

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Vratislava Mošová

O matematice v mobilu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 60 (2015), No. 1, 50--57

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/144336>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2015

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

O matematice v mobilu

Vratislava Mošová, Olomouc

1. Úvod

V posledních letech vykonal rozvoj v oblasti komunikačních technologií velký skok dopředu. Počítače postupně začaly nahrazovat tradiční informační média jako jsou rozhlas a televize. Nepostradatelnou součástí spojení s okolním světem se staly počítačové aplikace e-mail a Skype. Většina z nás si už ani nedovede představit svůj den bez onoho pomocníka, společníka i otrokáře – mobilu. Málokdo však ví, že za přenosem zvuku a obrazu, které mobil nebo internetová síť realizují, stojí takové matematické nástroje jako jsou Fourierova (viz [5], [9], [4]) nebo waveletová transformace (viz [3], [7], [10]) a že moderní mobily mají v sobě také další matematické algoritmy spojené s mnoha aplikacemi jako jsou GPS, hry apod. Fourierovy myšlenky tak nyní nosíme ve svých mobilech.

Vraťme se však k Fourierově a waveletové transformaci, které byly definovány a používány už dříve k aproximaci funkcí i k řešení diferenciálních rovnic. V roce 1778 Joseph Fourier poprvé využil trigonometrické řady k aproximaci 2π periodických funkcí. A v roce 1909 byly Haarovy wavelety prezentovány jako příklad spočetného ortonormálního systému v prostoru $L^2(\mathbb{R})$.

V souvislosti s příchodem počítačů, a tím i s možností zpracovávat velké objemy dat v krátkých časových úsecích, vzrostl význam zmíněných transformací ještě více. Fourierova a waveletová transformace se staly teoretickou základnou pro algoritmy používané při zpracování signálu. Ve stávajícím textu zaměříme pozornost na jejich roli při zpracování zvukových a obrazových signálů.

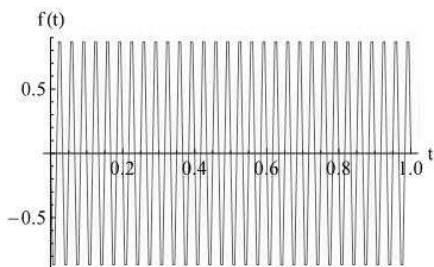
2. Matematické modelování signálů

Zvukový signál je vlnění, které vzniká chvěním vzduchového sloupce. Matematicky ho lze popsat jako reálnou funkci závislou na jedné reálné proměnné – času. Zvukové signály lze rozdělit na stacionární (např. jednotlivé tóny) a nestacionární (např. melodie, řeč). Uvedené typy signálu jsou znázorněny na obrázku 1 a obrázku 2.

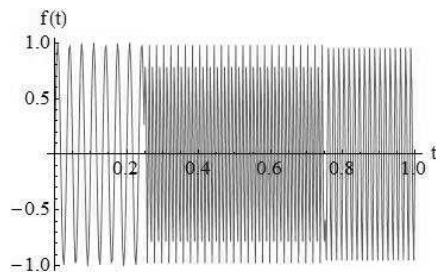
Obrazový signál je reálná funkce závislá na dvou proměnných. Přiřazení barev a jasů jednotlivým pixelům se realizuje ve formě matic a každá z obou složek (chromizační a luminiscenční) je zpracovávána samostatně.

Před tím, než se začne signál zpracovávat, je třeba ho navzorkovat, tzn. změřit, popř. spočítat hodnoty f_i sledovaného signálu ve vybraných bodech x_i , $i = 0, \dots, N - 1$. Vzorkovací frekvenci ω je při tom nutné zvolit tak, aby pro signál periodický s periodou T byla splněna Nyquistova podmínka $\omega \geq 1/T$. Tato volba umožňuje zabránit vzniku nežádoucích zkreslujících efektů tzv. aliasingu.

