

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Oldřich Kowalski; Michal Křížek; Vojtěch Pravda  
Nejsymetričtější variety

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 59 (2014), No. 2, 135–145

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/143893>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2014

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

# Nejsymetričtější variety

Oldřich Kowalski, Michal Krížek, Vojtěch Pravda, Praha

## 1. Úvod

Neeukleidovské geometrie vznikly v první polovině 19. století během pokusů porozumět axiomatické výstavbě eukleidovské geometrie — zejména při dokazování nezávislosti pátého Eukleidova postulátu o rovnoběžkách [6], [9]. Mezi jejich zakladatele patří Carl Friedrich Gauss, Nikolaj I. Lobačevskij, János Bolyai, Bernhard Riemann, Sophus Lie, Felix Klein a mnozí další. Historie rozvoje neeukleidovských geometrií je podrobně popsána např. v [4]. Zabývat se jí ale nebudeme.

Pro přirozené číslo  $n \in \mathbb{N}$  označme  $n$ -rozměrný eukleidovský prostor s metrikou

$$\rho(A, B) = \|A - B\|, \quad A, B \in \mathbb{E}^n, \quad (1)$$

symbolem  $\mathbb{E}^n$ , kde  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_n$  je standardní eukleidovská norma.

Varieta patří mezi základní pojmy moderní matematiky [10]. Zjednodušeně řečeno,  $n$ -rozměrná varieta je topologický prostor<sup>1</sup>, který v dostatečně malém okolí každého svého bodu „vypadá“ jako eukleidovský prostor  $\mathbb{E}^n$ . Přesněji řečeno:  $n$ -rozměrná topologická varieta (nebo krátce jen  $n$ -rozměrná varieta) je separabilní<sup>2</sup> Hausdorffův prostor<sup>3</sup> takový, že pro každý její bod existuje otevřené okolí, které lze homeomorfně<sup>4</sup> zobrazit na otevřenou množinu v  $\mathbb{E}^n$ . Příkladem variety je graf paraboly, hyperboloid, povrch anuloidu, Lieova grupa aj. Na druhé straně, sjednocení nadroviny  $x_1 = 0$  a osy  $x_1$  v  $\mathbb{E}^n$  není varietou pro  $n > 1$ . Ani uzavřený poloprostor v  $\mathbb{E}^n$  nebo uzavřená koule varietou není (jsou to však typické příklady tzv. variet s okrajem).

V diferenciální geometrii hraje ústřední roli křivost. Tento termín má mnoho významů podle kontextu (Gaussova křivost, Gaussova–Kroneckerova křivost, geodetická křivost, hlavní křivost, normální křivost, Ricciho křivost, sekcionální křivost, skalární křivost, střední křivost, totální křivost aj.).

---

<sup>1</sup>Topologický prostor je množina  $X$  se systémem jejích podmnožin  $\mathcal{T}$  taková, že: 1.  $\emptyset \in \mathcal{T}$ ,  $X \in \mathcal{T}$ , 2. sjednocení libovolného (i nespočetného) počtu množin z  $\mathcal{T}$  leží v  $\mathcal{T}$ , 3. průnik konečného počtu množin z  $\mathcal{T}$  leží v  $\mathcal{T}$ .

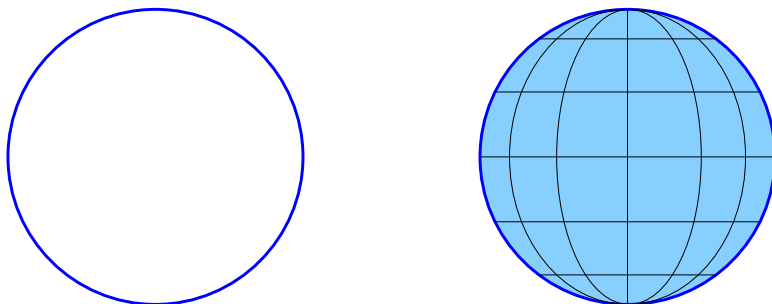
<sup>2</sup>Separabilní prostor obsahuje spočetnou hustou podmnožinu.

<sup>3</sup>V Hausdorffově prostoru existují pro každé dva různé body jejich disjunktní okolí.

<sup>4</sup>Homeomorfismus je spojitě vzájemně jednoznačné zobrazení, jehož inverze je také spojitá.

---

Prof. RNDr. OLDŘICH KOWALSKI, DrSc., Matematický ústav UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, prof. RNDr. MICHAL KRÍZEK, DrSc., Mgr. VOJTĚCH PRAVDA, Ph.D., Matematický ústav AV ČR, v.v.i., Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: oldrich.kowalski@mff.cuni.cz, {krizek,pravda}@math.cas.cz



Obr. 1. Jednotková kružnice vlevo je sféra  $S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ . Povrch jednotkové koule vpravo je sféra  $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ .

V tomto článku podáme přehled některých výsledků týkajících se těch nejsymetrickějších variet:  $\mathbb{E}^n$ , sféry  $S^n$  a pseudosféry  $\mathbb{H}^n$ , které mají po řadě v každém bodě a každém dvojsměru stejnou sekcionální křivost  $0$ ,  $n - 1$  a  $-(n - 1)$  (podrobnosti viz kap. 4).<sup>5</sup> Pomocí nich se v soudobé kosmologii modeluje vysoká homogenita a izotropie vesmíru na velkých prostorových škálách. Homogenita vyžaduje maximální translační symetrii, zatímco izotropie maximální rotační symetrii.

