

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jaroslav Klokočník; Aleš Bezděk; Jan Kostecký
Nečekané hrátky s třetím Keplerovým zákonem

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 59 (2014), No. 3, 194--210

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/144025>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2014

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Nečekané hrátky s třetím Keplerovým zákonem

Jaroslav Klokočník, Aleš Bezděk, Ondřejov, Jan Kostelecký, Zdiby

1. Úvod

Johannes Kepler využil Tychonova a vlastní pozorování planet, hlavně Marsu, k formulování svých zákonů (např. [11], [7]). V práci *Harmonices mundi libri V* (1619) publikoval vztah mezi oběžnými dobami planet a jejich vzdálenostmi od Slunce, tzv. „harmonický zákon“. Dnes ho nazýváme třetí Keplerův zákon. Říká, že poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin jejich „středních vzdáleností“ od Slunce. V současné době k zápisu zákona použijeme vzorec

$$(T_1/T_2)^2 = (a_1/a_2)^3, \quad (1)$$

kde T_i je čas, za nějž planeta i urazí svou oběžnou dráhu kolem Slunce, a a_i je hlavní poloosa její dráhové elipsy, $i = 1, 2$. Přesnější verzi, uvažující i hmotnosti planet, lze dnes snadno odvodit z Newtonova gravitačního zákona (např. [25]).

Třetí Keplerův zákon patří mezi nejpoužívanější vztahy v astronomii. Kepler by byl jistě rád, kdyby viděl, že a jak lze jeho zákony používat i pro pohyby umělých družic Země (UDZ) v tzv. dráhové dynamice družic (což je podobor nebeské mechaniky) a dokonce pro výběr drah UDZ, co se hlavní poloosy dráhy a sklonu oběžné roviny k rovině zemského rovníku týče (tzv. jemné doladování dráhy). Cílem je, aby se vybrané dráhy hodily co nejlépe k určení parametrů gravitačního pole Země (nebo jiných z družicových měření určovaných veličin). To, co v tomto článku následuje, není vlastně nic jiného než další, pro čtenáře možná nečekaná aplikace třetího Keplerova zákona.

2. Dráhové rezonance UDZ a třetí Keplerův zákon

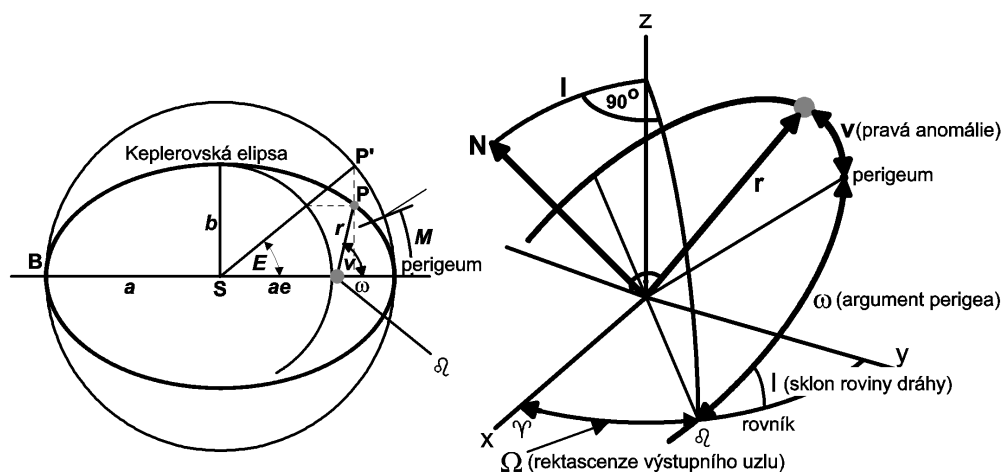
2.1. Dráhové rezonance

Když družice uskuteční β oběhů kolem Země za α dnů (α, β čísla celá a nesoudělná), hovoříme o rezonanci β/α . Dráha družice se vůči zemskému pozorovateli (subsatelitnímu bodu) po β obězích za α dnů přesně zopakuje.

Tato charakterizace je geometricky názorná, ale nepřesná. Oběhy musíme počítat od uzlu dráhy UDZ k témuž uzlu dráhy, takže mluvíme o nodálním oběhu. „Uzel

Prof. Ing. JAROSLAV KLOKOČNÍK, DrSc., Mgr. ALEŠ BEZDĚK, Ph.D., Astronomický ústav AV ČR, v. v. i., 251 65 Ondřejov, e-mail: {jklkocn, bezdek}@asu.cas.cz, prof. Ing. JAN KOSTELECKÝ, DrSc., Výzkumný ústav geodetický, topografický a kartografický, v. v. i., 250 66 Zdiby 98, e-mail: kost@fsv.cvut.cz

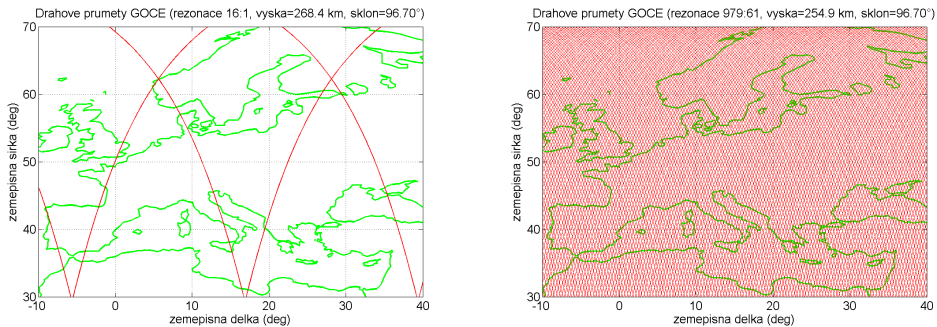
dráhy“ je jedna z právě šesti integračních konstant pohybových rovnic, tzv. dráhových elementů, definujících prostorové uspořádání a tvar dráhy družice, představené ve zjednodušeném případě elipsou. Je to úhlová vzdálenost přímky, ve které se protíná rovina dráhy s rovinou zemského rovníku od zvoleného počátečního směru. Definice keplerovských neboli eliptických elementů najde zájemce v každé učebnici nebo skriptech astronomie zabývajících se nebeskou mechanikou.¹ Zde je přibližují obr. 1a,b. Otočku Země měříme v nodálních dnech, což je totéž jako v siderických dnech (vztahených ke hvězdnému pozadí) vzhledem ke dráze UDZ podléhající „precesi“ [1]. Tu působí fakt, že Země není koule, ale v prvním přiblížení rotační elipsoid zploštěný na pólech. Díky tomu „přebytky“ hmot u rovníku otáčejí rovinou dráhy UDZ kolem Země (precese uzlu), posouvají perigeum dráhy v rovině dráhy (precese perigea) a také sekulárně mění střední anomálii dráhy (další z dráhových elementů, měří úhlovou vzdálenost družice v dráze od perigea dráhy). Skutečný tvar Země, geoid (plocha konstantního tíhového potenciálu vybraná tak, aby se shodovala se střední hladinou moří při zanedbání oceánských proudů, slapů a topografie zemského povrchu), odlišný od průběhu rotačního elipsoidu, už na precesi dráhy nic podstatného nezmění. Ale to jsme odbočili ...



Obr. 1. Definice keplerovských elementů (popis: viz text pod čarou).

¹Definice keplerovských elementů: a – velká poloosa dráhy, e – excentricita jsou parametry keplerovské elipsy. Tzv. pravá anomálie v a excentrická anomálie E charakterizují polohu družice na elipse a mění se díky druhému Keplerovu zákonu (plošná rychlost je konstantní) s časem nerovnoměrně (postupná rychlost je v perigeu větší než v apogeu). Pravá a excentrická anomálie jsou vzájemně vázány afinitou mezi obrysovou kružnicí a elipsou a mají geometrický význam. Jelikož Kepler toužil po anomálii, rovnoměrně se měnící s časem, definoval tzv. střední anomálii M , která je vázána k excentrické anomálii „Keplerovou rovnicí“, ale nemá geometrický význam. Platí ale $v = E = M$ v perigeu a apogeu dráhy.