RNDr. VRATISLAVA MOŠOVÁ, CSc., Ústav informatiky a aplikované matematiky MVŠO o. p. s., tř. Kosmonautů 1, 779 00 Olomouc, e-mail: vratislava.mosova@mvsso.cz



Obr. 1. Stacionární signál



Obr. 2. Nestacionární signál

V rámci zpracování signálu se provádějí především dvě základní úpravy, a to odstranění šumu a komprese signálu. Příčinou šumu může být nevhodné navzorkování nebo působení náhodných vlivů (hluk z okolí, porušení zvukového nosiče). Odstraněním šumu se získá čistý, snadno čitelný signál. Kompresi je žádoucí provést u signálů reprezentovaných velkým počtem dat (např. u obrazových signálů). Realizace snížení počtu dat však musí proběhnout tak, aby podstatná část informace uložené v datech zůstala zachována. Zmíněné úpravy se provádějí pomocí Fourierovy nebo waveletové transformace signálu.

3. Fourierova transformace

Pro $f \in L^1(\mathbb{R})$ reprezentuje relace

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi i\omega x} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

spojitou Fourierovu transformaci (CFT) funkce f . Integrální transformace

$$F^{-1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-2\pi i\omega x} d\omega, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

pak představuje inverzní Fourierovu transformaci.

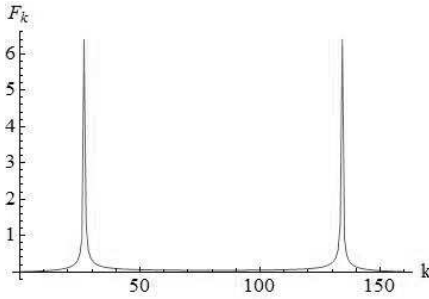
Pro počítačovou implementaci jsou vhodné diskrétní analogie relací (1) a (2). V případě N navzorkovaných hodnot f_0, \dots, f_{N-1} signálu f je diskrétní Fourierova transformace (DFT) definována vztahem

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{2\pi ijk/N}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (3)$$

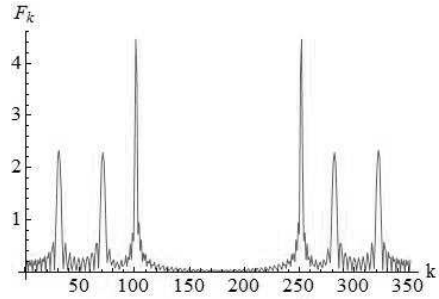
Počet operací nezbytných k výpočtu koeficientů F_k pomocí vztahu (3) je řádově $O(N^2)$. Existuje však efektivní numerický algoritmus rychlé Fourierovy transformace (FFT), který umožňuje zredukovat počet použitých operací (viz [9]). Algoritmus využívá vlastností exponenciální funkce a je založen na důmyslné organizaci výpočtu. Následující lemma je uvedeno na str. 391 v publikaci [8].

Lemma 1 (Danielsonovo–Lanczosovo, 1942). Nechť N je sudé a $W^{jk} = e^{2\pi ijk/N}$, pak

$$F_k = F_k^0 + W^k F_k^1, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (4)$$



Obr. 3. Absolutní hodnoty DFT pro stacionární signál



Obr. 4. Absolutní hodnoty DFT pro nestacionární signál

kde $F_k^0 = \sum_{j=0}^{N/2-1} W^{2jk} f_{2j}$, $F_k^1 = \sum_{j=0}^{N/2-1} W^{2jk} f_{2j+1}$ a $W = e^{2\pi i/N}$ je N -tá primitivní odmocnina z jedné.

Jestliže je počet navzorkovaných hodnot $N = 2^M$, lze lemma 1 rekurentně aplikovat M krát. Tímto způsobem FFT sníží řád počtu operací potřebných k výpočtu koeficientů Fourierovy transformace z $O(N^2)$ na $O(N \log N)$.

Na výše uvedených dvou obrázcích jsou grafy absolutních hodnot Fourierových koeficientů pro stacionární a nestacionární signál.

Zatímco signál poskytuje informaci o variabilitě vzhledem k nezávislým proměnným, jeho Fourierova transformace podává informaci o frekvencích, které se v daném signálu vyskytují. Znalost frekvenčního spektra signálu je důležitá, protože je základem pro analýzu signálu. Pomáhá odhalit jak nespojitosti, tak periodicitu nebo šum v signálu. Nízké frekvence jsou důležité při vlastní identifikaci signálu, vyšší frekvence často reprezentují šum.

Při odstraňování šumu ze signálu se získané Fourierovy koeficienty modifikují s ohledem na to, čeho je třeba dosáhnout. Např. porušení datových nosičů se odstraňuje pomocí tvrdého prahování, kdy se Fourierovy koeficienty, které odpovídají frekvenci vyšší než pevně zvolený práh λ , položí rovny nule.