Precizní definice maximální symetrie variet potřebuje jistý technický aparát, který se opírá o Killingova vektorová pole (jinak též „infinitesimalní izometrie“). Často se pro stručnost hovoří o Killingových vektorech. Např. eukleidovský prostor  $\mathbb{E}^3$  má 6 lineárně nezávislých Killingových vektorových polí, z nichž 3 odpovídají posunutím a 3 rotacím prostoru  $\mathbb{E}^3$ . Variety se stejným počtem Killingových vektorových polí, jako má eukleidovský prostor, budeme nazývat maximálně symetrické. K této tematice se ještě vrátíme v kapitole 4.

## 2. Sféry

Pro přirozené číslo  $n$  definujme *sféru*  $S_r^n$  o poloměru  $r > 0$  vztahem

$$S_r^n = \{x \in \mathbb{E}^{n+1} \mid \|x\|_{n+1} = r\} \quad (2)$$

popisujícím  $n$ -rozměrný povrch  $(n + 1)$ -rozměrné koule. Pro jednotkovou sféru o poloměru  $r = 1$  budeme index  $r$  vynechávat a psát jen  $S^n$  (viz obr. 1). Pro  $n > 2$  se sférám někdy říká nadsféry.

V eukleidovském prostoru je nejkratší spojnicí dvou bodů úsečka. Nejkratšími spojnicemi dvou bodů na sféře  $S^n$  jsou oblouky hlavních kružnic. Geometrii na sférách se říká eliptická geometrie. Každé dvě různé hlavní kružnice na sféře  $S^n$  (tj. přímky v eliptické geometrii) se protínají ve dvou protilehlých bodech. Proto v eliptické geometrii neexistují rovnoběžky. Trojúhelník, jehož strany jsou oblouky hlavních kružnic, má součet úhlů větší než  $180^\circ$ . Např. trojúhelník, který vznikne průnikem sféry  $S^2$  a oktantu v  $\mathbb{E}^3$ , má součet úhlů  $270^\circ$ .

<sup>5</sup>Odhlédneme-li od globální topologie, tak (lokálně) jediné maximálně symetrické variety jsou  $\mathbb{E}^n$ ,  $S^n$  a  $\mathbb{H}^n$  (viz např. [5], kap. 3.9)

Kružnice o poloměru  $R \in (0, \pi)$  na sféře  $\mathbb{S}^n$  má obvod menší než  $2\pi R$ , protože poloměr kružnice měříme délkou oblouku hlavní kružnice v  $\mathbb{S}^n$ . Z pravé části obr. 1 je patrné, že rovník má délku  $2\pi$  pro poloměr  $R = \pi/2$  měřený ve směru poledníků sféry  $\mathbb{S}^2$ . Také plocha kruhu na  $\mathbb{S}^2$ , objem koule v  $\mathbb{S}^3$ , ... jsou menší než  $\pi R^2$ ,  $4\pi R^3/3$ , ..., viz [11], s. 183. Standardní vzorce známé z eukleidovské geometrie tedy na sféře  $\mathbb{S}^n$  neplatí.

Funkce  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{E}^1$  se nazývá *metrika*<sup>6</sup> (*vzdálenost*) na varietě  $M$ , jestliže platí:

1.  $d(A, B) \geq 0 \quad \forall A, B \in M$ ,
2.  $d(A, B) = 0 \iff A = B$ ,
3.  $d(A, B) = d(B, A) \quad \forall A, B \in M$ ,
4.  $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B) \quad \forall A, B, C \in M$  (trojúhelníková nerovnost).

*Izometrií* budeme rozumět homeomorfismus  $f : M \rightarrow M$  zachovávající na varietě  $M$  vzdálenosti, tj.  $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$  pro všechna  $A, B \in M$ , kde  $d$  je metrika na  $M$ .

Na sféře  $\mathbb{S}^n$  je vzdálenost  $d$  délka nejkratšího oblouku hlavní kružnice spojující  $A$  a  $B$ . Kulovou plochu  $\mathbb{S}^2$  nelze izometricky rozvinout do roviny  $\mathbb{E}^2$ . Sféra  $\mathbb{S}^n$  je však přímo z definice částí eukleidovského prostoru  $\mathbb{E}^{n+1}$  o jednu dimenzi většího. Podívejme se nyní, jak lze do sebe vkládat sféry.

*Vložení* (angl. embedding) je hladké<sup>7</sup> zobrazení  $f$  variety  $M$  do variety  $N$ , jehož obraz  $f(M)$  s indukovanou topologií z  $N$  je homeomorfní s varietou  $M$ .

