Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Irena Sýkorová

Počítání se zlomky ve středověké Indii

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 59 (2014), No. 4, 285--292

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144080

Počítání se zlomky ve středověké Indii

Irena Sýkorová, Praha

Středověká indická aritmetika počítala s nezápornými celými čísly a se zlomky, zatímco operace se zápornými čísly a výpočty kvadratických iracionalit bývaly řazeny do algebry. V tomto článku ukážeme, jak staří Indové zlomky nazývali, zapisovali a jak se při počítání vyrovnávali s nedostatkem vhodné symboliky pro aritmetické operace.

Zlomky byly potřebné zejména při vyjadřování různých jednotek času, délky, hmotnosti, objemu atd. V úvodu starých aritmetických textů většinou bývala uvedena speciální pravidla na zjednodušení zápisu série měr pomocí vhodných zlomků. Systémy měr byly popsány slovy, která se lišila v jednotlivých oblastech i obdobích.

1. Zdroje

V Indii byly zlomky známy už ve starověku. Zmínky o zlomcích najdeme ve starých védských textech, například *Ṛgveda* (asi 1 000 př. n. l.) obsahuje termíny *ardha* ($\frac{1}{2}$) a *tri-pāda* ($\frac{3}{4}$). V nejstarších indických dílech o geometrii, tzv. *Śulbasūtrách* (kolem 500 př. n. l.), se vyskytují zlomky při popisu řešení úloh.

Staří Egypťané používali pouze tzv. kmenné zlomky (zlomky s čitatelem rovným jedné) a k nim ještě přidávali zlomek $\frac{2}{3}$, viz např. [1]. Indičtí učenci však počítali i se zlomky s čitatelem větším než jedna. Zlomek $\frac{3}{4}$ zmiňovaný v *Ṛgvedě* je pravděpodobně nejstarším nekmenným zlomkem dochovaným v indické literatuře.

Kromě již uvedených prací (*Ṛgveda* a *Śulbasūtry*) se zlomky objevily i v pozdějších aritmetických textech. Pravidla pro zápis a práci se zlomky uvedl například Brahmagupta (asi 598 až 670) v díle *Brāhma-sphuta-siddhānta*, Mahāvīra (asi 800 až 870) v knize *Gaṇita-sāra-saṁgraha*, Śrīdhara (asi 870 až 930) ve spisu *Pāṭī-gaṇita* a Bhāskara II. (1114–1185) v oblíbené aritmetické práci *Līlāvatī*. Výpočty se zlomky byly rovněž nalezeny na některých zachovaných lístcích březové kůry anonymního rukopisu *Bakhshālī* (asi 7. nebo 8. stol. n. l.).

2. Terminologie

Indové zlomek nazývali *bhinna*, což znamená zlomený. Další výrazy používané pro zlomek byly *bhāga*, *aṃśa* (část, díl), později se někdy používal i termín *kalā*, který původně, ve védském období, znamenal jednu šestnáctinu.

Ve védských dílech, *Śulbasūtrách*, se kmenné zlomky označovaly základními číslovkami ve spojení se slovem *bhāga* nebo *aṃśa*, například *pañca-daśa-bhāga* (patnáct dílů) znamenalo jednu patnáctinu. Ke slovům *bhāga* nebo *aṃśa* byly často přidávány i řadové číslovky, tedy například *pañcama-bhāga* (pátý díl) bylo označení jedné pětiny.

