

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Filip Křížek; Michal Křížek

Vera Rubinová a rotační křivky spirálních galaxií

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 59 (2014), No. 3, 223--236

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/144027>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2014

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Vera Rubinová a rotační křivky spirálních galaxií

Věnováno prof. RNDr. Janu Paloušovi, DrSc., k jeho 65. narozeninám.

Filip Krížek, Řež, Michal Krížek, Praha

1. Vera Rubinová

Vera Rubinová roz. Cooperová zasvětila celou svoji vědeckou kariéru prosazování revolučních myšlenek, jež významně ovlivnily rozvoj soudobé astronomie. Její otec pocházel z Litvy a matka z Moldavska. Ve své diplomové práci na Cornellově univerzitě se zabývala zásadní otázkou, zda by vesmír mohl rotovat jako celek.¹ Školitelem její doktorské dizertace byl George Gamow, který na toto téma publikoval článek [11]. Rubinová byla první ženou, která používala přístroje na kalifornské observatoři Mt. Palomar. Její životní dráha je podrobně popsána např. v [25].



Obr. 1. Vera Rubinová roz. Cooperová (*1928), foto Robert Rubin

¹Na vlastní teorii rotujícího vesmíru pracoval i Kurt Gödel [12]. Pro libovolnou lichou dimenzi n může sféra S^n rotovat kolem středu tak, že všechny body mají stejnou rychlost (lze ji totiž „učesat“). Nejedná se tedy o rotaci kolem osy.

RNDr. FILIP KRÍŽEK, Ph.D., Ústav jaderné fyziky AV ČR, v. v. i., 250 68 Řež, e-mail: filip.krizek@cern.ch, prof. RNDr. MICHAL KRÍŽEK, DrSc., Matematický ústav AV ČR, v. v. i., Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: krizek@cesnet.cz

Koncem sedmdesátých let minulého století Rubinová zjistila, že spirální galaxie nemají dostatek hmoty k vysvětlení své rychlé rotace. Nevěřila ale, že by vesmír měl obsahovat nějakou temnou hmotu, i když jí to měření naznačovala. Sama o této záhadě prohlásila [8]:

If I could have my pick, I would like to learn that Newton's laws must be modified in order to correctly describe gravitational interaction at large distances. That's more appealing than a universe filled with a new kind of sub-nuclear particle.

Největším objevem Very Rubinové byla skutečnost, že spirální galaxie mají „ploché“ rotační křivky (viz [30]). Na základě toho pak v 70. letech minulého století rozpracovala vlastní teorii rotačních křivek galaxií. Z vysokých oběžných rychlostí hvězd usoudila, že by galaxie měly obsahovat mnohem více nesvítící látky než svítící, aby vůbec držely gravitačně pohromadě — viz např. její přehledové články [28] a [29] o temné hmotě. Přitom se opírala o standardní Newtonovu teorii gravitace. Připomeňme si proto nejprve některá užitečná tvrzení této teorie.

2. Newtonovy věty

Podle Newtonova gravitačního zákona je velikost gravitační síly mezi dvěma hmotnými body rovna

$$F = G \frac{mM}{r^2}, \quad (1)$$

kde m a M jsou jejich hmotnosti, r je jejich vzdálenost a $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ je gravitační konstanta. V některých učebnicích se nesprávně píše, že F v (1) je velikost gravitační síly mezi dvěma tělesy. Přitom se čtenář nedozví, jak se přesně definuje jejich vzdálenost.

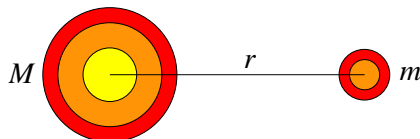
Co je např. vzdálenost r pro homogenní hmotný prsteneček a hmotný bod v jeho středu? Kdyby vzdálenost r byla rovna poloměru prstenečku, správnou odpověď podle (1) nedostaneme. Celková výsledná síla i její velikost je totiž nulová. Pro $F = 0$ podle (1) ale vychází $r = \infty$, což jistě nemá se skutečností nic společného. Kdyby r byla vzdálenost těžišť obou těles, pak bychom zase dostali $F = \infty$, protože ve jmenovateli (1) se dělí $r = 0$. Opět se tak dostáváme do problémů.

Vidíme tedy, že mechanické používání gravitačního zákona může vést k nepředpokládaným paradoxům (viz též poznámka 1 níže). Vztah (1) ale zůstane nezměněn, pokud místo hmotných bodů budeme uvažovat koule se speciálním rozložením hustoty.

Věta 1 (první Newtonova věta). *Je-li rozložení hustoty koule o hmotnosti M sféricky symetrické, pak koule působí na hmotný bod o hmotnosti m , který leží mimo vnitřek koule, silou o velikosti (1), kde r je vzdálenost hmotného bodu od středu koule.*

Důkaz se opírá o specifický tvar gravitačního potenciálu hmoty rovnoměrně rozložené na kulové ploše. Výsledný vztah (1) se pak získá integrací. Pro podrobnosti viz [1], s. 149. Větu lze zřejmě zobecnit i na vzájemné působení dvou kulových těles se sféricky symetrickým rozložením hustoty hmoty (viz obr. 2). U skutečných těles o průměru nad 1 000 km gravitace samočinně zařídí přibližně kulový tvar i sféricky symetrické rozložení hustoty. Tento proces se nazývá gravitační diferenciací.