Tři keplerovské elementy a , e , M určují po příslušném převodu na průvodič r a pravou anomálii v polohu družice v keplerovské elipse, která je podle prvního Keplerova zákona rovinným útvarem. Pro určení polohy družice v prostoru jsou zapotřebí další tři elementy. Jsou to (viz obr. 1a,b) rektascenze výstupního uzlu Ω , argument perigea ω a sklon roviny dráhy vůči rovníku I . Aplikací analytické geometrie a zákona zachování hybnosti lze pak z parametrů r , v , Ω , ω a I vypočítat prostorovou polohu a rychlost družice.



Obr. 2. Porovnání hustoty pokrytí zemského povrchu průměty dráhy družice GOCE pro dvě různé rezonance (16/1 a 979/61). Jde o jednu a tutéž družici na obou obrázcích. Ačkoliv je výška letu v obou případech podobná, hustota pokrytí Země je dramaticky jiná. Síť subsatelitních bodů se v případě 16/1 namotá za den, ale je řídká (vlevo), v případě 979/61 za dva měsíce, ale je velmi hustá (vpravo). Kdyby družice mohla zůstat dva měsíce v exaktní rezonanci 16/1, hustota sítě, jak ji ukazuje obr. 2a, by se nezvětšila, protože po každém dalším dnu by se dráha vůči pozemskému pozorovateli přesně zopakovala. Každá dráha má vzestupné a sestupné průměty (od jihu na sever a od severu na jih), tak jak družice letí kolem podtáče-jící se Země v rovině s určitým sklonem dráhy k rovině zemského rovníku. Na obrázku jsou všechny oblouky dráhy, neboť se všechny účastní tvorby „ground tracks“.

Dráhovou rezonanci můžeme názorně zobrazit pomocí průmětů dráhy (ground tracks) UDZ na zemský povrch. V průběhu doby se průměty namotávají a po α dnech a β obězích UDZ (α , β čísla celá) se síť subsatelitních bodů začne přesně opakovat (mlčky předpokládáme, že stav dráhové rezonance trvá, což v přírodě kvůli odporu atmosféry Země není pravda). Pokud je β malé, např. 16/1, namotá se síť subsatelitních bodů rychle (za den a pak se stále opakuje), ale bude řídká (má „velká oka“, kde neproběhlo měření, čili malou hustotu), jak ukazuje obr. 2a. V kontrastu s tím třeba pro rezonanci 979/61 (s hlavní poloosou podobnou té, co má dráha 16/1) jsou na kompletní namotání potřeba dva měsíce, ale výsledná síť je velmi hustá, obr. 2b.

Běžně družice různými rezonancemi jen prochází brzděna atmosférou, neboť odpor atmosféry trvale zmenšuje hlavní poloosou dráhy. Družice se tak pomalu, ale nevyhnutelně přibližuje k Zemi. Teoreticky je dráhových rezonancí nekonečně mnoho, v každém okamžiku dochází k nějaké exaktní rezonanci. Ovšem jen ty s poměrně malým β mají praktický význam. Používaly se ke studiu gravitačního pole (např. [13], [14], [18]), neboť v období kolem exaktní rezonance nízkého řádu (malé β) se poruchy dráhy² chovaly jinak než mimo něj. Dočasně velké poruchy bylo možno pozorovat i tehdejšími, málo přesnými prostředky. Nyní se používají k výběru drah altimetrických a dalších družic s cílem volbou dráhy maximálně využít měření z družic vykonaná pro vědecké cíle (kapitola 3–6).

²Poruchy dráhy UDZ jsou souborem změn dráhy (změny dráhových elementů nad rámec keplerovské elipsy) působené rozmanitými gravitačními i negravitačními vlivy, jako je detailní struktura gravitačního pole Země, přitažlivost Měsíce, Slunce a planet, slapy, odpor atmosféry, tlak slunečního záření (přímého i odraženého od Země), vliv magnetického pole, relativistické změny aj. Podrobnosti zájemce naleznou v učebnicích či skriptech nebeské mechaniky, dráhové dynamiky UDZ nebo astrodynamiky.

Pokud nám rezonance překážejí, máme smůlu. Vyhnout se jim lze jedině tak, že družici raketovými motorky „zvedneme“ (zvětšíme hlavní poloosu dráhy či jinými slovy výšku letu nad zemským povrchem) a vyhneme se průchodu nějakou výraznou, nechtěnou rezonancí, jako je třeba 16/1 při studiu gravitačního pole Země. K udržování dráhy ve stanovené výšce letu nad Zemí pak bude nutné opakovaně zapínat raketové motory (dokud nedojde palivo). To se dělo u altimetrických družic pro studium oceánografických jevů a u družic CHAMP a GOCE (kapitola 3, 4).

Máme-li na družici prostředek k dlouhodobému a velmi přesnému udržení dráhy ve vybrané rezonanci (a tím byl iontový motor na GOCE, kapitola 5), pak zajišťujeme dlouhodobě konstantní podmínky pro gradientometrická měření s předem vybranou hustotou „ground tracks“. S výškou letu lze jemně manipulovat (v rámci stovek metrů) a změna hustoty dráhových průmětů na Zemi tím vyvolaná může být značná (kapitola 5). Těto činnosti se říká „jemné dolaďování dráhy“. Umožňuje maximalizovat přesnost a rozlišení družicemi měřených veličin.

2.2. Třetí Keplerův zákon pro dráhové rezonance

Pro Zemi jako hmotný bod, homogenní kouli nebo kouli homogenní po vrstvách a pro střední denní pohyb družice $n_0 = 2\pi/T$, kde T je siderická oběžná doba UZ, třetí Keplerův zákon (1) přepíšeme jako

$$n_0^2 a^3 = GM_Z, \quad (2)$$

kde GM_Z je součin univerzální gravitační konstanty a hmotnosti Země (čemuž se také říká geocentrická gravitační konstanta); hmotnost družice je oproti hmotnosti Země zanedbatelná.

Země ale není homogenní koule. Přiblížení rotačním elipsoidem se středem ve středu Země, hlavní poloosou v rovině rovníku a vedlejší poloosou ve směru osy rotace Země pro náš účel stačí. Z celého následujícího výrazu pro rozvoj gravitačního potenciálu Země V ve vnějším bodě Země [1] nám zbude jen výraz se členem J_2 (mající vztah ke geometrickému pólovému zploštění rotačního elipsoidu). Tento koeficient v rozvoji (3) je totiž přinejmenším tisíckrát větší než každý jiný harmonický geopotenciální koeficient (Stokesův parametr) C_{lm} , S_{lm} , charakterizující svými hodnotami gravitační pole Země (geopotenciální koeficienty, definované např. v [5], jsou funkcemi momentů setrvačnosti tělesa):

$$V = \left(\frac{GM}{R}\right) \operatorname{Re} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{k=-l}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(\frac{R}{a}\right)^{l+1} \{F_{lm}^k(I)G_{lq}^k(e) \exp(i\psi_{lmkq})\} \quad (3)$$

kde R je referenční hlavní poloosa náhradního elipsoidu, (l, m) jsou stupně a řád rozvoje ve sférické harmonické, $2 \leq l < \infty$, $0 \leq m \leq l$, k má stejnou paritu jako l , takže dvě nejnižší hodnoty k jsou $-l$ a $(-l+2)$, $-\infty < q < \infty$, Re značí reálnou část, $F(I)$ je funkce sklonu a $G(e)$ funkce excentricity. V dalším použijeme starší označení $J_2 = \sqrt{5}C_{20}$ pro $l=2$ a $m=0$ (největší koeficient v rozvoji). Fáze ψ je

$$\psi_{lmkq} = k\omega + (k+q)M + m(\Omega - S),$$

kde S je greenwický hvězdný čas, Ω a ω je rektascenze výstupního uzlu dráhy a vzdálenost perigea dráhy od vzestupného uzlu dráhy (argument perigea), obr. 1, $M = \sigma + \int n dt$, kde M je střední anomálie a σ je střední anomálie ve výchozí epoše. Časová derivace ψ_{lmkq} je

$$\dot{\psi}_{lmkq} = k\dot{\omega} + (k + q)(n + \dot{\sigma}) + m(\dot{\Omega} - \dot{S}), \quad (4)$$

kde \dot{S} je derivace hvězdného času podle času čili úhlová rychlost rotace Země (zde považovaná za rovnoměrnou).