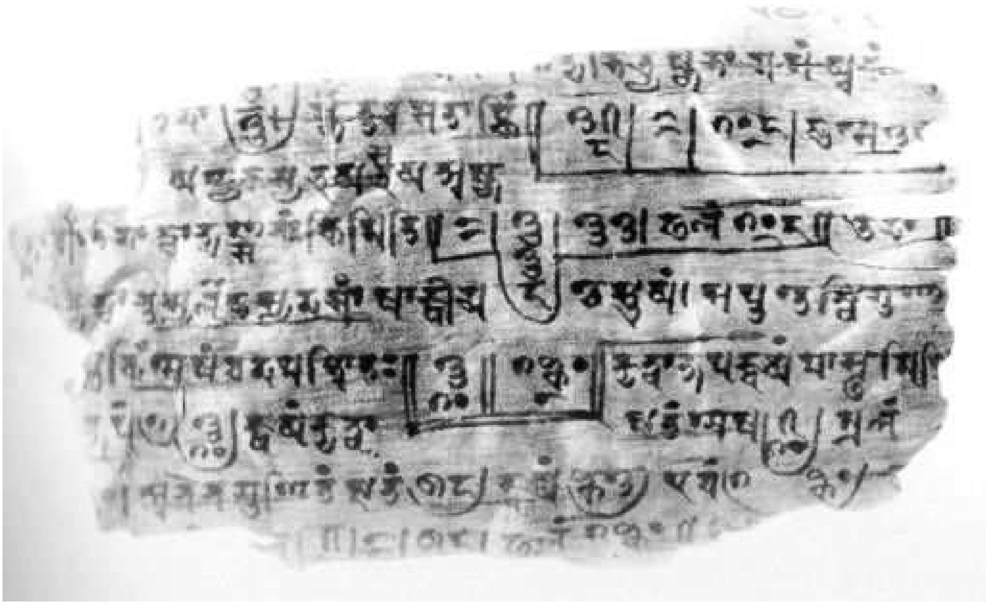
RNDr. Irena Sýkorová, Ph.D., Katedra matematiky, Vysoká škola ekonomická, Ekonomická 957, 148 00 Praha 4, e-mail: sykorova@vse.cz

Termín *bhāga* se dokonce někdy vynechával, patrně kvůli metrice verše, pak pouze *pañcama* (pátý) značilo jednu pětinu. Zlomky $\frac{3}{8}$ nebo $\frac{2}{7}$ se nazývaly *tri-aṣṭama* (tři osmé) nebo *dvi-saptama* (dva sedmé).

3. Zápis zlomků

Asi od 2. stol. př. n. l. se zlomky zapisovaly podobným způsobem jako dnes – čitatel nad jmenovatelem, ale bez zlomkové čáry. Smíšená čísla měla celé číslo umístěné nad čitatelem zlomku. Pokud se v jednom problému vyskytovalo několik zlomků, oddělovaly se vzájemně vodorovnými a svislými čarami.

V rukopisu *Bakhshālī* na lístku s označením folio 10 verso je uvedeno číslo $3\frac{3}{8}$ zapsané jako $\left|\begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 8 \end{array}\right|$ na obrázku 1 uprostřed.



Obr. 1. Rukopis *Bakhshālī*, folio 10 verso, viz [5]