Poznámka 1. Tělesa, která nemají sféricky symetrické rozložení hustoty hmoty, ale obecně nelze nahradit jejich těžištěm. Abychom se o tom přesvědčili, stačí uvažovat, jak



Obr. 2. Ilustrace první Newtonovy věty pro dvě sféricky symetrická tělesa

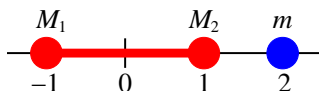
působí těleso ve tvaru činky o hmotnosti $M_1 + M_2$, na druhé těleso, jímž je homogenní koule o hmotnosti m . Hmotnost prostřední rovné části činky zanedbáváme. Nechť $M_1 = M_2 = m = 1$ kg. Na vodorovné ose na obr. 3 lze odečítat příslušné vzdálenosti v metrech. Pak je velikost celkové síly mezi oběma tělesy rovna

$$F = G \frac{mM_1}{3^2} + G \frac{mM_2}{1^2} = \frac{10G}{9}.$$

Kdybychom však soustředili hmotu činky do jejího těžiště v 0, pak by výsledná síla \bar{F} vyšla podstatně odlišná od F , tj.

$$\bar{F} = G \frac{m(M_1 + M_2)}{2^2} = \frac{G}{2} \quad \text{a} \quad 2\bar{F} < F.$$

Kvadratická nelinearita r^2 ve vztahu (1) tedy způsobila, že síla F je více než dvakrát větší než síla \bar{F} odpovídající hmotnosti prvního tělesa zkoncentrovaného do těžiště.



Obr. 3. Sílu mezi dvěma tělesy nelze obecně nahrazovat silou mezi hmotnými body umístěnými v jejich těžištích.

V [1], s. 150, je dokázáno další důležité tvrzení pro kulovou vrstvu (mezikouli), viz obr. 4.

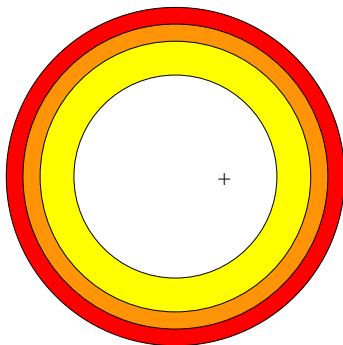
Věta 2 (druhá Newtonova věta).² *Kulová vrstva se sféricky symetrickým rozložením hustoty nepůsobí žádnou silou na hmotný bod nacházející se uvnitř.*

3. Spirální galaxie nerotují podle Keplerových zákonů

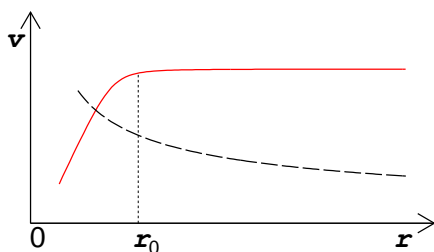
Podívejme se nyní podrobněji na hypotézu Very Rubinové. Uvažujme testovací částici o hmotnosti m (typicky se bude jednat o hvězdu) a nechť $M \gg m$ je hmotnost dalšího hmotného bodu generujícího pole centrální síly. Předpokládejme, že testovací částice obíhá kolem středu po kruhové orbitě o poloměru r rychlostí v . Pak z Newtonova gravitačního zákona a vztahu pro dostředivou sílu Rubinová [28] snadno odvodila, že

$$G \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}, \quad \text{tj.} \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (2)$$

²Angl. *Shell Theorem*.



Obr. 4. Ilustrace druhé Newtonovy věty v průřezu kulové vrstvy. Její silové působení na hmotný bod uvnitř dutiny označený + je nulové pro sféricky symetrické rozložení hustoty hmoty. Gravitační potenciál v dutině je totiž konstantní.



Obr. 5. Čárkovane je znázorněn pokles rychlostí keplerovských drah v závislosti na vzdálenosti r od středu spirální galaxie. Plná čára ukazuje idealizovanou rotační křivku, jejíž tvar pomocí mnoha měření objevila Vera Rubinová.

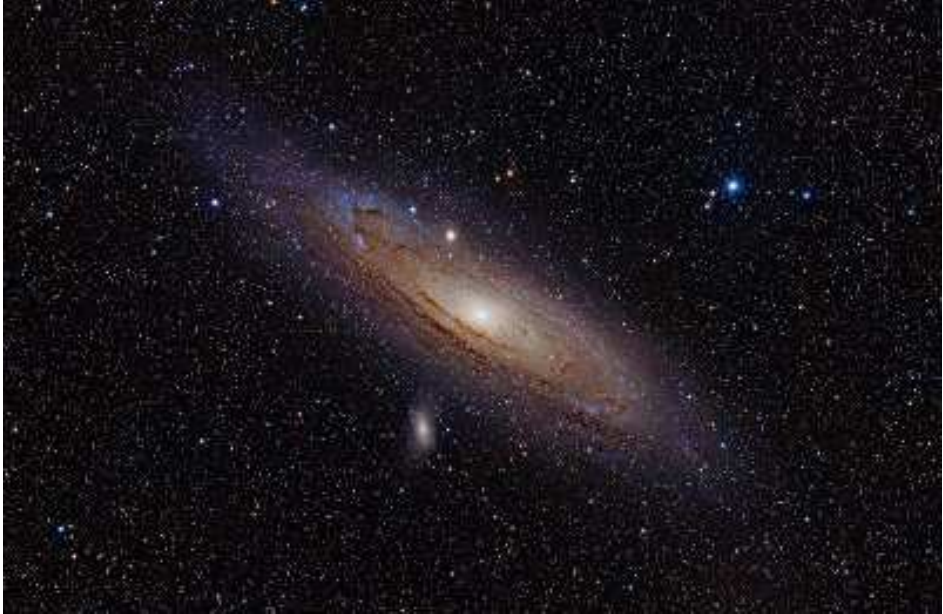
Rychlost v částice na kruhové orbitě je tedy úměrná $r^{-1/2}$. Takové dráhy se nazývají *keplerovské* (viz obr. 5).

Vera Rubinová uvádí (viz [30], s. 491), že

rotační křivky galaxií jsou ploché a neklesají „keplerovsky“, jak by měly.