Časové změny elementů Ω , ω a M vyjádříme pomocí pohybových rovnic [12]. V exaktní rezonanci platí $\psi_{lmkq} = 0$. To vyplývá z faktu, že při řešení (integraci) pohybových rovnic (zde Lagrangeových planetárních rovnic) se $\dot{\psi}_{lmkq}$ dostane do jmenovatele a analytické řešení v exaktní rezonanci selže (problém dlouho známý z nebeské mechaniky přirozených kosmických těles jako tzv. problém malého jmenovatele). Z hlediska výpočtu drah UZD to nevadí, protože analytická integrace se nepoužívá, integruje se numericky.

Podržíme-li si jen J_2 , celý výraz (3) se podstatně zjednoduší. Takový zjednodušený potenciál použijeme ve třech z šesti Lagrangeových pohybových planetárních rovnic (viz např. [12]), a to pro vzdálenost uzlu dráhy Ω od jarního bodu, vzdálenost perigea ω od (vzestupného) uzlu dráhy a pro střední anomálii M (jen tyto tři dráhové elementy podléhají sekulárním změnám díky J_2 , ostatní elementy, tj. hlavní poloosa dráhy a , excentricita e a sklon roviny dráhy k rovině zemského rovníku I sekulární změny díky J_2 nevykazují). Lagrangeovy pohybové rovnice v našem zjednodušeném případě jsou

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{3n}{4} \frac{J_2}{(1-e)^2} \frac{R^2}{a^2} (1 - 5 \cos^2 I), \quad (5a)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3n}{2} \frac{J_2}{(1-e^2)^2} \frac{R^2}{a^2} \cos I, \quad (5b)$$

$$\dot{M} = \frac{dM}{dt} = n + \frac{3n}{4} \frac{J_2}{(1-e^2)^{3/2}} \frac{R^2}{a^2} (3 \cos^2 I - 1). \quad (5c)$$

Rovnici (4) v exaktní rezonanci, tj. když $\dot{\psi}_{lmkq} = 0$, přepíšeme a vyjádříme z ní n takto:

$$n = \frac{\beta}{\alpha} \left(|\dot{S}| - \dot{\Omega} \right) - \dot{\omega} - \dot{M}_0.$$

Nyní sem dosadíme změny dráhových elementů z rovnic(5a)–(5c) a po úpravě dostaneme výsledný vzorec

$$n = \frac{\beta}{\alpha} |\dot{S}| \left\{ 1 - \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 \left(4 \cos^2 I - \tau \frac{\beta}{\alpha} \cos I - 1 \right) \right\}, \quad (6)$$

kde všechny potřebné symboly již byly vysvětleny výše, až na τ . Toto je výraz pro modifikovaný střední denní pohyb a tím vlastně třetí Keplerův zákon pro UZD v dráhové rezonanci se Zemí v gravitačním poli rotačního elipsoidu; porovnejte s „kulovou verzí“ (2), kde místo n je n_0 . Podrobněji by bylo potřeba pojednat, o jaké střední hlavní poloosy se ve vzorci (6) jedná, ale to si zde odpustíme [10].

V rovnici (6) jsme si dovolili zobecnění, které použijeme pro případ meziplanetárních sond, a to že $\tau = 1$ pro $\dot{S} > 0$ a $\tau = -1$ pro $\dot{S} < 0$. Příklad se záporným τ se vztahuje na retrográdní rotaci planety, což nastává jen u Venuše (kapitola 6), pro UDZ nikoli.

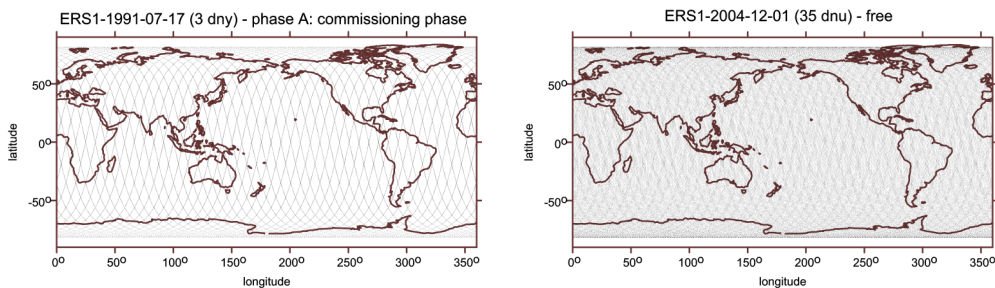
Připravme si graf pro vybranou dráhu (pro zvolený, tj. „referenční“ sklon dráhy I a rozsah a či výšek $h = a - R$) následujícím způsobem. Na ose x bude α (dny), na ose y bude a nebo h (km) a v poli grafu budou hodnoty β . Nejbližší příklad takového rezonančního vývojového grafu je na obr. 4, kapitola 3, další jsou v kapitolách 4–6.

Rezonanční graf ukazuje, jakými exaktními rezonancemi by družice prošla při volném průchodu atmosférou (bez ovlivňování raketovými motorky). Plynutí času si lze představit jako postupné zmenšování hlavní poloosy dráhy, tedy posun po ose y dolů.

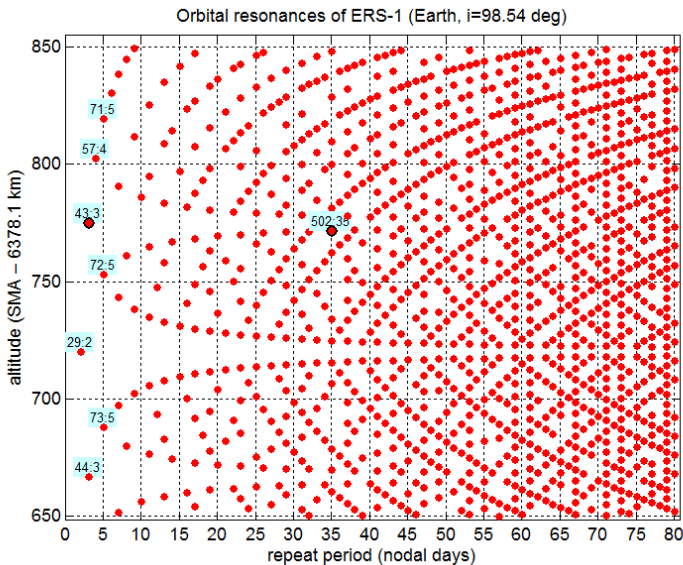
3. Altimetrické družice

Tyto družice měří radarem nebo laserovým dálkoměrem vzdálenost z družice kolmo dolů (k nadiru čili zhruba ve směru místní vertikály) k moři, ledové pokrývce nebo k zemskému povrchu. Sloužily a slouží především oceánografickému výzkumu (topografie oceánů aj.) a k určení průběhu detailního mořského geoidu [6]. Protože každá složitá družice je drahá záležitost, musely se o jednu podělit oba obory, a tak se manipulovalo s drahou. Díky dráhovým manévřům (raketovým motorkům) se mohla zvolit a po nějakou dobu udržovat občasným mírným zvýšením dráhy asi o 1 km dráha rezonanční, zde nazývaná ERM (Exact Repeat Mission), s předepsanou periodicitou α , která se pak vystříдалa drahou volně padající v atmosféře, tzv. GM (Geodetic Mission), která měla vysokou hustotu ground tracks a tak se hodila pro detailní průzkum oceánské části geoidu. ERM s malými α (např. 3 dny) posloužily pro studium rychle proměnných jevů, s většími α (např. 35 dnů) pro jevy dlouhoperiodické.