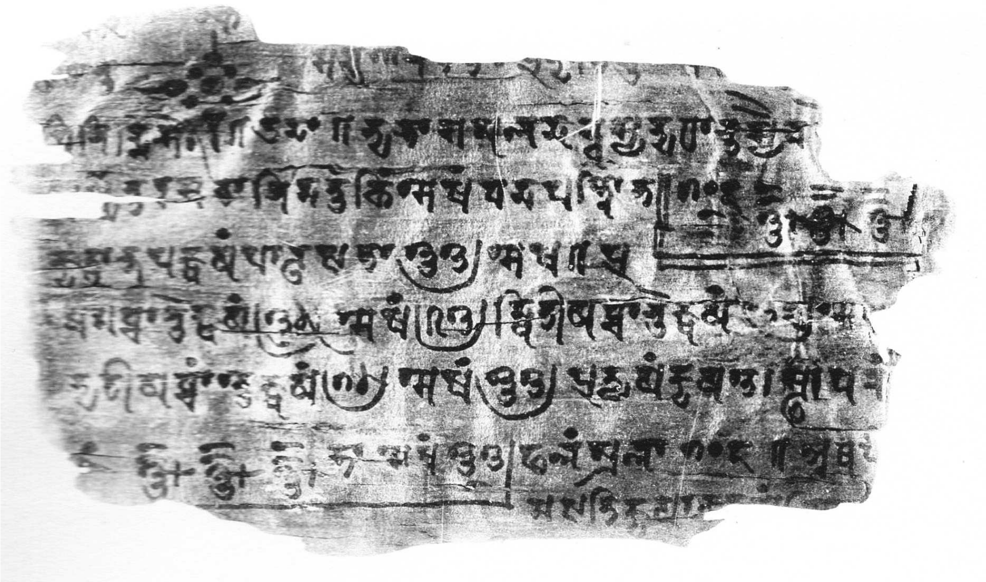
4. Operace se zlomky

Před prováděním aritmetických operací se zlomky se pokládalo za samozřejmé zlomky zkrátit. Tento proces se nazýval *apavartana*, ale sám nebyl považován za operaci. V dochovaných textech není nikde popsán jako pravidlo, zřejmě se znalost předávala ústně. Určitě byl rozšířen v Indii již na počátku našeho letopočtu, zmiňuje se o něm například i nematematická nábožensko-filozofická práce *Tattvārtha-sūtra*, jejímž autorem je Umāsvāti (kolem roku 150 př. n. l.).

Základní operace se zlomky se prováděly téměř stejně jako dnes. Před vlastním počítáním se smíšená čísla převedla na nepravé zlomky a pokud to bylo možné, tyto zlomky se zkrátily. Mahāvīra byl prvním z indických matematiků, který užíval pojem *niruddha* (nejmenší společný násobek), aby zjednodušil počítání se zlomky.

4.1. Sčítání a odčítání

Sčítání zlomků se říkalo *bhinna-saṅkalita*, odčítání se nazývalo *bhinna-vyutkalita*. Tyto operace se prováděly až po převedení zlomků na společného jmenovatele, úpravě nazývané *kalā-savarṇama*, *savarṇana* nebo *samachheda-vidhi*, která byla vždy připomínána spolu se sčítáním a odčítáním. Společného jmenovatele však v mnoha příkladech představoval součin jmenovatelů [9]. Pokud se sčítaly nebo odčítaly zlomky společně s celými čísly, celé číslo bylo považováno za zlomek se jmenovatelem rovným jedné. Odčítání bylo znázorněno tečkou • umístěnou před příslušným zlomkem nebo symbolem + zapsaným až za zlomkem. Na obrázku 2 vlevo dole je uveden zápis $\begin{array}{|c|}1\\1+\\3\\\hline\end{array}$ vyjadřující rozdíl $(1-\frac{1}{3})$.



Obr. 2. Rukopis *Bakhshālī*, folio 10 recto, viz [5]

4.2. Násobení a dělení

Pro násobení zlomků se užíval výraz *bhinna-guṇana*. Brahmagupta popsal součin zlomků, viz [2], jako součin čitatelů dělený součinem jmenovatelů. V pravidle pro násobení zlomků uvedl i poznámku, jak se před násobením nejprve smíšená čísla převedou na nepravé zlomky. Ostatní autoři popisovali tuto operaci podobným způsobem, jen Mahāvīra ještě odkazoval na krácení křížem, aby se počítání zjednodušilo, viz [7]. Při krácení křížem, pokud to je možné, se krátí čitatel prvního zlomku se jmenovatelem druhého nebo čitatel druhého zlomku se jmenovatelem prvního. Operace *bhinna-bhāga-hara* neboli dělení zlomků se prováděla stejně jako dnes – první zlomek se násobil převrácenou hodnotou druhého.

4.3. Umocňování a odmocňování

V Indii patřil mezi základní aritmetické operace rovněž výpočet druhé a třetí mocniny i výpočet druhé a třetí odmocniny. Při výpočtu se využívala znalost dnešních vzorců $(a/b)^n = a^n/b^n$, respektive $\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}$.