Pro vysvětlení tohoto paradoxu je důležité si uvědomit, že spirální galaxie nemají pole centrální síly kromě blízkého okolí středu, kde např. v naší Galaxii hvězdy S1, S2, ... obíhají centrální černou díru podle Keplerových zákonů rychlostmi až 7000 km/s. Hmotnost této díry je zhruba 3.5 milionů hmotností Slunce, což je méně než jedno promile celkové hmotnosti Galaxie (srov. (6)). Ve Sluneční soustavě je naopak 99.85 % hmotnosti soustředěno ve Slunci. Planety se gravitačně téměř neovlivňují a jejich pohyb je určen především centrální silou Slunce. Naproti tomu dráhy hvězd v galaktickém disku jsou podstatně ovlivňovány zejména rozložením okolní hmoty, protože centrální výduť obsahuje jen cca 10 % všech hvězd Galaxie.

V poznámce 2 naznačíme, proč je silové působení diskového tvaru galaxie na testovací částici o dost větší, než když celou její hmotnost soustředíme do jednoho centrálního bodu. Podrobněji to pak rozvedeme v kapitole 5. Oběžná rychlost v hvězd na kruhových drahách ve spirální galaxii by proto měla být vyšší než pro keplerovské dráhy (viz obr. 5).



Obr. 6. Velká spirální galaxie M31 v Andromedě zabírá na nebeské sféře 6krát větší plochu než Měsíc v úplňku. Má zřetelnou centrální výdutě.

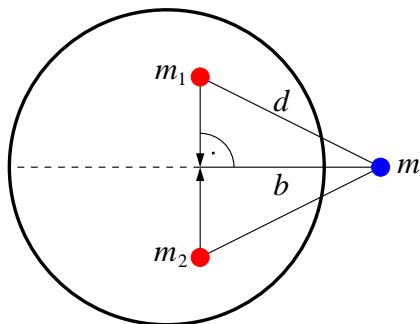
Vera Rubinová [29] (viz též [31], s. 480) zjistila u okolních spirálních galaxií téměř stejné konstantní³ rychlosti všech hvězd⁴ řádu $v \approx 200$ km/s pro $r > r_0$, kde r_0 zhruba odpovídá poloměru centrální výdutě (angl. *bulge*) a je typicky rovno několika kpc (viz obr. 5 a 6). Na druhé straně, vnitřek spirální galaxie pro $r \leq r_0$ včetně eventuální příčky rotuje zhruba konstantní úhlovou rychlostí podobně jako gramofonová deska, protože rychlost hvězd je přibližně lineárně úměrná jejich vzdálenosti od středu (viz obr. 5).

U spirálních galaxií činí průměrná tloušťka disku (mimo výdutě) od 300 pc do 1 kpc. Je tedy cca 30krát až 100krát menší než průměr viditelné části galaxie. Je to dobře patrné, jsou-li k nám galaxie natočeny bokem. Přitom plyn a prach se nalézají zejména v těsné blízkosti roviny disku. Proto budeme na disk galaxie pohlížet jen jako na dvojrozměrný útvar, což je zjevně lepší aproximace než centrální hmotný bod. Gravitační pole spirální galaxie budeme tedy aproximovat gravitačním polem plochého disku s rotačně symetrickým rozložením hustoty.

Poznámka 2. Vztah (2) poskytuje jen hrubý odhad, pokud bychom jej chtěli použít k vyjádření oběžných rychlostí hvězd ve spirální galaxii. Ukažme proto nyní, že testovací částice (hvězda) obíhající kouli o poloměru r se zcela libovolným sféricky sy-

³Spirální galaxie typu Sc nebo SBc připomínají svým tvarem hodně otevřené písmeno S. Je pozoruhodné, že pro naměřenou téměř stejnou konstantní rychlost hvězd ([29], s. 7) se nezávívají a že v nich nedochází k očekávanému „utahování“ ramen, když galaxie už vykonaly mnoho otoček. Jen těžko lze předpokládat, že se jedná o jakési hustotní vlny [5], s. 544.

⁴Ve Sluneční soustavě by podobný jev odpovídal tomu, že by Merkur obíhal Slunce stejnou rychlostí jako Neptun.



Obr. 7. Koule se symetricky rozloženou hmotou podle vodorovné roviny působí na testovací částici menší silou než celková hmotnost koule promítnutá kolmo do vodorovné roviny disku — čárkovaně.

metrickým rozložením hustoty (srov. větu 1) má nižší rychlost, než kdyby obíhala disk o stejném poloměru r a stejné hmotnosti. Přitom budeme uvažovat speciální rozložení hustoty disku, které vznikne projekcí hmotnosti koule kolmo do roviny disku xy .

Abychom se o tomto tvrzení přesvědčili, stačí uvažovat dva libovolné hmotné body o hmotnostech $m_1 = m_2$ umístěné uvnitř koule zrcadlově symetricky vzhledem k rovině xy (viz obr. 7). Potom celková síla F , kterou oba body působí na testovací částici o hmotnosti m , bude menší než síla \overline{F} , kterou by oba hmotné body působily na m , kdyby se nalézaly přímo na disku. Nechť d je vzdálenost mezi m_1 a m . Označíme-li b její ortogonální projekci do roviny xy , pak

$$F = G \frac{2m_1 m}{d^2} \cdot \frac{b}{d} \quad \text{a} \quad \overline{F} = G \frac{2m_1 m}{b^2}.$$

Vidíme tedy, že poměr sil \overline{F} a F je roven třetí mocnině podílu d/b

$$\overline{F} = \left(\frac{d}{b}\right)^3 F \geq F. \quad (3)$$

Tato kubická nelinearita způsobuje podle (2) větší přitažlivou gravitační sílu disku než pro kouli, a tím i vyšší oběžnou rychlost kolem disku.⁵

4. Oběžná rychlost kolem centrálního bodového tělesa

V této kapitole představíme poměrně hrubý konzervativní odhad oběžných rychlostí hvězd v případě, že veškerou baryonovou hmotu (tj. zejména protony a neutrony) naší Galaxie nahradíme jedním centrálním hmotným bodem, který může být podle věty 1 nahrazen koulí se sféricky symetrickým rozložením hustoty. V další kapitole se pak soustředíme na plochý disk se zcela libovolným rotačně symetrickým rozložením hustoty.