Nebudeme se detailně zabývat altimetrickými družicemi a volbami jejich drah, jen jako příklad ukážeme hustotu průmětů dráhy (subsatelitních bodů) bývalé altimetrické družice ERS 1 se sklonem dráhy $I = 98.5^\circ$ v rezonanci 43/3 (obr. 3a) a 502/35 (obr. 3b). Vývojový rezonanční graf podle rovnice (6) je na obr. 4 (zde jsou dva typy střední hlavní poloosy a , upozorňující na to, že definice středních elementů je podstatná pro stanovení okamžiku exaktní rezonance, ale my v rovnici (6) nemáme jejich



Obr. 3. Porovnání tvaru, průběhu a hustoty ground tracks pro družici ERS 1 v rezonancích 43/3 (vlevo) a 502/35 (vpravo) podle [23]. Malá změna hlavní poloosy dráhy (zde pokles asi o 3 km) vyvolává dramatickou změny hustoty.



Obr. 4. Rezonanční vývojový graf pro altimetrickou družici ERS 1 (ESA). Vyznačeny jsou rezonance 43/3 a 502/35, o kterých je v textu bližší zmínka.

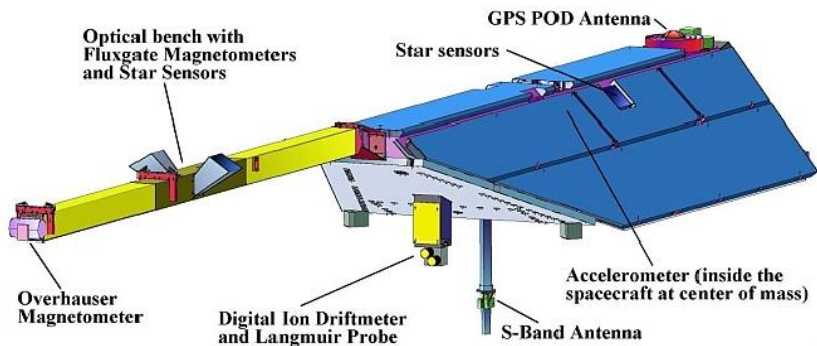
blíže specifikaci). Dráhu ERS 1 upravovaly raketové motorky a jistou dobu ji udržovaly ve výšce letu na úrovni rezonance 43/3 a pak 502/35. Na závěr mise ERS 1 přišla fáze GM. Podobně tomu bylo i u dalších altimetrických družic.

Bistatická altimetrie je rozšířením konceptu tradiční, „monostatické“ altimetrie. Od družic GPS na vysokých drahách jde signál k družici na nízké dráze (výška letu na kruhové dráze zhruba 700 km), vybavené speciální anténou k příjmu signálu z GPS přímo i po odrazu od moře. Počet měřických bodů na hladině se tímto způsobem násobí oproti tradičním altimetrickým měřením jen směrem k nadiru, protože signál z GPS lze přijímat z různých směrů. Pro takto vybavenou družici bude stejně jako pro „gravitační misi“ důležitý „správný“ výběr dráhy; více v [16], [20].

4. CHAMP a GRACE

CHAMP (**CH**ALLENGING **M**inisatellite **P**ayload for geophysical research and application) (2000–2010) byla německá družice pro detailní průzkum gravitačního a magnetického pole Země, vybavená německými, francouzskými a americkými přístroji (obr. 5). Byla vypuštěna v r. 2000 na kruhovou, skoro polární dráhu, do počáteční výšky 450 km (více GFZ Geoforschungs Zentrum Potsdam, <http://www.gfz-potsdam.de>).

Design družice je zcela revoluční (navrhl šéf projektu CHAMP Prof. Ch. Reigber). CHAMP měl anténu pro určování své polohy pomocí družic GPS a koutové odražeče pro sledování laserovými dálkoměry. V těžišti družice byl umístěn citlivý mikroakcelerometr, který sloužil k měření a následné eliminaci všech negravitačních zrychlení působících na družici, a to s přesností $3 \times 10^{-9} \text{ m/s}^2$ ve směru podél dráhy letu a ve směru



Obr. 5. CHAMP. Nový design družice. Družice vypadá jako střecha domu. Magnetometr je na skládací tyči co nejdále od tělesa družice, anténa pro sledování družice z družic GPS a hvězdné sensory pro určení orientace družice na „horní“ stěně, mikroakcelerometr v těžišti družice, koutové odražeče a anténa pro bistatickou altimetrii na „spodní“ straně (stále přivrácené k Zemi). © GFZ Postdam a Oberpfaffenhofen, Německo.

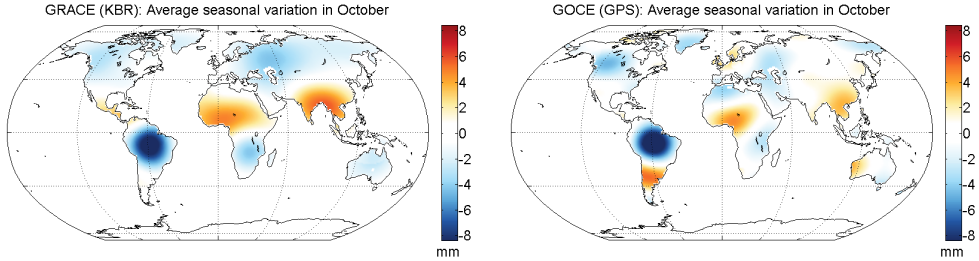
příčném, o řád méně v radiálním směru. Na spodní stěně, která byla stále přivrácena k Zemi, byla speciální anténa pro technologický experiment s bistatickou altimetrií. Určení polohy družice CHAMP pomocí GPS přijímače geodetické kvality bylo velmi přesné (několik centimetrů). V průběhu doby CHAMP provedl několik dráhových manévrů, zopakoval si průchody vybranými rezonancemi nízkého řádu (využito k určení lumped koeficientů [10]) a prodloužil si životnost ve dráze (o to šlo šéfovi mise).

CHAMP úspěšně pracoval a přeluhoval. Data z něj přispěla k výraznému pokroku při tvorbě modelů gravitačního pole Země. Tyto znalosti vůbec nejsou jen akademickou záležitostí. Mají použití třeba v oceánografii při studiu topografie moří nebo v geofyzice při teoretickém zkoumání vnitřní stavby Země.

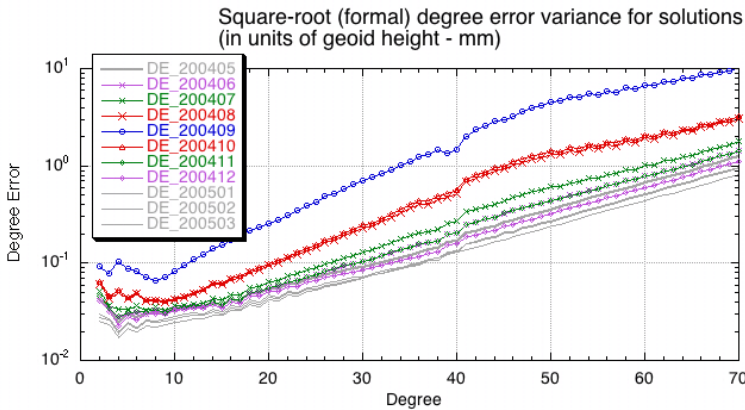
GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) je společný německo-americký projekt. Jedná se o dvojici družic vypuštěných v r. 2002 na dráhu podobnou dráze družice CHAMP. Vypadají jako CHAMP, ale bez tyče s magnetometrem. Podrobné informace o GRACE jsou na uvedených stránkách GFZ nebo např. na www.csr.utexas.edu/grace/.