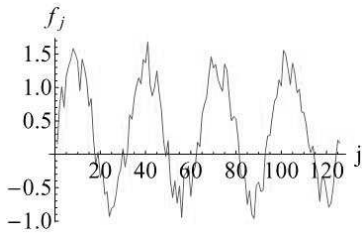
Kompresi rozsáhlých množin dat reprezentujících navzorkovaný signál, se provádí tak, že většina Fourierových koeficientů, které nejsou významné pro daný signál, se zanedbá.

Po provedení těchto úprav se na zbylé Fourierovy koeficienty aplikuje inverzní diskrétní Fourierova transformace:

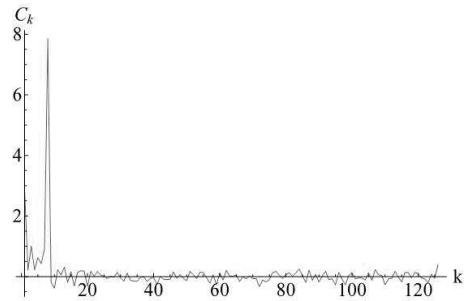
$$f_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{-2\pi i j k / N}, \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (5)$$

Ke zpracování signálu je také možné použít různé modifikace Fourierovy transformace. Protože Fourierovy koeficienty obecně nabývají komplexních hodnot, využívá se při zpracování reálných dat pouze reálná část Fourierovy transformace, tzv. diskrétní kosinová transformace (DCT)

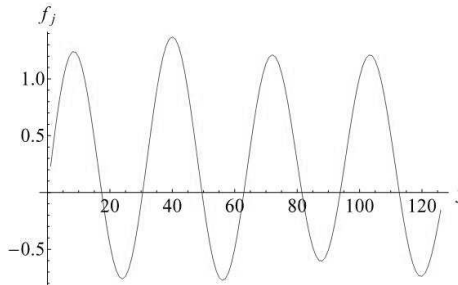
$$C_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cos \left[\frac{k\pi}{N} \left(j + \frac{1}{2} \right) \right], \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (6)$$



Obr. 5. Zvukový signál se šumem



Obr. 6. DCT daného signálu



Obr. 7. Zvukový signál po odstranění šumu

v kombinaci s inverzní diskretní kosinovou transformací

$$f_j = \frac{2}{N} \left(\frac{1}{2} C_0 + \sum_{k=1}^{N-1} C_k \cos \left[\frac{k\pi}{N} \left(j + \frac{1}{2} \right) \right] \right), \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (7)$$

Na obrázcích 5 až 7 je prezentováno odstranění šumu z daných dat při použití kosinové transformace a tvrdého prahování s prahem $\lambda = 0.5$.

Při zpracování obrazového signálu se využívá dvoudimenzionální verze kosinové transformace (2D DCT):

$$C_{km} = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{P-1} f_{jl} \cos \left[\frac{k\pi}{N} \left(j + \frac{1}{2} \right) \right] \cos \left[\frac{m\pi}{P} \left(l + \frac{1}{2} \right) \right],$$

$$k = 0, \dots, N-1, \quad m = 0, \dots, P-1.$$

Např. komprese obrazu ve formátu JPEG (Joint Photographic Experts Group) začíná rozkladem na bloky, kterým je přiřazen příslušný barevný model. Pokračuje se aplikací dvoudimenzionální DCT. Tři barvy systému RGB (Red-Green-Blue) se zpracovávají nezávisle. Provede se modifikace koeficientů, při níž jsou vynechány ty vysokofrekvenční složky jasu, které oko nevnímá. Na závěr se provede dvoudimenzionální inverzní DCT.

Jinou modifikací Fourierovy transformace je tzv. okénková transformace

$$F(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) w_r \left(\frac{x-t}{r} \right) e^{-i\omega x} dx, \quad (8)$$

kde $w_r(x) = w(x/r)$ je okno (tj. dostatečně hladká funkce s kompaktním nosičem) a r je parametr, který umožňuje korigovat velikost analyzovaného segmentu signálu. Na rozdíl od původní Fourierovy transformace (3), při níž se ztrácí informace o čase, diskrétní forma okénkové transformace (8) informaci o čase poskytuje.