Poloměr viditelné části disku naší Galaxie se odhaduje na

$$r_G = 16 \text{ kpc} = 4.938 \cdot 10^{20} \text{ m}. \quad (4)$$

⁵Analytické vyjádření silového působení celého disku na vnější testovací částici vede na eliptické integrály (viz [1], s. 156; [6], s. 73; [24], s. 274).

Naše Slunce má hmotnost

$$M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

a obíhá střed Mléčné dráhy rychlostí⁶

$$v_{\odot} = 230 \text{ km/s} \tag{5}$$

na dráze o poloměru $r_{\odot} = 8.3 \text{ kpc}$, tj. nalézá se cca v polovině poloměru Galaxie, kde už je hustota hvězd poměrně malá. Hvězdy obíhající střed Galaxie ve vzdálenosti $r > r_0 \approx 3 \text{ kpc}$ by měly mít podobnou rychlost jako v_{\odot} vzhledem k očekávané ploché rotační křivce (viz obr. 5).

K baryonové látce astronomové počítají všechny částice, které jsou zahrnuty ve standardním modelu elementárních částic a interakcí (elektrony, neutrina apod.) a též degenerovanou baryonovou hmotu ukrytou v černých dírách [15]. Označme $\mathcal{M}(r_G)$ hmotnost baryonové látky uvnitř koule o poloměru r_G se středem v centru Galaxie. K jejímu odhadu použijeme rozdělení hvězd dané tabulkou (viz např. [20], s. 394), které se opírá o data z našeho okolí do vzdálenosti několika stovek parseků pořízených družicí Hipparcos.⁷

Spektrální třída	O	B	A	F	G	K	M	bílí trpaslíci
Hmotnost v M_{\odot}	25	5	1.7	1.2	0.9	0.5	0.25	0.7
Počet v miliardách	10^{-5}	0.3	3	12	26	52	270	35
Součin	≈ 0	1.5	5.1	14.4	23.4	26	67.5	24.5

Tab. 1. Rozdělení hvězd v naší Galaxii podle spektrální třídy. Druhý řádek udává odpovídající hmotnost typické hvězdy v jednotkách hmotnosti Slunce M_{\odot} . Na třetím řádku je počet hvězd dané spektrální třídy⁸ dělený 10^9 . Na posledním řádku je vyčíslena hmotnost celé třídy v miliardách hmotností Slunce.

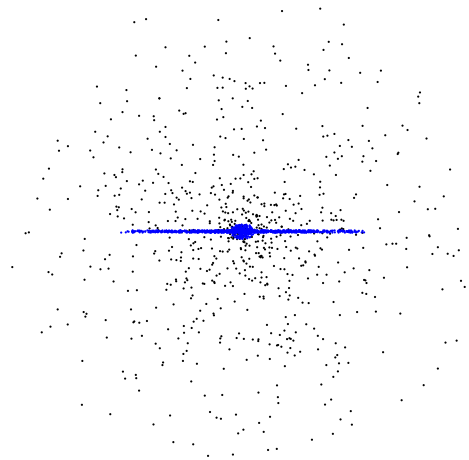
Z předposledního řádku vidíme, že se v naší Galaxii nachází přibližně 400 miliard hvězd. Zatímco koncem minulého století se soudilo, že červených trpaslíků spektrální třídy M jsou pouhá 3% z celkového počtu hvězd (viz [5], s. 93), dnes se odhaduje, že je jich převážná většina (viz tabulka). Pro podporu tohoto tvrzení můžeme např. uvést, že z 20 Slunci nejbližších hvězd je v současnosti známo 13 červených trpaslíků. Přitom hmotnost červeného trpaslíka se pohybuje v rozmezí od $0.08M_{\odot}$ do $0.45M_{\odot}$. Z tabulky je patrné, že třída M přispívá k celkové hmotnosti Galaxie nejvíce ze všech spektrálních tříd. Vera Rubinová samozřejmě nemohla vědět o existenci tolika červených trpaslíků té nejmenší hmotnostní kategorie. Za tento nárůst vděčíme stále se zlepšující citlivosti kosmických teleskopů. Tím se nám ale podstatně zvětšila i odhadovaná baryonová hmotnost Galaxie. Sečteme-li čísla v posledním řádku tabulky, dostaneme nerovnost

$$\mathcal{M}(r_G) \geq 162.4 \cdot 10^9 M_{\odot} = 3.25 \cdot 10^{41} \text{ kg.}$$

⁶Většina zdrojů uvádí rychlost Slunce v_{\odot} v rozmezí 220 až 240 km/s.

⁷Harvardská spektrální klasifikace (en.wikipedia.org/wiki/Stellar_classification) uvádí podobná poměrná zastoupení hvězd, která budou dále zpřesňována pomocí dat z družice Gaia, jež dohlédne až ke středu Galaxie i opačným směrem na její okraj. Přesnost měření však podstatně záleží na magnitudě a extinkci.

⁸Mnemotechnická pomůcka k zapamatování říká: *Oh, Be A Fine Girl, Kiss Me.*



Obr. 8. Schematické znázornění spirální galaxie z boku. Centrální sférickou výduť obklopuje plochý disk a řídké sféricky symetrické halo vyplněné zejména neutrálním vodíkem a heliem, staršími hvězdami a kulovými hvězdokupami.