Hlavním cílem mise GRACE je studium detailů gravitačního pole Země a jeho časové změny. Polohy obou družic jsou určovány pomocí GPS, dráhy mají centimetrovou přesnost. Zkoumat velice přesně jemnou strukturu zemského gravitačního pole je možné díky technologii sledování družice z družice – měří se změny vzájemné polohy obou objektů pomocí mikrovlnného spojení mezi nimi s přesností na několik mikronů. Obě družice mají mikroakcelerometry k eliminaci negravitačních zrychlení. Stejně jako CHAMP přispěly i družice GRACE k zpřesnění modelů gravitačního pole Země, ale i k detailnímu lokálnímu popisu pole a jeho časových variací. Příčiny variací jsou mnohé. Například roční cyklus v gravitačním signálu (obr. 6) je především důsledkem přesunů vodních hmot v blízkosti zemského povrchu (na zemském povrchu i pod ním) a úzce souvisí s globálním hydrologickým cyklem (http://www.asu.cas.cz/~bezdek/vyzkum/Grace_animace/).

Uživatelé GRACE byli v r. 2004 postaveni před „záhadu“: stalo něco zvláštního, dálkovými průzkumníky neočekávaného, a přesto věc logická a běžná z pohledu dráhové



Obr. 6. Časově proměnné gravitační pole z měření GRACE a GOCE. Nalevo je průměrná změna gravitačního signálu v říjnu z měření mise GRACE; tuto roční variaci lze spočítat, ovšem s menší přesností, z dráhových změn družice GOCE (obrázek vpravo, viz kapitola 5).

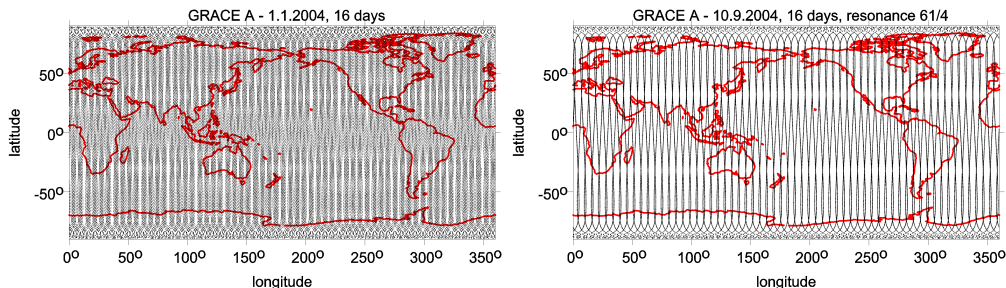


Obr. 7. Nečekaný, dočasný pokles přesnosti (zvýšení degree error) jednoměsíčních řešení pro variabilitu gravitačního pole v období podzimu 2004 (červeně a modrá křivka). Podle Bettadpura 2004. Vysvětlení podáno v [26]. Příčinou byl průchod družic GRACE rezonancí 61/4 a tomu odpovídající propad hustoty jejich ground tracks.

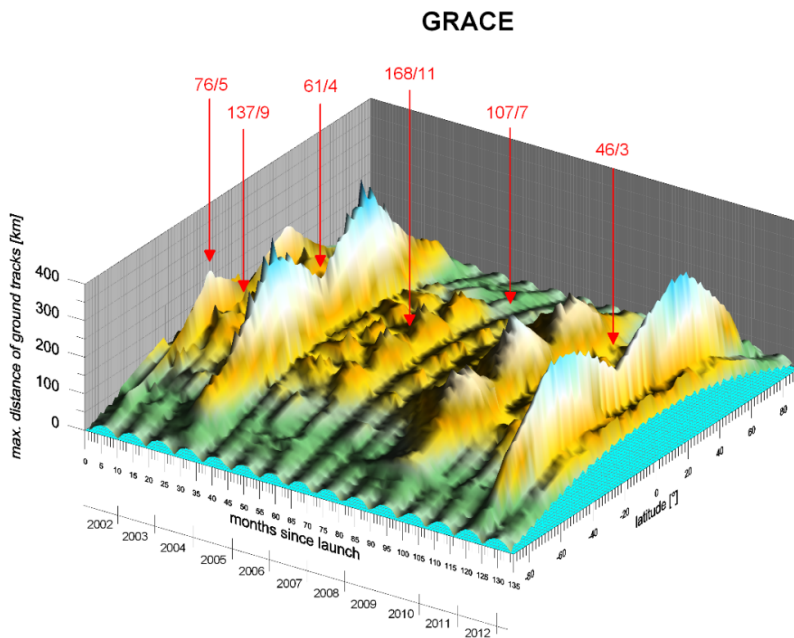
dynamiky UZD. V průběhu roku 2004 se náhle a dočasně (asi na čtvrt roku) podstatně, více než o řád, snížila přesnost určení variací gravitačního pole (obr. 7), aniž by ubylo měření, aniž by došlo k nějaké změně v přesnosti a procesu měření a jejich zpracování. Čím to a co s tím?

Na podzim 2004 se družice GRACE dostaly do rezonance 61/4. Došlo k dramatickému poklesu hustoty ground tracks (porovnání na obr. 8a,b) a tím i k horšímu pokrytí globu měření ve směru zeměpisné délky. Když rezonance odezněla (žádné motory ke korekci dráhy), efekt zmizel (obr. 7). Vysvětlení bylo tudíž snadné [26] (v oboru dálkového průzkumu mělo značný ohlas i jako varování do budoucnosti a pro další družice).

Další rezonance, které ovlivňují kvalitu výsledků z GRACE, se dostávají postupně, jak se družice dál a dál volně propadají atmosférou (obr. 9). Nedá se s tím nic dělat, pokud družice neumí korigovat nebo udržovat výšku dráhy, zpracovatelé měření s tím musejí počítat (GRACE to neuměl, CHAMP a GOCE ano). Řešení pro variace po-



Obr. 8. Hustota průmětů dráhy na zemský povrch pro GRACE dostatečně daleko před rezonancí 61/4 (vlevo) a v ní (vpravo), v obou případech za interval 16ti dnů. V exaktní rezonanci 61/4 je hustota výrazně menší než dál (rozumí se aspoň půl roku) od ní (před ní i po ní). Převzato z [19].



Obr. 9. Maximální vzdálenost ground tracks pro GRACE jako funkce času a zeměpisné šířky. Převzato z [18].

tenciálu v období, kdy je UZD blízko některé rezonance β/α s malým β , by se mělo omezit v rozvoji potenciálu do stupně $L < \beta$ podle [26], resp. na $L < \beta$ pro $\beta - \alpha$ lichá a $L < \beta/2$ pro $\beta - \alpha$ sudá [27].

Vývojový graf pro GRACE zde nereprodukuje [19] a místo toho ukážeme veličinu související s hustotou průmětů dráhy a to v „3D“ pohledu pro určitý časový interval a různé zeměpisné šířky. Na obr. 9 jsou maximální vzdálenosti průmětů dráhy

GRACE od jejich vypuštění do r. 2013. Důležité rezonance nižších řádů (nejen 61/4) jsou označeny. Zajímavá je závislost na šířce; největší hustota průmětů dráhy závisí na dráze a konkrétní rezonanci a vůbec nemusí být největší na rovníku (ale třeba v nízkých zeměpisných šířkách kolem rovníku).

5. GOCE

5.1. Co byl GOCE

GOCE [správná výslovnost podle ESA je „*goče*“ vzhledem k tomu, že hlavním dodavatelem byla italská firma Thales Alenia Space, ale řada vědců na sever od Alp té družici stále říká „*gous*“] je akronym z Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer (více např. na <http://earth.esa.int/GOCE/>), viz obr. 10. Cílem experimentu bylo studium gravitačního pole Země a oceánských proudů. Může se zdát, že tato dvě témata spolu nesouvisejí, ale opak je pravdou. Přesná znalost jednoho podmiňuje přesnou znalost druhého. Předchozí mise družicové altimetrie nedokázaly odděleně studovat obojí. Průběh geoidu z měření z GOCE má být získán s přesností na 1–2 cm při rozlišení ~ 100 km na zemském povrchu.