**Věta.** Pro  $r \leq R$  lze sféru  $\mathbb{S}_r^n$  izometricky vložit do  $\mathbb{S}_R^{n+1}$ .

Důkaz je konstruktivní, ale předvádět jej nebudeme, i když je snadný. Například na obr. 1 vpravo jsou dvě kružnice odpovídající rovnoběžkám  $\pm 60^\circ$  izometricky vloženy do dvojrozměrné sféry  $\mathbb{S}^2$ . Každou sféru lze tedy izometricky vložit do větší sféry, pokud zvýšíme dimenzi o jedničku. Platí ale zcela neočekávané tvrzení, viz [3], s. 33. Každou sféru lze izometricky zdeformovat<sup>8</sup> tak, že se vejde do libovolně malé sféry dostatečně vysoké dimenze.

**Věta.** Sféru  $\mathbb{S}_r^n$  lze izometricky vložit do  $\mathbb{S}_r^{3n+2}$ .

Tvrzení věty je překvapivé, je-li  $r < R$  (pro  $r \geq R$  okamžitě plyne indukci z první věty). Například sféru  $\mathbb{S}^2$  lze izometricky vložit do sféry  $\mathbb{S}_r^8$  s libovolně malým poloměrem  $r > 0$ . Pro každé přirozené číslo  $n$  lze dimenzi  $3n + 2$  v předchozí větě ještě snížit, ale poloměr menší sféry už nebude libovolný.

**Věta.** Pro každé  $n \in \mathbb{N}$  existuje  $r < 1$  tak, že  $\mathbb{S}^n$  lze izometricky vložit do  $\mathbb{S}_r^{2n+1}$ .

<sup>6</sup>Zde existuje určitá nejednoznačnost v názvosloví. Na riemannovské varietě se obvykle zavádí Riemannova metrika (často též zkráceně nazývaná metrika). Riemannova metrika na varietě je definována tak, že ke každým dvěma tečným vektorům v témže bodě je přiřazen jejich skalární součin. Vzdálenost dvou bodů na varietě s Riemannovou metrikou je rovna infimu délek všech křivek spojujících tyto dva body a je vyjádřena jistým integrálním vzorcem (viz [10], s. 71). V klasické diferenciální geometrii se někdy Riemannova metrika zavádí jako vzdálenost dostatečně blízkých bodů, což je výhodné i při různých elementárních výpočtech (viz kap. 4).

<sup>7</sup>V této práci budeme uvažovat pouze hladká vložení.

<sup>8</sup>Např. plášť balónu lze izometricky promáčknot dovnitř.

Izometrie v důkazech předchozích dvou vět můžeme navíc volit hladké. Není známo, zda lze  $S^n$  izometricky vložit do  $S_r^{2n}$  pro nějaké  $r < 1$ . Pouze v případě  $n = 1$  umíme jednotkovou kružnici  $S^1$  izometricky hladce zdeformovat tak, že je vložena do libovolně malé sféry  $S_r^2$ .

**Věta.** Pro  $r < 1$  neexistuje izometrické vložení sféry  $S^n$  do  $S_r^{2n-1}$ .

Důkaz plyne z Moorovy věty [14]. Tvrzení předchozích vět lze zesílit, pokud místo vložení budeme uvažovat vnoření.

Zobrazení  $f$  se nazývá<sup>9</sup> *vnoření* (angl. immersion), pokud pro každý bod  $p \in M$  existuje okolí  $U_p$  takové, že restrikce zobrazení  $f$  na  $U_p$  je vložení do  $N$ .

Vložení je silnější pojem než vnoření, jehož obraz může protínat sám sebe. Známou Kleinovu láhev (tj. dvojrozměrnou neorientovatelnou uzavřenou plochu) lze vložit do  $\mathbb{E}^4$ , ale nelze ji vložit do  $\mathbb{E}^3$ . Na druhé straně ji lze vnořit do  $\mathbb{E}^3$ , kde se tato plocha protíná.<sup>10</sup>

**Věta.** Sféru  $S_R^n$  lze izometricky vnořit do  $S_r^{n+1}$ .

Tvrzení věty je opět překvapivé pro  $r < R$ .

### 3. Pseudosféry

V této kapitole se budeme věnovat Lobačevského hyperbolické geometrii na pseudosférách. Představit si hyperbolickou geometrii je mnohem obtížnější než eliptickou geometrii na sférách. Hlavním důvodem je, že hyperbolické variety nelze na rozdíl od sfér izometricky vložit do eukleidovských prostorů o jednu dimenzi vyšší.

Začneme proto jednoduchým modelem hyperbolické roviny uvnitř hraniční kružnice  $k$  o poloměru 1, jež do hyperbolické roviny nepatří (viz obr. 2). Nejkratší spojnice dvou bodů (tj. přímky hyperbolické geometrie) jsou podobně jako v kap. 2 reprezentovány kruhovými oblouky, jejichž konce jsou navíc kolmé ke  $k$ . Přitom oblouky mohou degenerovat na úsečky (viz vyznačený průměr na obr. 2 vpravo). Dvěma různými body  $A$  a  $B$  prochází právě jeden kruhový oblouk, který je ve svých limitních koncových bodech  $P \in k$  a  $Q \in k$  kolmý na  $k$ . Vzdálenost dvou bodů  $A$  a  $B$  je pak dána vztahem (viz [15], s. 36)

$$d(A, B) = \left| \ln \frac{AQ \cdot BP}{AP \cdot BQ} \right|, \quad (3)$$

kde  $\ln$  je přirozený logaritmus a  $AP$ ,  $AQ$ ,  $BP$  a  $BQ$  označují standardní eukleidovské vzdálenosti v rovině.