5. Třídy výrazů se zlomky

Protože neexistovala vhodná symbolika k tomu, aby bylo možné vyjadřovat aritmetické operace se zlomky, rozdělovaly se výrazy se zlomky do několika tříd, kterým se říkalo *jāti*. Existovala pravidla, podle nichž bylo možné tyto třídy vyjádřit pomocí vhodných zlomků. Jediným používaným symbolem byla tečka, která sloužila k označení záporného čísla, resp. čísla, které se mělo odečíst. Někdy byl dokonce termín *bhinna* užíván pro celou třídu zlomků. Příslušnost k určité třídě pomohla pochopit správný význam, protože zápis nebyl jednoznačný. Indičtí učenci používali čtyři základní třídy, viz např. [2], [6].

1. *Bhāga* (jednoduché zlomky) neboli výraz se dvěma nebo se třemi zlomky, případně i s větším počtem zlomků, tj.

$$\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}\right) \qquad \text{bylo zapsáno} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline a & c \\ b & d \\ \hline\end{array} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline a & \bullet\, c \\ b & d \\ \hline\end{array}\,,$$

kde tečkou je naznačeno odčítání. Výraz se třemi zlomky

$$\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} \pm \frac{e}{f}\right) \qquad \text{se vyjadřoval jako} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline a & c & e \\ b & d & f \\ \hline\end{array} \qquad \text{nebo} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline a & \bullet\, c & \bullet\, e \\ b & d & f \\ \hline\end{array}\,.$$

2. *Prabhāga* (zlomky ze zlomků) neboli součin dvou nebo tří zlomků

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \quad \text{zapsán jako} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline a & c \\ b & d \\ \hline\end{array} \qquad \text{nebo} \qquad \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) \quad \text{jako} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline a & c & e \\ b & d & f \\ \hline\end{array}\,.$$

3. *Bhāgānubandha* (spojení zlomků) znamenalo buď

a) *rūpa-bhāgānubandha* (spojení přirozeného čísla a zlomku),

$$\left(a + \frac{b}{c}\right) \qquad \text{v zápisu} \qquad \begin{array}{|c|}\hline a \\ b \\ c \\ \hline\end{array}\,, \qquad \text{nebo}$$

b) *bhāga-bhāgānubandha* (spojení dvou nebo více zlomků),

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}\right)\ \text{resp.}\ \left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}+\frac{e}{f}\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}\right)\right)\quad\text{zapsané}\ \begin{array}{|c|}\hline a\\ b\\ \hline c\\ d\\ \hline\end{array}\ \text{resp.}\ \begin{array}{|c|}\hline a\\ b\\ \hline c\\ d\\ \hline e\\ f\\ \hline\end{array}\,.$$

4. *Bhāgāpavāha* (oddělení zlomků) mohlo znamenat

a) *rūpa-bhāgāpavāha* (oddělení přirozeného čísla a zlomku) neboli

$$\left(a-\frac{b}{c}\right)\qquad\text{v zápisu}\quad \begin{array}{|r|}\hline a\\ \bullet\ b\\ c\\ \hline\end{array}\,,$$

b) *bhāga-bhāgāpavāha* (oddělení dvou nebo více zlomků),

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}\right)\quad\text{vyjádřený}\ \begin{array}{|r|}\hline a\\ b\\ \hline \bullet\ c\\ d\\ \hline\end{array}\ \text{případně pro více zlomků}$$

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}-\frac{e}{f}\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}\right)\right),\ \text{které se zapisovaly}\ \begin{array}{|r|}\hline a\\ b\\ \hline \bullet\ c\\ d\\ \hline \bullet\ e\\ f\\ \hline\end{array}\,.$$

Pravidla pro zjednodušení prvních dvou tříd popisovala sčítání, resp. odčítání a násobení zlomků. Śrīdhara uvedl ještě další způsob sčítání zlomků, kde vycházel z toho, že zlomky jsou zapsány pod sebou. Podle tohoto pravidla se „horní“ čitatel vynásobil „dolním“ jmenovatelem a „dolní“ jmenovatel „horním“ jmenovatelem. Pak se přičetl součin „prostředního“ čitatele a „prostředního“ jmenovatele k „hornímu“ čitateli.

$$\begin{array}{|c|}\hline a\\ b\\ \hline c\\ d\\ \hline\end{array}\qquad \begin{array}{|c|}\hline ad\\ b\\ \hline c\\ db\\ \hline\end{array}\qquad \begin{array}{|c|}\hline ad+bc\\ db\\ \hline\end{array}$$