GOCE (ESA) byl vypuštěn v r. 2009 na neobvykle nízkou, skoro kruhovou a skoro polární dráhu. Výběr dráhy byl zcela podstatný pro splnění cílů mise (kapitola 5.2). GOCE byl kompaktní útvar, tvarem připomínal doutník, délka byla asi 5 m, průměr 1 m, hmotnost 1050 kg. Nezbytné sluneční panely pokrývaly prakticky celou jednu stranu družice přivrácenou ke Slunci. GOCE „zvenku“ je na obr. 10, více např. v [8], [15], uvnitř na obr. 11. Hlavními přístroji byly gradientometr, umístěný v těžišti družice, a iontový motor s velmi jemným tahem. Gradientometr provádí měření a iontový motor zajišťuje, že výška letu družice pro měření vybraná je co nejpřesněji dodržována. Požadovala se chyba ve výšce nejvýše ± 50 m, dosaženo bylo fantastických ± 5 m.

Gradientometrie jako družicová metoda studia gravitačního pole Země byla známa a zvažována již dávno (např. [24]). Je pokračováním pozorování družic kamerami, laserovými dálkoměry, dopplerovskými aparaturami, metody sledování družice z družice a družicové altimetrie. Gradientometrie je na rozdíl od všech předchozích postupů poměrně přímočará cesta vedoucí ke zlepšení stávajících znalostí o gravitačním poli a tvaru Země. Na GOCE byl vůbec první takový přístroj na světě. Cesta od ideí k funkční družici a všemu, co s ní souvisí, je dlouhá; příprava trvá obvykle desetiletí, zde to bylo ještě déle (např. [8]).

Existují různé konstrukce gradientometru. GOCE měl gradientometr jako kombinaci mikroakcelerometrů, tři dvojice ve třech na sebe kolmých směrech. Mikroakcelerometry měří zrychlení a gradientometr sleduje změny zrychlení v příslušných směrech. Z nich lze vypočítat harmonické geopotenciální koeficienty (Stokesovy parametry) charakterizující gravitační pole dotyčného tělesa (např. [24], viz též odst. 2.2). To se také stalo a byly vypočteny nové modely gravitačního pole Země (za nejuvěžší a zatím nejlepší považujeme EIGEN 6C4 [9]).

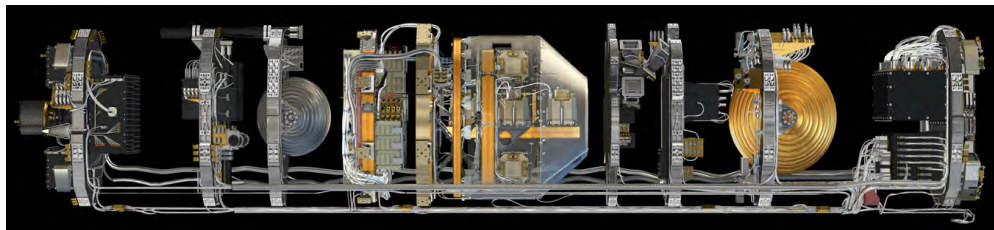
V průběhu doby (2009–2013) dodala družice obrovské množství gradientometrických dat. Měla jen jeden vážný výpadek a ten nesouvisel ani s gradientometrem, ani s iontovým motorem, ale s palubním počítačem. Problém byl zažehnán, ale data z období červenec až září 2010 byla ztracena.



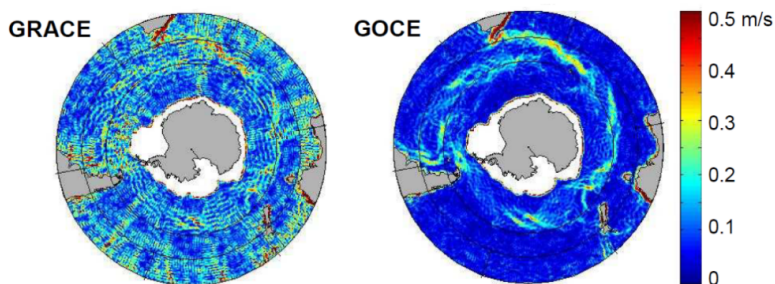
Obr. 10. Družice GOCE na oběžné dráze (malířova představa). Štíhlý, aerodynamický tvar pět metrů dlouhého tělesa družice bez obvyklých pohyblivých částí byl mezi družicemi unikátní. Proto byl GOCE nazván v tisku „ferrari“ mezi družicemi. © ESA/AOES Medialab.

Přínos GOCE pro určení parametrů gravitačního pole není ani tak v dosažení ještě vyšších stupňů a řádů v rozvoji potenciálu, to obstarávají především pozemská data, jako spíše ve zpřesnění stávajících parametrů a upřesnění těch, které si lze geometricky představit jako vlny o délce stovek až tisíce kilometrů. GOCE přinesl kosmická měření geopotenciálu pro oblasti, které jsou pro pozemní měření obtížně dostupné, jako jsou horská pásma nebo Antarktida.

Jak již víme, mise GRACE umožnila poprvé kosmickou detekci sezónních změn v gravitačním poli. Obrázek 6a ukazuje tyto variace pro měsíc říjen, kdy dosahují maxima (jedná se ale o pouhých několik milimetrů, měřeno převýšením geoidu). Na obr. 6b jsou tyto změny vypočtené z dat GOCE [4].



Obr. 11. GOCE uvnitř – pohled do útrob družice GOCE s gradientometrem v jejím těžišti a vybavením pro kalibraci gradientometru, přijímači GPS, hvězdnými kamerami, avionikou, tanky s palivem a dalším.



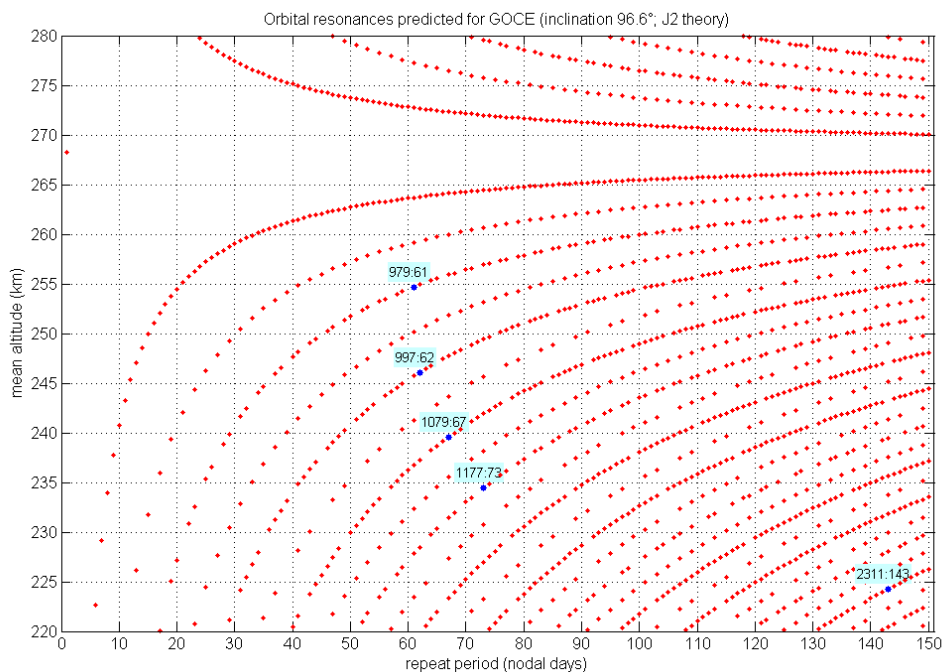
Obr. 12. Povrchové (geostrofické) oceánské proudy [m/s] vlevo podle GRACE, vpravo s daty z GOCE. Podle [22].