Není těžké ověřit, že  $d$  je metrika. Vidíme, že  $d$  je nezáporná funkce a že  $d(A, B) = 0$  právě tehdy, když  $A = B$ . Symetrie  $d(A, B) = d(B, A)$  je zřejmá. Dokázat trojúhelníkovou nerovnost  $d(A, B) \leq d(A, C) + d(B, C)$  je ale technicky náročnější.

V hyperbolické rovině je součet úhlů v trojúhelníku menší než  $180^\circ$  (viz obr. 2). Kružnice o poloměru  $R$  v metrice (3) má poloměr větší než  $2\pi R$ . Protože je hraniční

<sup>9</sup>Definici lze ekvivalentně formulovat také takto: Zobrazení  $f : M \rightarrow N$  se nazývá *vnoření*, jestliže diferenciál  $(Df)_p$ , který je lineárním zobrazením z tečného prostoru  $M_p$  do tečného prostoru  $N_{f(p)}$ , je prosté zobrazení pro každý bod  $p \in M$ .

<sup>10</sup>V bodech, kde plocha protíná sama sebe, neexistuje otevřené okolí obrazu, které je homeomorfní s otevřeným kruhem v  $\mathbb{E}^2$ .

kružnice  $k$  jednotková v eukleidovské metrice (1), pak soustředná kružnice  $k'$  o poloměru  $R' = 1$  v hyperbolické metrice (3) má délku 7.384... místo obvyklých  $2\pi = 6.283...$  (viz obr. 2).<sup>11</sup> Je to podobné měření délky kružnice nakreslené na ploše kolem sedlového bodu. Délka libovolné jednotkové kružnice v hyperbolické rovině je vždy stejná v metrice (3).

Křivka v hyperbolické rovině s konstantní vzdáleností od hyperbolické přímky není hyperbolická přímka, viz [4], s. 88. Poznamenejme, že existují i jiné reprezentace hyperbolické roviny (viz např. [15], s. 38).

V roce 1901 David Hilbert dokázal,<sup>12</sup> že neexistuje izometrické vložení hyperbolické roviny  $\mathbb{H}^2$  do trojrozměrného prostoru  $\mathbb{E}^3$  (viz [8]), zatímco sféru  $\mathbb{S}^2$  takto vložit do  $\mathbb{E}^3$  lze. Proto je obtížné si udělat intuitivní představu o nejsymetričtějším hyperbolických varietách  $\mathbb{H}^n$ .

Pro  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{E}^n$  označme *skalární součin*

$$(a, b) = \sum_{j=1}^n a_j b_j$$

a nechť  $\|a\| = \sqrt{(a, a)}$ . Hyperbolická geometrie se často modeluje varietou (viz obr. 3 pro  $n = 2$ )

$$\mathbb{H}_r^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{E}^{n+1} \mid \|x\|^2 - x_{n+1}^2 = -r^2\}, \quad (4)$$

kde  $r > 0$  a místo eukleidovské metriky v  $\mathbb{E}^{n+1}$  se uvažuje Minkowského metrika

$$\mu(A, B) = (\|a - b\|^2 - (a_{n+1} - b_{n+1})^2)^{1/2} \quad (5)$$

pro  $A = (a_1, \dots, a_{n+1})$ ,  $B = (b_1, \dots, b_{n+1}) \in \mathbb{H}_r^n$ . I když vztah (4) obsahuje rozdíl čtverců, funkce  $\mu$  je nezáporná, jak bude patrné z následující věty. Zdůrazněme, že souřadnice  $x_{n+1}$  **není čas**, jak je běžné v teorii relativity (srov. [17], s. 95), ale obyčejná prostorová souřadnice. Varieta  $\mathbb{H}_r^n$  není souvislá. Skládá se ze dvou zrcadlově symetrických nadploch, které pro jednoduchost ztotožníme předpisem  $x \equiv -x \in \mathbb{H}_r^n$ , abychom se mohli zabývat jen tou komponentou, pro niž  $x_{n+1} > 0$ . Opět budeme psát jen  $\mathbb{H}^n$ , pokud  $r = 1$ .

**Věta.** *Funkce  $\mu$  je metrika na  $\mathbb{H}^n$ .*

*Důkaz.* Nejprve ověříme, že pro  $A, B \in \mathbb{H}^n$  je hodnota  $\mu(A, B)$  nezáporná. Z (5) dostaneme

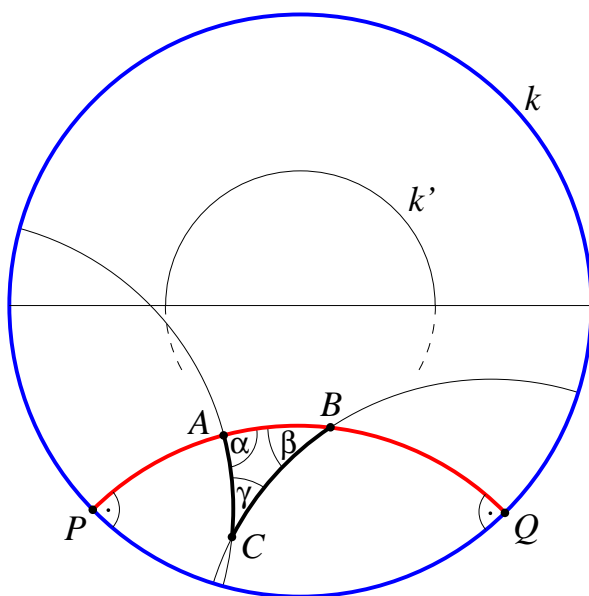
$$\begin{aligned} (\mu(A, B))^2 &= \|a\|^2 - 2(a, b) + \|b\|^2 - a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}b_{n+1} - b_{n+1}^2 \\ &= 2(a_{n+1}b_{n+1} - (a, b) - 1), \end{aligned} \quad (6)$$