Úpravy výrazů *rūpa-bhāgānubandha* a *rūpa-bhāgāpavāha* představovaly přičítání nebo odčítání zlomku od celého čísla a odpovídaly dnešním vzorcům

$$a\pm\frac{b}{c}=\frac{ac\pm b}{c}.$$

Pravidla pro zjednodušení tříd zlomků *bhāga-bhāgānubandha* a *bhāga-bhāgāpavāha* popsal Brahmagupta, viz [2], jeho pravidlu v současné symbolice odpovídá zápis

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a\cdot(d\pm c)}{b\cdot d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d\pm c}{d},$$

případně

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} \pm \frac{e}{f} \cdot \left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{d \pm c}{d} \cdot \frac{f \pm e}{f}. \tag{$*$}$$

Kromě těchto tříd uváděli někteří autoři ještě další dvě.

5. *Bhāga-bhāga* (vícenásobné zlomky) neboli výrazy $\left(a : \frac{b}{c}\right)$ nebo $\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)$. Zápis byl stejný jako pro třídu *bhāga-bhāgānubandha*, tedy $\begin{array}{|c|}\hline a\\ b\\ c\\ \hline\end{array}$ nebo $\begin{array}{|c|}\hline a\\ b\\ \hline c\\ d\\ \hline\end{array}$.

V zápisu se nikde neobjevoval žádný symbol pro dělení. To, že se má dělit, vyplývalo ze zadání problému.[1]

6. *Bhāga-mātṛ* neboli kombinace tvarů uvedených výše. Mahāvīra poznamenal, že těchto kombinací může být 26. Zřejmě tedy už byly známé postupy na výpočet kombinací. I když vyjádření bylo jiné, výpočet odpovídal dnešnímu vzorci

$$C_2(5) + C_3(5) + C_4(5) + C_5(5) = \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 10 + 10 + 5 + 1 = 26.$$

Śrīdhara ve své práci *Pāṭī-gaṇita*, uvedl příklad (Ex. 23, viz [3], [8]), který bychom dnes zapsali jako

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(1 : \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right),$$

ve středověké indické symbolice byl tentýž problém vyjádřen takto:

$$\begin{array}{|c||c|c||c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 4 & 1 & 2 & 3\\ \cline{5-6} & & & 3 & 1 & \bullet 1\\ & & & & 2 & 2\\ \hline\end{array}$$

V zápisu je patrná již zmiňovaná nejednoznačnost. Vyjádření $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1\\ 4 & 4\\ \hline\end{array}$ mohlo znamenat $\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right)$ stejně jako $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$, podobně zápis $\begin{array}{|c|}\hline 1\\ 1\\ 3\\ \hline\end{array}$ mohl být interpretován jako $\left(1 : \frac{1}{3}\right)$, ale také $\left(1\frac{1}{3}\right)$. Správný význam zápisu bylo nutno poznat z kontextu podle formulace problému.

V jiném příkladu (Ex. 19, viz [3], [8]) Śrīdhara demonstroval pravidlo pro zjednodušení zlomků třídy *bhāga-bhāgānubandha*. Požadoval vypočítat součet

$$\left(3 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \cdot \left(3 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6} \cdot \left[\left(3 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \cdot \left(3 + \frac{1}{2}\right)\right] + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right).$$

Tento výraz byl zapsán do dvou sloupců.

[1] Pouze v rukopisu *Bakhshālī* se někdy před příslušnou veličinu nebo za ni přidával výraz *bhā* (zkratka vytvořená ze slova *bhājana* nebo *bhāgahāra*, což byly výrazy pro dělení).

3 1 2	 1 2
1 4	1 3
1 6	1 4

Při výpočtu se nejprve upravily výrazy v „horní“ buňce, zde se pouze vlevo sečetly hodnoty $3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$, ve spodních buňkách se vždy k čitateli přičetl příslušný jmenovatel a vše se znovu zapsalo pod sebe, z úsporných důvodů se novými hodnotami většinou přepisovaly ty staré.