Pokud jde o oceánografickou aplikaci, ukazujeme na obr. 12 a,b povrchové oceánské proudy z GOCE v porovnání s výsledky z předchozích dat (podle [22]).

5.2. Výběr dráhy GOCE – jemně a precizně, jak nikdy před tím

GOCE byl vynesena na nízkou retrogradní a heliosynchronní dráhu. Počáteční výška letu byla asi 280 km. Retrogradní dráha znamená, že se družice pohybuje proti směru rotace Země, že rovina její dráhy kolem Země svírá s rovinou rovníku Země úhel větší než 90° (vzorec (6) platí beze změny). Heliosynchronizmus znamená, že rovina oběžné dráhy má stále stejný úhel vzhledem ke směru ke Slunci. Pro danou výšku musí být sklon 96.7° . V případě GOCE byla rovina dráhy zvolena kolmo na směr ke Slunci, takže strana GOCE pokrytá solárními panely byla prakticky stále ozářena Sluncem.

Kdybychom nechali družici z původní dráhy ve výšce 280 km, na kterou byla navedena, volně padat atmosférou, velmi rychle, v řádu týdnů by shořela v atmosféře. Proto měla iontový motor k udržování zvolené rezonanční dráhy. Rezanančních drah je, jak víme, teoreticky nekonečně mnoho a v hlavní poloose dráhy (přibližně řečeno ve výšce letu) se mohou lišit jen nepatrně, ale z hlediska výkonu iontového motoru bylo možné vybírat z drah v intervalu výšek 240–260 km (až na závěr mise) a s α předepsaným v projektu ESA (nejméně dva měsíce). Na obr. 13 vidíme možnosti výběru. ESA zvolila 979/61. Navrhovali jsme zkusit též dráhu s velmi dlouhou dobou α , a to až půl roku. Nakonec k podobné variantě došlo (jaro 2013), když už bylo jasné, že



Obr. 13. Jemné doladřování dráhy GOCE – nic než opětovné použití třetího Keplerova zákona. Po vypuštění byl GOCE naveden na dráhu ve výšce asi 280 km. Tečka vlevo nahoře u výšky asi 268 km patří rezonanční dráze $\beta/\alpha = 16/1$, které bylo radno se vyhnout. Výběr dráhy pro měření gradientometrem se uskutečnil ve výškách pod dráhou 16/1 s alespoň dvouměsíční periodou α (primární požadavek ESA). Nejdéle měřila družice GOCE v rezonanci 979/61 ve střední výšce 255 km. Ke konci životnosti GOCE byla provedena změna na extrémně nízkou dráhu ve výšce 224 km (rezonance 2311/143).

družice přeluhuje, funguje dál dobře a má dost paliva (díky opožděnému vypuštění mise byla nižší sluneční aktivita a tím nižší hustota atmosféry a tím nižší nároky na korekce dráhy). Poslední fáze letu proběhla v nízké hladině kolem 224 km a v rezonanci 2311/143, což jistě kladlo enormní nároky na iontový motor. Nicméně, čím níže Zemi (ale mimo ni!) měříme, tím lépe (přesněji a s větší rozlišovací schopností) můžeme její gravitační pole určit. I tato letová fáze úspěšně proběhla a přešla volně v zánik družice v atmosféře, když došlo palivo. Výsledky se zpracovávají.

Řízené jemné doladřování dráhy družice s cílem maximalizovat přesnost a rozlišovací schopnost gradientometrických výsledků – před deseti lety sci-fi, dnes (či spíše už včera) realita, které jsme se v rámci ESA aktivně účastnili [2], [3].

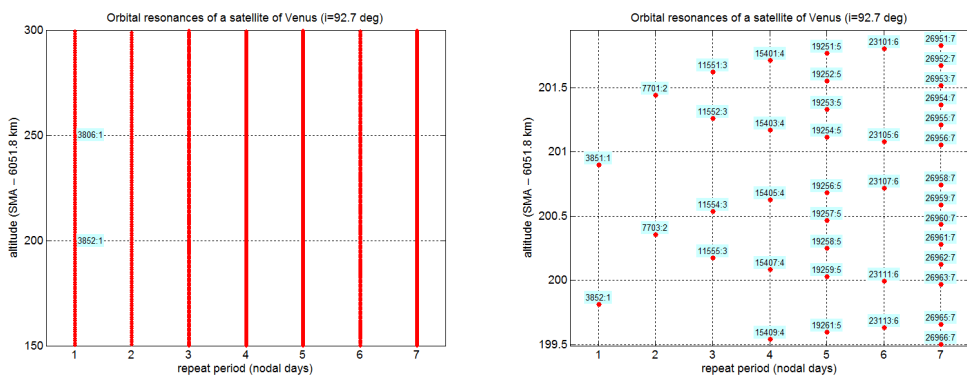
6. Orbitery planet

Co platí ohledně výběru optimální dráhy pro UDZ, nemůže neplatit pro družice (orbitery) ostatních těles sluneční soustavy. Základem pro výpočet rezonančních vývojových grafů je opět rovnice (6), avšak parametry těles je třeba vyměnit (tabulka 1). Výsledky přebíráme z naší práce [17].

těleso	GM (km^3s^{-2})	J_2 (10^{-6})	R (m)	\dot{S} (ot/den)
Země	398600.44	1082.627	6378137	1.00274
Měsíc	4902.80	203.428	1738140	0.03660
Merkur	22032.24	60	2439700	0.01705
Venuše	324858.36	5.97	6051800	-0.00411
Mars	42828.37	1959.2	3396190	0.97470

Tab. 1. Základní dynamické parametry Země, Měsíce a vybraných planet

Tak například Venuše je jen o málo menší než Země, ale liší se podstatně tím, že rotuje velmi pomalu (je méně zploštěná na pólech) a rotuje v opačném směru než ostatní tělesa v tabulce 1. Rezonance zde vypadá jinak než u Země. Bude zajímavé se podívat na rezonanční vývojové grafy jejich umělých družic (orbiterů) [17], obr. 14 a,b. Pro výšky orbiterů 200–300 km existují rezonance jen velmi vysokých řádů. Abychom viděli grafy podobné obr. 4 nebo 13, musíme vytvořit detail z obr. 14a pro velmi malý rozsah výšek letu. Zatímco pro Mars je třeba se vyhýbat rezonancím nízkých řádů, aby nenastal problém s rozlišením určovaného potenciálu jako u Země (viz pravidlo $L < \beta$, kapitola 4), u Venuše (stejně jako u Měsíce a Merkuru, viz [17]) to nehrozí. V nejnovějším řešení pro gravitační potenciál Venuše nebo Marsu [21] je rozvoj do stupně a řádu 180, resp. 90, zatímco řády v obr. 14 a,b jsou podstatně vyšší.



Obr. 14. Rezonanční vývojový graf pro polární orbiter Venuše, vpravo detail z obrázku vlevo. Převzato ze [17].