kde jsme podle (4) využili toho, že

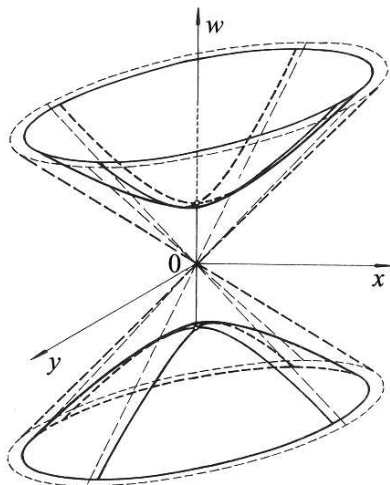
$$a_{n+1}^2 = \|a\|^2 + 1 \quad \text{a} \quad b_{n+1}^2 = \|b\|^2 + 1. \quad (7)$$

<sup>11</sup>Z (3) plyne, že kružnice  $k'$  má v eukleidovské metrice poloměr  $R' = (e - 1)/(e + 1) = 0.462\dots$ , kde  $e = 2.718\dots$  je Eulerovo číslo.

<sup>12</sup>D. Hilbert vlastně dokázal, že v  $\mathbb{E}^3$  neexistuje úplná hladká plocha s konstantní zápornou Gaussovou křivostí (srov. obr. 4).



Obr. 2. Všechny ryby na Escherově obrazu hyperbolické roviny mají v metrice (3) shodnou velikost. Obrazně řečeno, pokud byste v hyperbolické rovině plavali, ryby ve vašem bezprostředním okolí se vám budou jevit stále stejně velké. Můžete plavat libovolným směrem libovolně daleko, protože hraniční kružnice  $k$  je nekonečně vzdálená. Na dolním obrázku jsou znázorněny nejkratší spojnice reprezentované kruhovými oblouky, které jsou v koncových bodech kolmé k hraniční kružnici  $k$ . Součet úhlů v trojúhelníku  $ABC$  je  $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$ .



Obr. 3. Dvojdílný hyperboloid  $x^2 + y^2 - w^2 = -1$ . V teorii relativity se kuželová plocha  $x^2 + y^2 = w^2$  nazývá *světelný kužel* pro jednotkovou rychlost světla, je-li  $w$  čas. Je to množina bodů  $A$ , pro něž  $\mu(A, 0) = 0$ .

Čili

$$a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 = (\|a\|^2 + 1)(\|b\|^2 + 1) = (\|a\|\|b\| + 1)^2 + (\|a\| - \|b\|)^2. \quad (8)$$

Odtud a z Cauchyovy–Schwarzovy nerovnosti  $|(a, b)| \leq \|a\|\|b\|$  pro kladná  $a_{n+1}$  a  $b_{n+1}$  vyplývá, že

$$a_{n+1} b_{n+1} \geq \|a\|\|b\| + 1 \geq (a, b) + 1. \quad (9)$$

Vidíme, že pravá strana v (6) je nezáporná, a tak je odmocnina v (5) nezáporná.

Dále ukážeme, že  $\mu(A, B) = 0$  právě tehdy, když  $A = B$ . Je-li  $\mu(A, B) = 0$ , pak pomocí (6) obdržíme

$$(a, b) + 1 = a_{n+1} b_{n+1}.$$

Podle (9) tedy platí rovnost

$$a_{n+1} b_{n+1} = \|a\|\|b\| + 1.$$

Odtud a z (8) plyne, že  $\|a\| = \|b\|$ , a podle (7) máme  $a_{n+1} = b_{n+1} > 0$ . Z definice metriky (5) je tak patrné, že  $a = b$ , což dává  $A = B$ .

Z (5) okamžitě odvodíme i obrácenou implikaci, tj. platí  $\mu(A, A) = 0$ . Symetrie  $\mu(A, B) = \mu(B, A)$  je evidentní a důkaz trojúhelníkové nerovnosti probíhá standardním způsobem pomocí vztahů (6) až (9).  $\square$

Funkci  $\mu$  lze vztahem (5) přirozeně rozšířit i dovnitř kužele  $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq x_{n+1}^2$  (srov. obr. 3), kde ale již není metrikou. Hodnota  $\mu(A, B)$  totiž může být nulová pro  $A \neq B$  a neplatí zde běžná trojúhelníková nerovnost. Pro některé trojice bodů platí dokonce obrácená trojúhelníková nerovnost<sup>13</sup>

$$\mu(A, B) \geq \mu(A, C) + \mu(B, C)$$

<sup>13</sup>S ostrou obrácenou trojúhelníkovou nerovností souvisí známý paradox dvojčat [15].