7 2	1 2
5 4	4 3
7 6	5 4

Tím se získaly zlomky, které se v každém sloupci vynásobily podle vztahu (∗).

245 48	20 24

Nakonec se zlomky převedly na společného jmenovatele a sečetly.

245 48	40 48

285 48

Śrīdhara věnoval speciální pravidlo převodu měr, kdy menší jednotky vyjádřil pomocí vhodného zlomku jednotky větší. Metodu ilustroval na příkladu (Ex. 22, viz [4], [8]), kde se měla peněžitá částka 5 *purāṇa*, 3 *paṇa*, 1 *kākiṇī*, −1 *varāṭaka*, $-\frac{1}{5}$ *varāṭaka* vyjádřit pomocí hodnoty *purāṇa*, přičemž platily vztahy

$$\begin{array}{lcl} 1\ \textit{purāṇa} & = & 16\ \textit{paṇa}, \\ 1\ \textit{paṇa} & = & 4\ \textit{kākiṇī}, \\ 1\ \textit{kākiṇī} & = & 20\ \textit{varāṭaka}. \end{array}$$

Každá ze zadaných částek se vyjádřila pomocí předchozí, tj. 3 *paṇa* $=\frac{3}{16}$ *purāṇa*, 1 *kākiṇī* $=\frac{1}{4}$ *paṇa*, −1 *varāṭaka* $=-\frac{1}{20}$ *kākiṇī* a všechny zlomky se zapsaly do sloupce pod sebe, kde jako první byla uvedena hodnota $\frac{5}{1}$ (5 *purāṇa*) a jako poslední $-\frac{1}{5}$ (*varāṭaka*). Zlomky se upravovaly shora, první dva se sloučily, což bychom mohli vyjádřit v současné symbolice vzorcem

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} \cdot \frac{1}{b} = \frac{ad \pm c}{bd}.$$

Tímto zlomkem se pak oba zlomky nahradily a celý proces se opakoval. Postupně se tedy zapisovaly následující hodnoty a výsledný zlomek se nakonec zkrátil.

5 1	83 16	333 64	6 659 1 280	33 294 6 400	16 647 3 200
3 16	1 4	•1 20	•1 5		
1 4	•1 20	•1 5			
•1 20	•1 5				
•1 5					

Mahāvīra popsal ještě několik pravidel, v nichž počítal s kmennými zlomky, viz [7]. Tato pravidla se nevyskytují v žádné jiné práci, snad proto, že je ostatní nepovažovali za užitečná a důležitá.

6. Závěr

Zlomky měly ve středověké indické matematice důležité místo, pravidla pro počítání se zlomky byla pečlivě roztříděna, podrobně popsána a demonstrována na příkladech.

L i t e r a t u r a

[1] Bečvář, J., Bečvářová, M., Vymazalová, H.: *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie.* Dějiny matematiky, sv. 23. Prometheus, Praha, 2003.

[2] Colebrooke, H. T.: *Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara.* John Murray, London 1817.

[3] Datta, B., Singh, A. N.: *History of Hindu Mathematics (part I).* Molital Banarsidass, Lahore, 1935.

[4] Juškevič, A. P.: *Dějiny matematiky ve středověku.* Academia, Praha, 1978.

[5] Kaye, G. R.: *The Bakhshali Manuscript: A Study in Medieval Mathematics (parts 1–2).* Government of India Central Publication Branch, Calcutta, 1927.

[6] Plofker, K.: *Mathematics in India.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.

[7] Rangacarya, M.: *Ganita-sara-sangraha of Mahaviracarya with English Translation and Notes.* Government Press, Madras, 1912.

[8] Shukla, K. S.: *The Pāṭīgaṇita of Śrīdharācarya.* Lucknow University, Lucknow, 1959.

[9] Sýkorová, I.: *Zlomky ve staré Indii.* In: 30. mezinárodní konference Historie matematiky (eds. J. Bečvář, M. Bečvářová), Matfyzpress, Praha, 2009, 221–226.