech válcově symetrických a nerotujících vakuových řešení v rámci svého doktorátu u H. Thirringa ve Vídni.

Úvahy o gravitačních vlnách lze ostatně vysledovat přinejmenším k Poincarému (který o nich uvažoval mj. v souvislosti s anomální precesí perihelia Merkuru!), k Maxwellovi, či dokonce k Laplaceovi (ten na ně pomyslel, když přemýšlel o změně oběžné doby Měsíce). V roce 1914 Max Abraham vyslovil přesvědčení, že gravitační vlny nemohou být dipólové jako elektromagnetické, protože platí-li princip ekvivalence, je gravitace *univerzální* interakcí, takže — na rozdíl od elektrického dipólu — nelze vytvořit gravitační dipól (hmotnost má vždy stejné znaménko). Einstein pomýšlel na vlnové řešení již během dokončování polních rovnic, tedy asi rok před jejich aplikací kosmologickou. V dopise Schwarzschildovi 19. února 1916 píše, že ve verzi teorie ze 4. listopadu volil souřadnice tak, aby platilo $g^{\mu\nu},_{,\nu} = 0$, zatímco později se přiklonil k jiné podmínce $\sqrt{-g} = 1$ a musel tedy změnit také odvození newtonovské limity. A pro čtenáře trochu „rychle“ pokračuje: „Neexistují tudíž gravitační vlny analogické světelným. Mimochoodem, je to patrně také spojeno s tím, že skalár T má vždy stejné znaménko. (Neexistence ‚dipólu‘.)“

Zanedlouho, v červnu 1916, však Einstein publikuje linearizovanou verzi polních rovnic a rozbor jejího vlnového řešení. Potvrzuje (vlastně spíše předpokládá), že pole se šíří rychlostí světla, a počítá, jakou energii přenášejí rovinné vlny. Zjišťuje, že některé energii nepřenášejí, a v dodatku vysvětluje, že tyto nejsou „reálné“, nýbrž čistě souřadnicové. Pozoruhodný je závěr článku: „Vzhledem k tomu, že elektrony se uvnitř atomů pohybují, by atomy musely vyzařovat nejen elektromagnetickou, ale také gravitační energii, i když jen v nepatrném množství. To se však v přírodě zjevně neděje, takže kvantová teorie by měla pozměnit nejen maxwellovskou elektrodynamiku, ale také novou teorii gravitace.“ Na počátku roku 1918 vychází pokračování *Über Gravitationswellen*. Einstein v něm opravuje chybu, kvůli které mu v předchozí práci nevyšel správně komplex energie a hybnosti, a následně stvrzuje, že sféricky symetrický systém žádné vlny nevysílá. V kapitole o generaci vln odvozuje slavný „kvadrupólový vzorec“, podle něž je vyzařovaný výkon P dán třetí časovou derivací bezestopého kvadrupólového tenzoru Q_{ij} ,

$$P = \frac{G}{5c^5} \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij}, \quad (7)$$

a poté uvažuje naopak o přenosu energie vlnami na mechanické systémy. V letech 1922 a 1923 přispěl k tématu Eddington, když potvrdil, že z vlnových řešení mají fyzikální

realitu jen „příčně-příčná“ (ekvivalentní řešením dnes nazývaným TT vlny), doplnil chybějící faktor 2 v kvadrupólové formuli a jako první začal řešit zásadní otázku zpětného působení záření na *svůj* zdroj (tzv. problém radiační reakce).

Konečně zpět do roku 1936 k článku s Rosenem. Einstein *nevěděl* jeho závěr o neexistenci vln jako spor s vlastními pracemi z let 1916 a 1918, poněvadž ty se omezovaly na lineární přiblížení. Po stažení z „Phys-Rev“ poslal článek víceméně nezměněn do málo známého Journal of the Franklin Institute, kde také následujícího roku vyšel. Vyšel však nakonec — k nelibosti Rosena — s právě opačným (*pozitivním*) vyzněním. Robertson totiž pracoval na stejné univerzitě jako Einstein (v Princetonu) a o chybě v úsudku mezitím promluvil s L. Infeldem, který právě vystřídal Rosena v roli Einsteinova asistenta. Infeld věc probral s Einsteinem a ten v korekturách závěr předělal.

Diskuse tím zdaleka neskončily. Dlouhá desetiletí se ještě měla řešit oprávněnost různých aproximačních schémat, zejména v případě rychle se pohybujících zdrojů (kdy je problematický postnewtonovský rozvoj), ale stále se pochybovalo vůbec o realitě gravitačních vln (jako souřadnicově nezávislém jevu)¹³ a zejména o použitelnosti kvadrupólové formule — nanovo poté, co se Josephem Weberem oznámené první zaznamenání vln (1969) ukázalo jako plané. Diskuse ještě zesílila, když v roce 1974 Russell Hulse a Joseph Taylor objevili první binární pulsar PSR B1913+16, protože tím byla poprvé k dispozici „laboratoř“, která měla vykazovat mnohé do té doby neměřitelné relativistické efekty. Do konce desetiletí bylo jasné, že perioda systému se díky ztrátě energie gravitačním zářením zmenšuje (neutronové hvězdy k sobě klesají), a to ve shodě s Einsteinovým kvadrupólovým vzorcem.