(viz [15], s. 420), takže se takto rozšířené funkci často říká jen *Minkowského pseudometrika*.

Obě komponenty  $\mathbb{H}^n$  jsou grafem konvexní (resp. konkávní) funkce v  $\mathbb{E}^{n+1}$ . Přesto je ale na modelu pseudosféry  $\mathbb{H}^n$  součet úhlů v trojúhelníku, jehož strany jsou nejkratší spojnice v Minkowského metrice (5), menší než  $180^\circ$ . Důkaz je uveden v [4], s. 88.

V práci [4], s. 69–73, se uvádí šest reprezentací  $\mathbb{H}^n$  ilustrujících, jak hyperbolickou metriku modelovat. Asi nejznámější je Poincarého disk (viz též [7], s. 475–476).

Řezy variety  $\mathbb{H}_r^n$  nadrovinami  $x_{n+1} = C$ , kde  $C$  je konstanta a  $|C| > r$ , jsou sféry dimenze  $n - 1$ . Pro pseudosféry platí podobná věta jako pro sféry.

**Věta.** Pro  $r \leq R$  lze pseudosféru  $\mathbb{H}_r^n$  izometricky vložit do  $\mathbb{H}_R^{n+1}$ .

Ukažme si, jaké vztahy platí mezi eukleidovským prostorem<sup>14</sup> a pseudosférou (viz [3], s. 3).

**Věta.** Prostor  $\mathbb{E}^n$  lze izometricky vložit do  $\mathbb{H}^{n+1}$ .

Opačná izometrická vložení ale nejsou tak jednoduchá. V roce 1955 Danilo Blanuša dokázal [1], že hyperbolickou rovinu  $\mathbb{H}^2$  lze izometricky vložit do prostoru  $\mathbb{E}^6$  (srov. též [2]). Není známo, zda lze dimenzi 6 snížit. Blanušovo tvrzení zobecnil David Brander [3] takto:

**Věta.** Pro  $n > 1$  lze pseudosféru  $\mathbb{H}^n$  izometricky vložit do prostoru  $\mathbb{E}^{6n-6}$ .

Opět není známo, zda lze dimenzi  $6n - 6$  snížit. Varietu  $\mathbb{H}^3$ , která eventuálně modeluje náš vesmír pro pevný čas, lze tedy izometricky vložit do eukleidovského prostoru  $\mathbb{E}^{12}$ .

Jestliže místo vložení budeme uvažovat vnoření, lze opět dimenzi zredukovat.

**Věta.** Pro  $n > 1$  lze pseudosféru  $\mathbb{H}^n$  izometricky vnořit do prostoru  $\mathbb{E}^{4n-3}$ .

#### 4. Vnitřní a vnější křivosti

Jak jsme viděli v předchozích kapitolách, v křivém prostoru, např. na sféře, neplatí zákony eukleidovské geometrie. Tedy součet úhlů v trojúhelníku se liší od  $180^\circ$  a obvod kružnice o poloměru  $r$  se liší od  $2\pi r$ . Představme si nyní dvojrozměrné bytosti žijící na nějaké dvojrozměrné ploše. Vnitřní křivostí plochy budeme nazývat takovou křivost, kterou mohou naše dvojrozměrné bytosti pozorovat, aniž by opustili svůj dvojrozměrný svět. Mohou tak například v okolí každého bodu měřit obvody kružnic  $C(r)$ , jejich poloměry  $r$  a zavést *Gaussovu křivost*  $K$  vztahem

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{6}{r^2} \left( 1 - \frac{C(r)}{2\pi r} \right).$$

Veličina  $K$  vyjadřuje vnitřní křivost plochy v bodě a obecně může mít v různých bodech plochy různou hodnotu.

Představme si, že v eukleidovské rovině narýsujeme několik trojúhelníků a kružnic. Pokreslenou část plochy poté vystříhneme a slepíme do tvaru válce. Vzdálenosti ani úhly se při této operaci nezmění od původních eukleidovských hodnot a je tedy zřejmé, že válec má nulovou vnitřní křivost  $K$ . Na druhou stranu, my jako trojrozměrné bytosti vidíme, že jakousi křivost (tzv. vnější křivost) válcová plocha také má.

<sup>14</sup>Pro  $n = 1$  lze  $\mathbb{E}^1$  izometricky vložit do  $\mathbb{H}^1$  a naopak. Netriviální hyperbolické geometrie jsou tak jen v dimenzích  $n > 1$ .