Otázkou ovšem zůstává, jak velké okénko zvolit. Při použití užšího okénka má okénková transformace dobré rozlišovací schopnosti v časové oblasti, ale horší v oblasti frekvenční. Při použití širšího okénka je to naopak. Výhodiskem z problému může být víceúrovňová analýza signálu realizovaná prostřednictvím waveletových transformací.

4. Waveletová transformace

Fourierova báze v prostoru $L^2(0, 2\pi)$ je systém, který vznikne prostřednictvím dilatací a translací sinusových vln. V analogii s tím je možné zkonstruovat v prostoru $L^2(\mathbb{R})$ bázi s podobnými vlastnostmi. Základní ideou je nahradit exponenciální funkci waveletem¹ a ke zvolenému waveletu ψ pak pomocí dilatací a translací vytvořit waveletovou bázi.

Waveletová transformace funkce $f \in L^2(\mathbb{R})$ s waveletem ψ je definována vztahem

$$(W_\psi f)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx, \quad (9)$$

kde a představuje dilataci (škálu, měřítko) a b translaci. Hodnoty $(W_\psi f)(a, b)$ se pro pevně daná a a b nazývají waveletové koeficienty. V případě, že $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $b \in \mathbb{R}$, hovoříme o spojité waveletové transformaci. Když a a b nabývají diskretních hodnot, mluvíme o diskretní waveletové transformaci. Z důvodu efektivity výpočtu je zvykem pracovat s dilatací² $a = 2^{-j}$ a s translací $b = 2^{-j}k$, kde $j, k \in \mathbb{Z}$. Příslušná diskretní waveletová transformace funkce f má pak tvar

$$W_{j,k} = 2^{j/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi(2^j x - k) dx. \quad (10)$$

Ovšem standardizovaný systém $\{2^{j/2} \psi(2^j x - k)\}$ nemusí být pro obecnou funkci ψ ortonormální. Jednou z možností, jak získat ortonormální bázi v $L^2(\mathbb{R})$, je realizace víceúrovňového multirozkladu (MRA)³. V rámci multirozkladu se konstruují prostory $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{Z}$, které splňují

$$V_j \subset V_{j+1}, \quad (11)$$

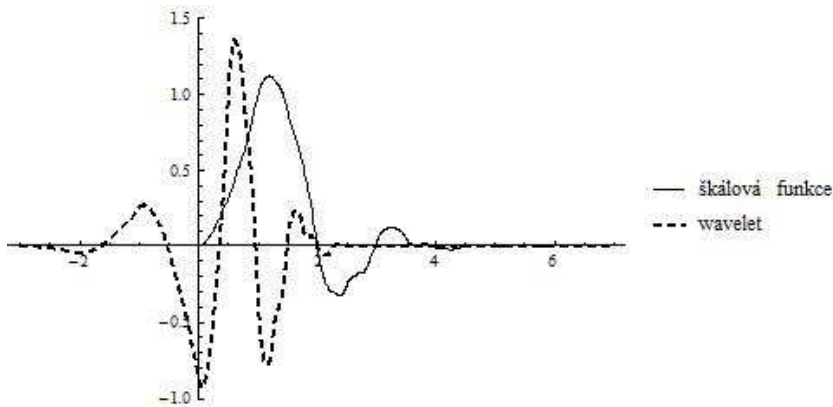
$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \quad (12)$$

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}), \quad (13)$$

¹Wavelety jsou funkce, které nejsou periodické a které si lze představit jako vlnky rychle klesající k nule pro $x \rightarrow \pm\infty$. (Viz [2].)

²Vyšší hodnotě dilatace přísluší „delší“ wavelet. Ten je schopen zachytit data, která se vyskytují s nižší frekvencí.

³Konstrukce waveletů prostřednictvím MRA, postavená na existenci škálové funkce φ , byla v roce 1988 navržena francouzským matematikem Stéphanem Mallatem. (Viz [6].)



Obr. 8. Wavelety Daubechiesové Db4

$\exists \varphi \in V_0$ takové, že $\{\varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je úplná ortonormální množina v $L^2(\mathbb{R})$, (14)

$$f \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j. \quad (15)$$

Při multirozkladu hraje důležitou roli škálová funkce. Pokud je $\{V_j\}$ multirozklad se škálovou funkcí φ , která splňuje dilatační rovnici

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \varphi(2x - k), \text{ kde } u_k = \sqrt{2} \int_R \varphi(x) \overline{\varphi(2x - k)} dx, \quad (16)$$

pak vztahem

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k \varphi(2x - k), \text{ kde } v_k = (-1)^{k-1} \overline{u_{1-k}}, \quad (17)$$

je definován tzv. přidružený wavelet příslušný k uvažovanému multirozkladu.