Zatím bohužel neumíme spolehlivě určit, kolik činí příspěvek k $M(r_G)$ od černých děr, kvarkových či neutronových hvězd⁹, infračervených trpaslíků¹⁰, exoplanet, bludných planet apod., jejichž svítivost je malá. Podle [20], s. 393, činí baryonová hmotnost všech hvězd v Galaxii

$$175 \cdot 10^9 M_{\odot} = 3.5 \cdot 10^{41} \text{ kg},$$

započteme-li ještě hvězdy luminozitní třídy I–IV (tj. veleobry, obry a podobry). V disku a ve výduťi se také nachází velké množství nesvítící baryonové látky ve formě prachu, plynu a plazmatu. V práci [20], s. 353, se množství mezihvězdné látky (bez hypotetické temné hmoty) odhaduje na cca 10% celkové hmotnosti hvězd. Řídká nesvítící baryonová hmota se rozprostírá i v kulovém galaktickém halo (viz obr. 8), jak lze zjistit na rádiových vlnách 21 cm, které odpovídají překlopení spinu v atomu vodíku (viz [31], s. 485). Proto lze celkovou hmotnost baryonové látky uvnitř uvažované koule o poloměru r_G zdola odhadnout na¹¹

$$\mathcal{M}(r_G) \geq 3.85 \cdot 10^{41} \text{ kg}. \quad (6)$$

Podle [20] klesá hustota rozložení hmoty $\rho = \rho(r)$ za viditelným okrajem rychleji než r^{-2} , jinak by integrál $\int_{r_G}^{\infty} \rho(r) 4\pi r^2 dr$ divergoval. Z věty 2 však plyne, že tato hmota (ani eventuální temná hmota) nemá na pohyb hvězd žádný vliv, pokud je

⁹Hvězd z levé části tabulky je v současnosti sice málo, ale protože žijí velice krátce, existuje po nich v Galaxii mnoho superhustých kompaktních pozůstatků.

¹⁰Pro malé chladné hvězdy byly poměrně nedávno zavedeny další tři spektrální třídy L–červenohnědí trpaslíci, T–hnědí trpaslíci a Y–černí trpaslíci (terminologie ještě není ustálená). Např. v roce 2013 objevil Kevin Luhman dvojici hnědých trpaslíků vzdálených od Slunce jen 6.5 světelného roku. Další hnědý trpaslík WISE J085510.83-071442.5 je vzdálen 7.2 světelného roku.

¹¹V astronomických tabulkách [18] se na s. 127 píše, že celková hmotnost naší Galaxie je bilion Sluncí, tj. $M_G = 10^{12} M_{\odot} = 2 \cdot 10^{42}$ kg. Některé zdroje [13] dokonce uvádějí ještě třikrát větší hodnoty v objemu do vzdálenosti 200 kpc od středu.

její rozložení sféricky symetrické. Zkoncentrujeme-li baryonovou hmotu uvnitř koule o poloměru r_G do jednoho centrálního bodu, pak ze vztahů (2), (4) a (6) dostaneme, že oběžná rychlost hvězd na samém okraji viditelného disku je

$$v = \sqrt{\frac{GM(r_G)}{r_G}} \geq \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 3.85 \cdot 10^{41}}{4.938 \cdot 10^{20}}} = 228 \cdot 10^3 \text{ m/s}, \quad (7)$$

což je hodnota vskutku srovnatelná s naměřenou rychlostí (5). I když je vztah (7) jen přibližný, postulovat existenci 5–6krát většího množství temné hmoty než baryonové hmoty (viz např. [7], [26]), aby se Galaxie nerozpadla a držela gravitačně pohromadě, se zdá být dosti nadhodnocené.

5. Oběžná rychlost kolem plochého disku

Lze samozřejmě namítnout, že vztah (7) byl odvozen jen pro případ centrální síly hmotného bodu, což je podle věty 1 ekvivalentní kouli se sféricky symetrickým rozložením hustoty. V této kapitole proto budeme gravitační pole spirální galaxie aproximovat gravitačním polem plochého disku s rotačně symetrickým rozložením hustoty.

Věta 3. *Částice obíhající hmotný bod po kruhové dráze o poloměru R má menší rychlost, než kdyby obíhala plochý disk o poloměru R a stejné hmotnosti s libovolně rotačně symetricky rozloženou hustotou hmoty.*

Naznačíme hlavní myšlenku důkazu. Větší přitažlivá síla způsobuje větší oběžnou rychlost po kruhové dráze, a proto stačí porovnat jen gravitační sílu disku se silou centrálního hmotného bodu o stejné hmotnosti. Podle předpokladů věty je plošná hustota disku $\rho = \rho(r) \geq 0$ závislá pouze na vzdálenosti od jeho středu. Nejprve vyšetříme, jak působí libovolný pevně zvolený jednorozměrný homogenní prsteneček o poloměru $r \in (0, R)$ na testovací částici o hmotnosti m ve vzdálenosti R od středu prstence. Pak celková hmotnost prstencec bude $M = 2\pi r\rho$, kde ρ je délková hustota. Zkoncentrujeme-li hmotnost prstencec do jeho středu, potom odpovídající síla působící na testovací částici bude rovna

$$\overline{F} = G \frac{2\pi r\rho m}{R^2}. \quad (8)$$

Naším cílem bude ukázat, že \overline{F} je menší než síla prstencec působící na testovací částici. Tvrzení věty pak dostaneme integrací podle r . V polárních souřadnicích (r, φ) uvažujme dva stejné délkové elementy prstencec

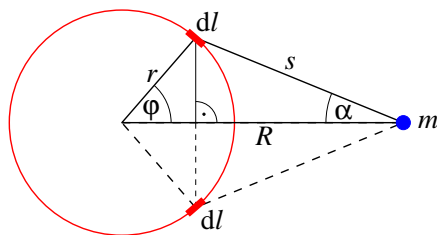
$$dl = r d\varphi \quad (9)$$

umístěné symetricky vzhledem k vodorovné ose ve vzdálenosti s od testovací částice tak, jak je nakresleno na obr. 9. Potom podle kosinové věty platí

$$s^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi \quad (10)$$

a síla, kterou tato dvojice působí na testovací částici, se rovná

$$dF = G \frac{2dl \rho m}{s^2} \cos \alpha. \quad (11)$$



Obr. 9. Homogenní prstenec působí na vnější částici větší silou, než kdyby byla jeho celková hmotnost zkoncentrovaná do středu prstence.