Dnes je již známa řada pulsarů, které tvoří dvojhvězdu s normální hvězdou, bílým trpaslíkem či jinou neutronovou hvězdou. Velmi intenzívně je zkoumán např. systém PSR J0737-3039, v němž kolem sebe krouží dvě neutronové hvězdy a *obě* jsou viditelné jako pulsary. Zatímco v PSR B1913+16 kolem sebe obíhají jednou za 7.75 hodiny, nejvíce se přibližují na vzdálenost srovnatelnou s poloměrem Slunce, relativistický posun pericentra jejich dráhy činí 4.2° za rok a gravitačními vlnami vysílají výkon řádu 10²⁴ W, v případě PSR J0737-3039 je perioda 2.4 hodiny, nejmenší vzdálenost je podobná (dráha je totiž velmi málo excentrická), posun pericentra je celých 17° za rok a gravitační výkon řádu 10²⁵ W (to je asi desetina výkonu Slunce v elektromagnetickém záření). Binární pulsary jsou typicky mnohem „čistějšími“ systémy než akreující černé díry, takže interpretace měřených projevů je u nich mnohem jednoznačnější a věrohodnější. Bylo na nich testováno vícero nezávislých efektů a zjištěna udivující shoda výsledků s předpověďmi obecné relativity; řada možných alternativních teorií gravitace byla naopak vyloučena.

Zatímco oběžné doby binárních pulsarů stále přesněji potvrzovaly kvadrupólovou formuli, na několika místech po světě se tvořily týmy následovníků Josepha Webera, které zahájily rozsáhlé úsilí o *přímou* detekci gravitačních vln, od 90. let především pomocí laserových interferometrů kilometrových rozměrů. V letech 1999–2003 pracoval japonský detektor TAMA300 (nyní je dokončován jeho nástupce KAGRA), od roku 2002 je v provozu americká dvojice detektorů LIGO a německé GEO600, od

¹³Pochyby dlouho budil i zdánlivý nesoulad s principem ekvivalence: podle toho je volně padající těleso (např. po vázané dráze volně obíhající kolem jiného tělesa) „neurychlené“, tím pádem by nemělo žádné vlny vysílat. Ukázalo se však, že pro to, zda inerciální pozorovatel ve velké vzdálenosti vlny zaregistruje, je podstatné zrychlení zdroje „vůči tomuto pozorovateli“. (Jinak by binární systémy kompaktních objektů nebyly slibnými zdroji vln.)

roku 2007 evropská laboratoř VIRGO v Itálii a další jsou ve výstavbě. Kromě toho je aktivních několik detektorů založených na vibraci těžkých hmot podobně jako historický Weberův přístroj. Na straně teoreticko-astrofyzikální je tento vývoj podpořen rychlým pokrokem v modelování kolizí velmi kompaktních objektů (neutronových hvězd a černých děr) a doprovodné gravitační emise, ať už prostřednictvím aproximačních technik nebo numerickým řešením polních rovnic. I přes těžko uvěřitelnou citlivost přístrojů, které již bylo dosaženo,¹⁴ nebyla dosud žádná gravitační událost zaznamenána. Díky teoretickým kvalitám i dosavadní úspěšnosti v testech má však Einsteinova teorie takovou důvěru, že relativisté spíš občas pochybují o účelnosti vynaložených prostředků, než že by je příliš zneklidňovalo „gravitační ticho“. Trochu netrpělivější jsou přirozeně experimentátoři a na konferencích zmiňují, že nehodlají čekat déle než do roku 2016 ☺. Dodávají však, že pozemní detektory jsou u hranice svých možností a že budou těžko kdy schopny jakékoli „gravitační astronomie“.

10. Přání

Když psal Einstein 8. února 1916 Arnoldu Sommerfeldovi blahopřání k nové teorii spektrálních čar, zmínil se nakonec i o své nové teorii, kterou právě urovnával do souborné publikace: „Obecná teorie relativity Vás přesvědčí, až ji prostudujete. Proto ji nehájím jediným slovem.“ I po 100 letech přesvědčuje relativita nevyhnutelností, se kterou plyne z minima výchozích předpokladů, myšlenkovou i matematickou elegancí, jakož i absencí volitelných parametrů (snad kromě kosmologické konstanty). Udivuje jako mimořádný výkon, dosažený téměř výlučně jediným člověkem, navíc za mimořádně nepříznivých okolností. A dnes navíc i odolností vůči observačním a experimentálním testům — a také vůči snahám o kvantování. Clifford M. Will, který pod titulem *Was Einstein right?* pravidelně dodává komunitě detailní přehled o stavu a výsledcích experimentů, v posledním vydání ke 100. výročí dodává: „Having spent almost half of the century of general relativity’s existence and being astonished by its continuing agreement with observation, I might be permitted a personal reflection at this point on the future of the subject: It would not at all surprise me if general relativity turned out to be perfectly valid at all scales, from the cosmological to the astrophysical to the microscopic, failing only at the Planck scale where one naturally expects quantum gravity to take over.“

Jistě, vždyť čím je stovka let pro elegantní dámu? Přejme jí 2 000 let, jako vládla eukleidovská geometrie. Byla to přece obecná relativita, která naplnila tušení Gausse, Bolyaiho, Lobačevského a Riemanna o neeukleidovských odchylkách v reálném světě. Již od jejího vzniku ji mnozí nadšeně obdivovali po logické, matematické, fyzikální i estetické stránce. Ale stále se mi nejvíc líbí výrok připisovaný Ivoru M. Robinsonovi: „Jasně, správnou teorií gravitace je obecná relativita. A pokud není, tak by rozhodně měla být.“

Poděkování. Děkuji prof. Jiřímu Bičákovi za přečtení článku a náměty k jeho vylepšení.

¹⁴Zaregistrují změnu délky svých kilometrových ramen o nějakých 10^{-20} metru, což je stotisíckrát méně než typické škály jaderné a částicové fyziky (než Comptonova vlnová délka protonu).