Na obrázku 8 je zachycen wavelet Daubechiesové⁴ spolu s příslušnou škálovou funkcí.

Ze způsobu konstrukce prostorů V_j plyne, že existují podprostory W_j ortogonální k V_j tak, že $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$. Prostory V_j , resp. W_j jsou generovány dilatacemi a translacemi škálových funkcí, resp. přidružených waveletů. Platí

$$V_j = \overline{\text{span}\{\varphi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}}, \text{ kde } \varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k), \quad (18)$$

$$W_j = \overline{\text{span}\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}}, \text{ kde } \psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k). \quad (19)$$

Protože $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1} = \dots = V_{j_0} \oplus W_{j_0} \oplus W_{j_0+1} \oplus \dots \oplus W_{j-1}$, $j_0 \in \mathbb{Z}$,

⁴Wavelety Daubechiesové DbN (viz [1]) patří k hojně používaným nástrojům při zpracování signálu. Tyto wavelety jsou pro $N > 1$ spojitě, ortogonální, mají kompaktní nosič délky $2N - 1$ a N nulových momentů. Ingrid Daubechies je Belgičanka, která žije v USA. V roce 2012 její práci ocenil belgický král udělením titulu baronky.

představuje množina $\{\varphi_{j_0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\psi_{j,k}\}_{j \geq j_0, k \in \mathbb{Z}}$ úplnou ortonormální bázi⁵ v $L^2(\mathbb{R})$. To znamená, že libovolnou funkci $f \in L^2(\mathbb{R})$ lze rozepsat jako součet

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{j,k} \psi_{j,k}(x), \quad (20)$$

kde $a_{j_0,k} = \langle f, \varphi_{j_0,k} \rangle$ jsou aproximační a $b_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$ detailní koeficienty funkce f definované prostřednictvím skalárního součinu v $L^2(\mathbb{R})$. Aproximační koeficienty patří k nízkým frekvencím a odpovídají trendu signálu, detaily pak zase k vyšším frekvencím a mohou být interpretovány jako šum v signálu.

Výpočet koeficientů probíhá na základě Mallatova algoritmu (viz [7]) ve dvou fázích — dekompoziční a rekonstrukční. Během procesu dekompozice se postupně počítají hodnoty aproximačních koeficientů $a_{j,k}$ a detailních koeficientů. Oba typy waveletových koeficientů lze ještě před zahájením procesu rekonstrukce modifikovat.

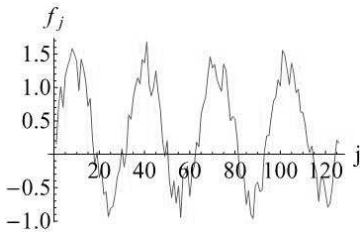
Odstanění nechtěného trendu ze signálu se dosáhne vymazáním složek s nízkou frekvencí tzn. odstraní se aproximační waveletové koeficienty.

Šum ze signálu zmizí, když se waveletové koeficienty $b_{j,k}$, které nemají hodnotu větší než vybraný práh λ , položí rovny nule. Je také možné použít měkkého prahování, při kterém se waveletové koeficienty modifikují následovně:

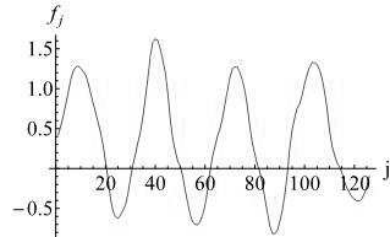
$$\tilde{b}_{j,k} = \begin{cases} 0 & \text{pro } b_{j,k} \leq \lambda, \\ \text{sgn } b_{j,k} |b_{j,k} - \lambda| & \text{jinak.} \end{cases}$$

Kompresi signálu se realizuje na základě tvrdého nebo měkkého prahování.

Na obrázku 9 a obrázku 10 je prezentováno odstranění šumu ze zvukového signálu prostřednictvím waveletové transformace s použitím waveletu Daubechiesové Db4.