Ze sinové věty $r \sin \varphi = s \sin \alpha$ plyne

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{s} \sqrt{s^2 - r^2 \sin^2 \varphi}. \quad (12)$$

Bez újmny na obecnosti můžeme dále předpokládat, že gravitační konstanta $G = 1$, $R = 1$, $m = 1$ a že i délková hustota prstence je $\rho = 1$. Pak pro $r \in (0, 1)$ a $\varphi \in [0, \pi]$ dosazením (9), (10) a (12) do (11) dostaneme

$$\begin{aligned} dF &= \frac{2 \, dl}{s^2} \frac{1}{s} \sqrt{r^2 + 1 - 2r \cos \varphi - r^2 \sin^2 \varphi} = \frac{2r \, d\varphi}{s^3} \sqrt{(1 - r \cos \varphi)^2} \\ &= 2r \frac{1 - r \cos \varphi}{(r^2 + 1 - 2r \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi, \end{aligned}$$

protože $1 > r \cos \varphi$. Celková gravitační síla prstence o poloměru r působícího na testovací částici je tak

$$F(r) = 2r \int_0^\pi \frac{1 - r \cos \varphi}{(r^2 + 1 - 2r \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi = 2r \int_0^\pi f(r, \varphi) d\varphi, \quad (13)$$

kde pro pevné $r \in (0, 1)$ je integrovaná funkce $\varphi \mapsto f(r, \varphi)$ kladná, spojitá a klesající. Protože hodnoty v krajních bodech $f(r, 0) = (1 - r)^{-2}$ a $f(r, \pi) = (1 + r)^{-2}$ jsou konečná čísla, je vyšetřovaný integrál konečný (viz obr. 10).

Integrál

$$I(r) = \int_0^\pi \frac{1 - r \cos \varphi}{(r^2 + 1 - 2r \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi \quad (14)$$

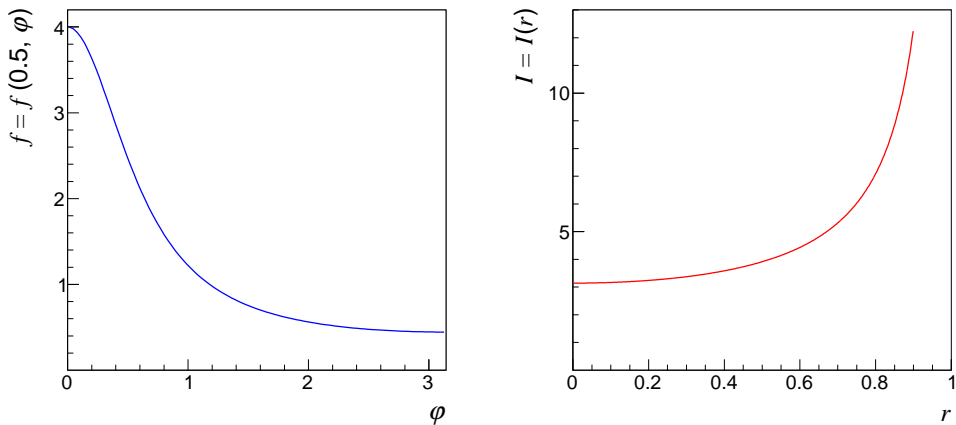
vystupující ve vztahu (13) bohužel nemá známé analytické vyjádření pro $r \in (0, 1)$. Můžeme ale zjistit, že $I = I(r)$ je rostoucí funkce,¹² a analyticky vyčíslit její limitní hodnoty. Pro $r = 0$ vidíme, že je integrovaná funkce rovna jedné, a tak (viz obr. 10)

$$I(0) = \pi. \quad (15)$$

Pro $r = 1$ dostaneme pomocí Taylorova rozvoje, že

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \geq 1 - \frac{\varphi^2}{2}.$$

¹²Funkce I je dokonce ryze konvexní a $I'(0) = 0$.



Obr. 10. Vlevo je graf integrované funkce z (13) pro $r = 0.5$ na intervalu $[0, \pi]$. Vpravo jsou znázorněny numericky vypočítané hodnoty integrálu $I(r)$ pro $r \in [0, 1)$.

Proto

$$\varphi^2 \geq 2 - 2 \cos \varphi, \quad (16)$$

a tedy platí (viz obr. 10)

$$2I(1) = \int_0^\pi \frac{2 - 2 \cos \varphi}{(2 - 2 \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{2 - 2 \cos \varphi}} \geq \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\varphi} = \infty,$$

čili

$$I(1) = \infty. \quad (17)$$

Podobný trik s dolním odhadem lze použít, abychom funkci kosinus v (14) nahradili kvadratickými polynomy v proměnné φ , což již lze analyticky vypočítat a vede na hledanou nerovnost

$$F(r) = 2rI(r) > \bar{F} = 2rI(0) \quad \text{pro } r \in (0, 1],$$

kde síly jsou definovány v (13) a (8). \square

Poznámka 3. Výsledné silové působení galaxie je součtem gravitačních účinků vřdutě, plochého disku a hala pro $r \leq r_G$, pokud je okolí Galaxie sféricky symetrické (viz věta 2). Z věty 1 plyne, že gravitační síla, kterou působí dvojrozměrná homogenní sféra (slupka) na hmotný bod, který na ní leží, je konečná. Na druhé straně, síla jednorozměrného prstence působícího na hmotný bod, který na něm leží, je podle vztahů (13)–(17) nekonečná¹³, protože funkce $f = f(r, \varphi)$ ze vztahu (13) má pro $r \rightarrow 1$ a $\varphi \rightarrow 0$ nepříjemnou singularitu. Vidíme tedy, že mezi dvojrozměrným a trojrozměrným případem je dosti podstatný rozdíl. Z dvojrozměrného modelu je také patrné, proč hvězdy na okraji spirální galaxie obíhají rychle. Nelze tedy zaměňovat gravitační pole galaxie s polem centrální síly. Paradox velkých rychlostí hvězd pozorovaných Rubinovou tak může mít zcela přirozené vysvětlení.