Uvažujme hladkou dvojrozměrnou plochu  $P$  v  $\mathbb{E}^3$  a zkoumejme její chování v okolí bodu  $p \in P$ . Kartézské souřadnice v  $\mathbb{E}^3$  si zavedme tak, aby počátek byl v bodě  $p$  a tečná rovina k  $P$  v bodě  $p$  měla rovnici  $z = 0$ . V nejbližším okolí pak můžeme plochu  $P$  místo vztahu  $z = z(x, y)$  vyjádřit Taylorovým rozvojem jako

$$z \approx \frac{1}{2} \alpha x^2 + \gamma xy + \frac{1}{2} \beta y^2,$$

kde  $\alpha = \partial^2 z / \partial x^2$  atd. Pro vzdálenost  $\Delta$  dvou dostatečně blízkých bodů  $(x, y, z)$  a  $(x + dx, y + dy, z + dz)$  na ploše  $P$  pak platí

$$\Delta^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \approx dx^2 + dy^2 + [(\alpha x + \gamma y)dx + (\beta y + \gamma x)dy]^2.$$

Při volbě kartézských souřadnic můžeme ještě využít libovolné rotace  $\mathcal{R}$  v rovině  $x, y$ . Při této rotaci se matice

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}$$

transformuje jako

$$Q' = \mathcal{R}^{-1} Q \mathcal{R}.$$

Pro nás jsou podstatné vlastnosti matice  $Q$  nezávislé na rotaci v rovině  $x, y$ . To jsou zřejmě vlastní čísla  $\lambda, \mu$  matice  $Q$  a jejich kombinace, jako stopa a determinant. Gaussovu křivost  $K$  a střední křivost  $H$  můžeme pomocí matice  $Q$  vyjádřit jako

$$K = \det Q = \lambda \mu = \alpha \beta - \gamma^2,$$

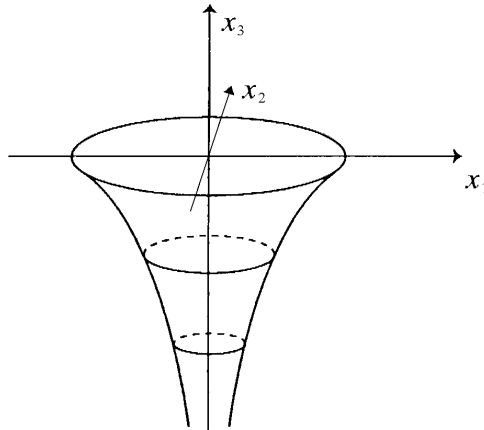
$$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} Q = \frac{1}{2} (\lambda + \mu) = \frac{1}{2} (\alpha + \beta).$$

Jak jsme již uvedli, Gaussova křivost  $K$  vyjadřuje vnitřní křivost. Střední křivost  $H$  naopak vyjadřuje vnější křivost plochy. Názorné příklady jsou sféra a válec. Pro sféru  $\mathbb{S}_r^2$  o poloměru  $r$  dostáváme při vhodné volbě souřadnic  $\alpha = \beta = r^{-1}$  a  $\gamma = 0$ , a proto  $K = H^2 = r^{-2}$ . Pro válec platí  $\alpha = r^{-1}$ ,  $\beta = \gamma = 0$ , a tedy  $K = 0$ ,  $H = r^{-1}/2$ .

Při popisu vnitřní křivosti vícerozměrné variety v určitém bodě pochopitelně, na rozdíl od plochy, nestačí jen jeden údaj. Ve vyšších dimenzích je vnitřní křivost variety popsána pomocí tzv. sekcionální křivosti. Sekcionální křivost variety v bodě  $p$  je funkcí dvou tečných lineárně nezávislých vektorů  $v$  a  $w$  (neboli dvojsměru  $(v, w)$ ) a vyjadřuje Gaussovu křivost jisté dvojrozměrné podvariety s tečnými vektory  $v$  a  $w$ . Ekvivalentně lze vnitřní křivost popsat pomocí Riemannova tenzoru, který má v  $n$  dimenzích obecně  $n^2(n^2 - 1)/12$  nezávislých komponent.

Vraťme se ještě k sekcionální křivosti z hlediska Killingových vektorových polí definujících spojitě symetrie (izometrie) variet. V eukleidovském prostoru dimenze  $n$  existuje celkem  $n(n + 1)/2$  Killingových vektorových polí. Z toho jich  $n$  odpovídá translacím a  $n(n - 1)/2$  rotacím. Na obecné varietě dimenze  $n$  je počet nezávislých Killingových vektorových polí vždy menší nebo roven výše uvedené hodnotě  $n(n + 1)/2$ . Pokud je dosaženo hodnoty  $n(n + 1)/2$ , hovoříme o varietách s maximální grupou symetrií. Tyto variety jsou homogenní a izotropní a jejich sekcionální křivost je ve všech bodech a ve všech dvojsměrech stejná. V libovolné dimenzi (viz [17]) lze v tomto případě vyjádřit všechny komponenty Riemannova tenzoru  $R_{abcd}$  pomocí metriky  $g_{ab}$  a konstantní skalární křivosti  $R$  vztahem (viz [5], s. 141)

$$R_{abcd} = \frac{R}{n(n - 1)} (g_{ab}g_{cd} - g_{ad}g_{bc}).$$



Obr. 4. Část pseudosféry – ve všech bodech má konstantní zápornou Gaussovu křivost  $-1$ . Horní kružnicová hrana do ní nepatří.

Na obr. 4 je znázorněna část pseudosféry vzniklé rotací křivky traktrix (tzv. vlečné křivky nebo evolventy řetězovky). Tato plocha je dvojrozměrná otevřená varieta, která má lokálně maximální počet Killingových vektorových polí. Dvě z nich odpovídají posunutím a jedno rotaci. Gaussova křivost je tedy konstantní.