Obr. 9. Data se šumem



Obr. 10. Data po odstranění šumu

Zpracování obrazu pomocí waveletové transformace je obdobné jako v případě Fourierovy transformace. Obraz se nejprve rozdělí na dlaždice. Každé dlaždici je přiřazen odpovídající barevný model. Pro každou dlaždici zvlášť se provede dekompozice do

⁵Vícerozměrné wavelety se tvoří z jednorozměrných waveletů jako jejich tenzorový součin. Např. 2D MRA na j -té úrovni může být konstruována z rozkladu

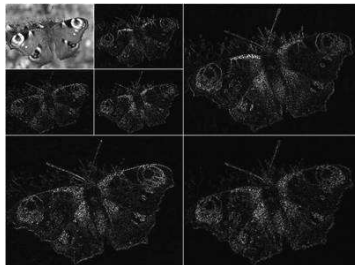
$$\mathbf{V}_j = V_j \otimes V_j = (V_{j-1} \otimes V_{j-1}) \oplus (V_{j-1} \otimes W_{j-1}) \oplus (W_{j-1} \otimes V_{j-1}) \oplus (W_{j-1} \otimes W_{j-1}) = \mathbf{V}_{j-1} \oplus \mathbf{W}_{j-1} = \dots = \mathbf{V}_0 \oplus \mathbf{W}_0 \oplus \dots \oplus \mathbf{W}_{j-1}$$

a waveletová báze je dána jako množina

$$\{\varphi_{0,k} \otimes \varphi_{0,l}\}_{k,l \in \mathbb{Z}} \cup \{\varphi_{m,k} \otimes \psi_{m,l}, \psi_{m,k} \otimes \varphi_{m,l}, \psi_{m,k} \otimes \psi_{m,l}\}_{k,l \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq j-1}.$$



Obr. 11. Původní obraz



Obr. 12. Rozklad obrazu do úrovně 2 pomocí waveletu Db4

aproximačních koeficientů a do horizontálních, vertikálních a diagonálních detailů. Pro další dekompozici se používají už jen aproximační koeficienty, protože právě ty jsou nositeli důležité informace. Na obrázku 12 je zachycena grafická reprezentace takového rozkladu.

Pak následuje modifikace získaných koeficientů, při níž jsou vynechány méně významné waveletové koeficienty. V závěru se rekonstruují jednotlivé části obrazu. Diskrétní waveletová transformace s tvrdým nebo měkkým prahováním se používá např. ve formátu JPEG2000, který je vhodný pro zpracování obrázků, v nichž se vyskytují hladké přechody.

5. Závěrečné poznámky

Uvedené transformační techniky patří k metodám, které jsou používány při bezdrátovém přenosu zvuku a obrazu. Obecně lze říci, že způsob zpracování signálu se odvíjí od typu signálu. Diskrétní Fourierova transformace slouží pro analýzu lineárních kombinací stacionárních signálů, které jsou dány trigonometrickými polynomy (viz obrázek 1). Není však schopna detekovat skokové změny a trendy. Pro analýzu nestacionárních signálů se využívají waveletové transformace. Jejich velkou výhodou je, že umožňují v signálech efektivně provádět lokální úpravy.

L i t e r a t u r a

- [1] DAUBECHIES, I. B.: *Ten lectures on wavelets*. SIAM, Philadelphia, 1992.
- [2] HOLMAN, P., NAJZAR, K.: *Wavelets*. PMFA 44 (1999), 294–303.
- [3] JANSEN, M., OONINCX P.: *Second generation wavelets and applications*. Springer-Verlag, London, 2005.
- [4] KLÍMA, M., BENAS, M., HOLZMAN, J.: *Zpracování obrazové transformace*. ČVUT, Praha, 1996.
- [5] KUFNER, A., KADLEC J.: *Fourierovy řady*. Academia, Praha, 1969.
- [6] MALLAT, S.: *A wavelet tour of signal processing*. 2nd ed., Academic, San Diego, CA, 1999.
- [7] NAJZAR, K.: *Základy teorie waveletů*. 1. vyd., Karolinum, Praha, 2004.
- [8] PRESS, W. H., et al.: *Numerical recipes*. Cambridge Univ. Press, 1986.
- [9] SEGETH, K.: *Numerický software I*. Karolinum, Praha, 1998.
- [10] ŠVEC, M.: *Waveletové transformace*. UJEP, Ústí nad Labem, 2008.