¹³Pokud by ale měl prsteneček kladnou konstantní tloušťku, pak by jeho síla na hmotný bod byla konečná.

6. Závěr

Analýzou fluktuací reliktního záření, které detekovala sonda Planck (viz [26]), se zjistilo, že vesmír by měl být složen z 27 % temné hmoty, necelých 5 % baryonové látky (z toho méně než 1 % tvoří svítící látka) a zbytek připadá na temnou energii. V současnosti se rozvíjejí a studují různé modifikace Newtonovy teorie MOND (Modified Newtonian Dynamics) [19], [21], [32] a jejich relativistická zobecnění TeVeS (Tensor-Vector-Scalar) [4]. Účinky, které přičítáme temné hmotě, se snaží vysvětlit pomocí jiného tvaru gravitačního zákona. V předchozích kapitolách (ale i v [17]) jsme předložili několik protiargumentů ukazujících, že výše uváděný poměr 27 : 5 množství temné hmoty ku baryonové hmotě je značně nadsazený. Např. podle vztahu (7) baryonová hmota naší Galaxie nacházející se uvnitř koule o poloměru r_G soustředěná do jednoho centrálního bodu stačí k vysvětlení vysoké rychlosti hvězd (5) obíhajících na samém okraji Galaxie. Věta 3 nám navíc říká, že stejné rychlosti lze dosáhnout i pro ještě menší celkovou baryonovou hmotnost Galaxie rozloženou zcela libovolně rotačně symetricky do plochého disku.

V roce 1933 Fritz Zwicky [35] naměřil příliš velké rychlosti osmi galaxií v galaktické kupě A1656 ve Vlasech Bereniky. Proto postuloval existenci jakési temné hmoty, aby kupa držela gravitačně pohromadě. V [17] podrobně analyzujeme jeho metodu pro současně naměřené rychlosti a magnitudy jednotlivých galaxií, která dramaticky snižují odhadované množství temné hmoty. Podle [34] se v mezigalaktickém prostoru kupy nalézají 30–50 % hvězd z celkového počtu všech hvězd kupy, což také přispívá k vysvětlení vyšších naměřených rychlostí i bez temné hmoty.

Pavel Kroupa se svým týmem uvádí v [16] celkem 5 argumentů, které ukazují na neexistenci temné hmoty v okolí naší Galaxie. Řada dalších prací ([2], [9], [10], [14], [22], [23] a [33]) také potvrzuje, že na škálách galaktických disků je Newtonova teorie gravitace docela dobrou aproximací reality a není ji třeba modifikovat ani předpokládat existenci temné hmoty. Jinými slovy, temná hmota může být jen chybou modelu vzniklá nesprávnou interpretací naměřených dat. Pokud přesto nějaká existuje, patrně jí není šestkrát více než svítící i nesvítící baryonové hmoty dohromady, jak se extrapoluje v [26] z vlastností reliktního záření starého přes 13 miliard let, které je deformováno pomocí gravitačního čočkování galaxií a galaktických kup.

Na závěr uvedme nejzávažnější nedostatek standardního kosmologického modelu. Každá rovnice matematické fyziky **bez výjimky** má svá ohraničení na velikosti vyšetřovaných objektů. Například standardní rovnice vedení tepla velice dobře aproximuje skutečnou teplotu v pevných látkách o rozměrech srovnatelných s jedním metrem. Kdybychom ji ale použili na atomární úrovni v krychličce o hraně 10^{-10} m, dostaneme zjevné nesmysly, stejně tak jako v krychli o hraně 10^{10} m (tj. sedminásobku průměru Slunce), která by teoreticky okamžitě zkolabovala do černé díry. Totéž platí i pro rovnice pružnosti, polovodičové rovnice, Navierovy–Stokesovy rovnice proudění, Maxwellovy rovnice atd. Podobně nemůžeme používat Keplerovy zákony na škálách 10^{-10} m nebo naopak Schrödingerovu rovnici na objekty o velikosti kočky. Při jakémkoliv výpočtu je proto třeba starat se o chybu modelu.

Při odvozování standardního kosmologického modelu se ale Einsteinovy rovnice použijí na celý vesmír. To se bere jako samozřejmost a jen málokdo si klade otázku, zda je vůbec oprávněné provádět takové smělé a ničím nepodložené extrapolace,

kdž je obecná teorie relativity zatím „prověřena“ jen na mnohem menších prostoročasových škálách (ohyb světelných paprsků a zpomalování elektromagnetických vln v gravitačním poli Slunce, strhávání prostoročasu rotující Zemí — Lenseův–Thirringův precesní efekt, stáčení perihelia dráhy Merkuru apod.). Přitom galaxie mají rozměr řádově 10^{10} astronomických jednotek a pozorovatelný vesmír ještě alespoň o pět řádů více. Standardní kosmologický model tak byl odvozen pomocí dosti nekoektní extrapolace.

Poděkování. Autoři děkují RNDr. Soně Ehlerové, Ph.D., Ing. Vladimíru Novotnému, RNDr. Vojtechu Rušinovi, DrSc., a Mgr. Richardu Wünschovi, Ph.D., za cenné podněty a připomínky. Článek byl podpořen grantem P101/14-020675 GA ČR a výzkumnými záměry MSM 0021620839, RVO 67985840 a MŠMT CZ.1.07/2.3.00/20.0207.