7. Závěr

Předvedli jsme použití třetího Keplerova zákona v dráhové dynamice UZ. Pro analytické vyšetřování hustoty průmětů drah na zemský povrch a pro tvorbu rezonančních vývojových grafů stačí zjednodušený gravitační potenciál Země (s členem C_{20} , reprezentujícím pólové zploštění planety) a tomu odpovídající Lagrangeovy planetární

pohybové rovnice pro keplerovské (eliptické) dráhové elementy UZ. Pro dráhové rezonance jsme pak dostali upravený střední denní pohyb, rovnici (6), která se dá použít v Keplerově zákoně (2). Na příkladech pro altimetrické družice a pro gravitační mise CHAMP a GRACE jsme ukázali, co vše nám rezonanční vývojové grafy dokáží říci. Předpoví, které rezonance v průběhu doby ve dráze dotyčné UZ nastanou (nikoli, kdy se tak stane). Máme-li raketové korekční motorky, můžeme zacílit na výběr rezonanční dráhy (například pro oceánologické aplikace altimetrických družic) anebo naopak vybírat dráhu tak, aby neprošla alespoň po většinu aktivního života družice rezonancí nízkého řádu, kde může nastat problém při rozlišení a přesnosti určených parametrů (nejen gravitačního pole); stalo se u GRACE v rezonanci 61/4. Zcela výjimečná je situace pro GOCE s gradientometrem a iontovým korekčním motorkem, který je díky svému malému, ale stálému tahu schopen udržovat družici na vybrané dráze s přesností až 5 m ve výšce. Pak lze vybrat jednu z řady rezonančních drah, málo se lišících výškou letu, ale podstatně hustotou subsatelitních bodů, optimální pro určování parametrů gravitačního pole. Řízené jemné doladování dráhy družice s cílem optimálního určení hledaných veličin z družicových měření je něco, co dříve nebylo možné.

L i t e r a t u r a

- [1] ALLAN, R. R.: *1973 Satellite resonance with longitude-dependent gravity-III, inclination changes for close satellites*. *Planet. Space Sci.* 21 (1973), 205–225.
- [2] BEZDĚK, A., KLOKOČNÍK, J., KOSTELECKÝ, J., FLOBERGHAGEN, R., GRUBER, C.: *Simulation of free fall and resonances in the GOCE mission*. *J. Geodynamics* 48 (2009), 47–53, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jog.2009.01.007>
- [3] BEZDĚK, A., KLOKOČNÍK, J., KOSTELECKÝ, J., FLOBERGHAGEN, R., SEBERA, J.: *Some aspects of the orbit selection for the measurement phases of GOCE*. *Proceedings of the ESA Living Planet Symposium, Bergen, Norway, 2010, ESA SP-686*.
- [4] BEZDĚK, A., SEBERA, J., KLOKOČNÍK, J., KOSTELECKÝ, J.: *Gravity field models from kinematic orbits of CHAMP, GRACE and GOCE satellites*. *Adv. Space Res.* 53 (2014), 412–429, <http://dx.doi.org/10.1016/j.asr.2013.11.031>
- [5] BURŠA, M., KARSKÝ, G., KOSTELECKÝ, J.: *Dynamika umělých družic v tíhovém poli Země*. *Academia*, 1993, 263.
- [6] FU, L. L., CAZENAVE, A.: *Satellite altimetry and Earth sciences*. *AP International Geophysics Series*, R. Dmowska et al. (eds) 69, AP, San Diego, 2001.
- [7] FERGUSONOVÁ, K.: *Tycho a Kepler*. *Academia*, Praha, 2009.
- [8] FLOBERGHAGEN, R., FEHRINGER, M., LAMARRE, D., MUZI, D., FROMMKNECHT, B., STEIGER, C., PINEIRO, J., DA COSTA, A.: *Mission design, operation and exploitation of the gravity field and steady-state ocean circulation explorer mission*. *J. Geodesy* 85 (2011), 749–758, doi: 10.1007/s00190-011-0498-3SATELLTE.
- [9] FÖRSTE, C., BRUINSMA, S., ABRIKOSOV, O., FLETCHNER, F., et al.: *EIGEN-6C4 – The latest combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 1949 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse*. *EGU General Assembly, 2014, EGU2014-3707*.
- [10] GOODING, R. H., WAGNER, C. A., KLOKOČNÍK, J., KOSTELECKÝ, J., REIGBER, C.: *CHAMP and resonances*. *Proceedings*, Springer, Berlin, 2005, 101–107.

- [11] HORSKÝ, Z.: *Kepler v Praze*. Mladá fronta, Praha, 1980.
- [12] KAULA, W. M.: *Theory of satellite geodesy*. Blaisdell, Waltham, MA, 1966.
- [13] KING-HELE, D. G., WALKER, D. M. C.: *Evaluation of 15th- and 30th-order geopotential harmonic coefficients from 26 resonant satellite orbits*. *Planet. Space Sci.* 37 (1989), 805–823, doi: 10.1016/0032-0633(89)90132-3.
- [14] KLOKOČNÍK, J.: *15th-order resonance of Interkosmos 11, analysis of the inclination*. *Bull. Astronom. Insts Czechoslovakia* 30 (1979), 214–219.
- [15] KLOKOČNÍK, J.: *Družice CHAMP, GRACE a GOCE*. *Vesmír* 88 (2009), 30–33, 36.
- [16] KLOKOČNÍK, J., BEZDĚK, A., KOSTELECKÝ, J.: *GNSS-R concept extended by a fine orbit tuning*. *Space Reflecto 2011, Interntl. Workshop on Reflectometry, Calais, France*. *Adv. Space Res.* 49 (2011), 957–965, doi: 10.1016/j.asr.2011.12.008.
- [17] KLOKOČNÍK, J., BEZDĚK, A., KOSTELECKÝ, J., SEBERA, J.: *Orbit tuning of planetary orbiters for accuracy gain in gravity-field mapping*. *J. Guidance Control Dynam.* 33 (3) (2010), 853–861, <http://dx.doi.org/10.2514/1.46223>
- [18] KLOKOČNÍK, J., GOODING, R. H., WAGNER, C. A., KOSTELECKÝ, J., BEZDĚK, A.: *The use of resonant orbits in satellite geodesy: a review*. *Surv. Geophysics* 34 (2013), 43–72, doi: 10.1007/s10712-012-9200-4.
- [19] KLOKOČNÍK, J., WAGNER, C. A., KOSTELECKÝ, J., BEZDĚK, A., NOVÁK, P., McADOO, D.: *Variations in the accuracy of gravity recovery due to ground track variability: GRACE, CHAMP, and GOCE*. *J. Geodesy* 82 (2008), 917–927, doi: 10.1007/s00190-008-0222-0.
- [20] MARTIN-NEIRA, M.: *A passive reflectometry and interferometry system (PARIS), application to ocean altimetry*. *ESA J.* 17 (1993) 331–355.
- [21] MARTY, J. C., BALMINO, G., DURON, J., ROSENBLATT, P., LE MAISTRE, S., RIVOLDINI, A., DEHANT, V., VAN HOOLST, T.: *Martian gravity field model and its time variations from MGS and Odyssey data*. *Planet. Space Sci.* 57 (2009), 350–363, doi: 10.1016/j.pss.2009.01.004.
- [22] PAIL, R., et al.: *Combination of GOCE data with complementary gravity field information*. *Proceedings of 4th International GOCE User Workshop*, 696, ESA Special Publ., 2011.
- [23] REIGBER, C., KLOKOČNÍK, J., LI, H., FLECHTNER, F.: *Contribution to ERS-1, Orbit Dossier, German PAF for ERS-1*. DGFJ Report. Munich, 1988.
- [24] RUMMEL, R.: *Satellite gradiometry*. *Lecture Notes in Earth Sciences* 7, Mathem. and Numer. Techn. in Phys. Geodesy, ed. H. Suenkel, Springer, Berlin, 1986, 317–363.
- [25] VANÝSEK, V.: *Základy astronomie a astrofyziky*. Academia, Praha, 1980.
- [26] WAGNER, C. A., McADOO, D., KLOKOČNÍK, J., KOSTELECKÝ, J.: *Degradation of geopotential recovery from short repeat-cycle orbits: application to GRACE monthly fields*. *J. Geodesy* 80 (2006), 94–103.
- [27] WEIGELT, M., SIDERIS, M. G., SNEEUW, N.: *On the influence of the ground tracks on the gravity field recovery from high-low satellite-to-satellite tracking missions: CHAMP monthly gravity field recovery using the energy balance approach revisited*. *J. Geodesy* 83 (2009), 1131–1143, doi: 10.1007/s00190-009-0330-5.