L i t e r a t u r a

- [1] ANDERLE, P.: *Nebeská mechanika*. Academia, Praha, 1987.
- [2] BANHATTI, D. G.: *Newtonian mechanics & gravity fully model disk galaxy rotation curves without dark matter*. Dostupné z arXiv: 0806.1131, 2008, 1–6.
- [3] BATTAGLIA, G., et al.: *The radial velocity dispersion profile of the Galactic halo: Constraining the density profile of the dark halo of the Milky Way*. Dostupné z arXiv: astro-ph/0506102v2, 2008, 1–11.
- [4] BEKENSTEIN, J.: *Relativistic gravitation theory for the modified Newtonian dynamics paradigm*. Phys. Rev. D 70 (2004), 083509.
- [5] BINNEY, J., MERRIFIELD, M.: *Galactic astronomy*. Princeton Univ. Press, 1998.
- [6] BINNEY, J., TREMAINE, S.: *Galactic dynamics*. Princeton Univ. Press, 1987.
- [7] BOSMA, A.: *Dark matter in galaxies: Observational overview*. In: *Dark Matter in Galaxies*, IAU Sympos. 220 (eds. S. Ryder, D. J. Pisano, M. Walker, K. C. Freeman), 2003, 1–12.
- [8] BROOKS, M.: *13 things that do not make sense*. New Scientist 2491 (2005), 30–37.
- [9] FENG, J. Q., GALLO, C. F.: *Mass distribution in rotating thin-disk galaxies according to Newtonian dynamics*. Galaxies 2 (2014), 199–222.
- [10] GALLO, C. F., FENG, J. Q.: *Galactic rotation described by a thin-disk gravitational model without dark matter*. J. Cosmol. 6 (2010), 1373–1380.
- [11] GAMOW, G.: *Rotating universe?* Nature 158 (1946), 549.
- [12] GÖDEL, K.: *An example of a new type of cosmological solutions of Einstein’s field equations of gravitation*. Rev. Modern. Phys. 21 (1949), 447–450.
- [13] IRRGANG, A., WILCOX, B., TUCKER, E., SCHIEFELBEIN, L.: *Milky Way mass models for orbit calculations*. Astronom. Astrophys. (2014). Dostupné z arXiv: 1211.4353v4, 1–13.
- [14] JALOCHA, J., BRATEK, L., KUTSCHERA, M.: *Is dark matter present in NGC 4736? An iterative spectral method for finding mass distribution in spiral galaxies*. Dostupné z arXiv: astro-ph/0611113v3, 2008, 1–7.
- [15] KLECZEK, J.: *Velká encyklopedie vesmíru*. Academia, Praha, 2002.

- [16] KROUPA, P. ET AL.: *Local-group tests of dark-matter concordance cosmology*. Dostupné z arXiv: 1006.16473v3, 2010, 1–26.
- [17] KRÍŽEK, M., KRÍŽEK, F., SOMER, L.: *Which effects of galactic clusters can reduce the amount of dark matter*. *Bulg. Astronom. J.* 21 (2014), 1–23.
- [18] LANG, K. R.: *Astrophysical formulae, vol. II*. Springer, Berlin, 2006.
- [19] MCGAUGH, S. S.: *Milky Way mass models and MOND*. *Astrophys. J.* 683 (2008), 137–148.
- [20] MIKULÁŠEK, Z., KRTIČKA, J.: *Základy fyziky hvězd*. Masarykova univerzita, Brno, 2005.
- [21] MILGROM, M.: *A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis*. *Astrophys. J.* 270 (1983), 365–370.
- [22] MONI BIDIN, C., CARRARO, G., MÉNDEZ, R. A., SMITH, R.: *Kinematical and chemical vertical structure of the Galactic thick disk II. A lack of dark matter in the solar neighborhood*. Dostupné z arXiv: 1204.3924v1.
- [23] NICHOLSON, K. F.: *Galactic mass distribution without dark matter or modified Newtonian mechanics*. Dostupné z arXiv: astro-ph/0309762v2, 2007, 1–16.
- [24] NÝČ, P., EISLER, J.: *Tabulky neurčitých integrálů*. Nakladatelství EN, Praha, 1991.
- [25] PANEK, R.: *Čtyřprocentní vesmír. Temná hmota, temná energie a hledání zbytku reality*. Argo/Dokořán, Praha, 2012.
- [26] Planck Collaboration, Planck 2013 results, I. Overview of products and scientific results, XVI. Cosmological parameters. Dostupné z arXiv: 1303.5062, 1303.5076v1.
- [27] REKTORYS, K.: *Přehled užití matematiky I*. Prometheus, Praha, 1995.
- [28] RUBIN, V. C.: *Dark matter in spiral galaxies*. *Scientific American* 248 (1983), 88–101.
- [29] RUBIN, V. C.: *A brief history of dark matter*. *The Dark Universe: Matter, Energy, and Gravity* (ed. M. Livio), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003, 1–13.
- [30] RUBIN, V. C., et al.: *Kinematic studies of early-type stars I. Photometric survey, space motions, and comparison with radio observations*. *Astrophys. J.* 67 (1962), 491–531.
- [31] RUBIN, V. C., FORD, W. K., THONNARD, N.: *Rotational properties of 21 Sc galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 ($R = 4$ kpc) to UGC 2885 ($R = 122$ kpc)*. *Astrophys. J.* 238 (1980), 471–487.
- [32] SANDERS, R. H., MCGAUGH, S. S.: *Modified Newtonian dynamics as an alternative to dark matter*. *Ann. Rev. Astronom. Astrophys.* 40 (2002), 263–317.
- [33] SIKORA, S., BRATEK, L., JALOCHA, J., KUTSCHERA, M.: *Gravitational microlensing as a test of a finite-width disk model of the Galaxy*. Dostupné z arXiv: 1103.5056v3, 2012, 1–10.
- [34] TUTUKOV, A. V., FEDOROVA, A. V.: *The origin of intergalactic stars in galaxy clusters*. *Astronom. Reports* 55 (2011), 383–391.
- [35] ZWICKY, F.: *Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln*. *Helv. Phys. Acta* 6 (1933), 110–127.