## 5. Závěr

Uvedli jsme, že křivost variet můžeme rozdělit na vnitřní a vnější. Vnitřní křivostí je např. Gaussova křivost a sekcionální křivost, vnější křivostí je např. střední křivost. Hlavním tématem tohoto článku jsou variety s maximální grupou symetrií —  $\mathbb{E}^n$ ,  $\mathbb{S}^n$  a  $\mathbb{H}^n$ . Lze ukázat, že tyto variety mají konstantní vnitřní křivost, přesněji řečeno, ve všech bodech a všech dvojsměrech mají konstantní sekcionální křivost. Z pohledu  $n$ -rozměrného obyvatele taková varieta nemá žádné význačné body ani směry. Proto se variety s maximální grupou symetrií používají v kosmologii, kde většina modelů stojí na předpokladu, že vesmír je v pevném čase a na dostatečně velkých škálách homogenní a izotropní a jeho geometrie je tedy lokálně modelována pomocí  $\mathbb{E}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$  či  $\mathbb{H}^3$ .

Dvojrozměrné variety  $\mathbb{E}^2$ ,  $\mathbb{S}^2$  si můžeme snadno představit, vizualizace celé variety  $\mathbb{H}^2$  je však dosti obtížná. Zatímco sféru  $\mathbb{S}^2$  můžeme izometricky vložit do  $\mathbb{E}^3$ , pseudosféru  $\mathbb{H}^2$  nikoliv. Podle vět z kap. 3 lze  $\mathbb{H}^2$  izometricky vložit do eukleidovského prostoru  $\mathbb{E}^6$  a doposud není známo, zda lze tuto dimenzi snížit. Poznamenejme však, že část  $\mathbb{H}^2$  do  $\mathbb{E}^3$  izometricky vložit lze (viz obr. 4). Plocha na obr. 4 má zápornou konstantní Gaussovu křivost, a jak věděl již Christian Huygens v roce 1639 (viz [12], s. 324), má konečný povrch i objem. S využitím vnějších křivostí vidíme, že každý její bod je sedlový, tj. má v každém bodě dvě hlavní křivosti s opačnými znaménky. To ovšem nic nemění na tom, že ve vnitřní geometrii je to stále plocha s konstantní zápornou Gaussovou křivostí. Přehled variet s konstantní zápornou křivostí je podán v [13].

**Poděkování.** Autoři děkují doc. RNDr. Františku Katrnoškovi, CSc., RNDr. Martinu Marklovi, DrSc., a doc. RNDr. Jiřímu Vanžurovi, CSc., za cenné podněty a připomínky. Článek byl podpořen výzkumným záměrem MSM 0021620839, granty GA ČR 14-024768, P101/14-020675, 13-10042S a RVO 67985840.

## L i t e r a t u r a

- [1] BLANUŠA, D.: *Über die Einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume*. Monatsh. Math. 59 (1955), 217–229.
- [2] BLANUŠA, D.: *Isometric imbedding of the hyperbolic  $n$ -space in a spherical  $(6n-4)$ -space*. Period. Math.-Phys. Astronom. II Ser. 19 (1964), 53–61.
- [3] BRANDER, D.: *Isometric embeddings between space forms*. Master Thesis. Univ. of Pennsylvania, 2003, 1–48.
- [4] CANNON, J. W., FLOYD, W. J., KENYON, R., PARRY, W. R.: *Hyperbolic geometry*. In: *Flavors of Geometry*, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 31, Cambridge Univ. Press, 1997, 59–115.
- [5] CARROLL, S. M.: *An introduction to general relativity. Spacetime and geometry*. Addison Wesley, San Francisco, 2004.
- [6] EUCLID: *The thirteen books of Euclid's elements*. Cambridge Univ. Press, 1926; Dover, New York, 1956.
- [7] GRIFFITHS, J. B., PODOLSKÝ, J.: *Exact space-times in Einstein's general relativity*. Cambridge Univ. Press, 2009.
- [8] HILBERT, D.: *Über Flächen von constanter gausscher Krümmung*. Trans. Amer. Math. Soc. 2 (1901), 87–99.
- [9] HLAVATÝ, V.: *Úvod do neeuklidovské geometrie*. JČSMF, Praha, 1926.
- [10] KOWALSKI, O.: *Úvod do Riemannovy geometrie*. Univerzita Karlova, Praha, 1995.
- [11] KOWALSKI, O., KRÍŽEK, M.: *Abelova cena v roce 2009 udělena Michailu Gromovovi*. PMFA 54 (2009), 177–187.
- [12] MANGASARIAN, O. L., PANG, J.-S.: *Computational optimization: a tribute to Olvi Mangasarian, vol. 1*. Springer, 1999.
- [13] McLACHLAN, R.: *A gallery of constant-negative-curvature surfaces*. Math. Intelligencer 16 (1994), 31–37.
- [14] MOORE, J. D.: *Isometric immersions of space forms in space forms*. Pacific J. Math. 40 (1972), 157–166.
- [15] PENROSE, R.: *The road to reality*. Vintage Books, London, 2005.
- [16] THORPE, J. A.: *Elementary topics in differential geometry*. Springer, New York, Berlin, 1979.
- [17] WALD, R. M.: *General relativity*. Univ. of Chicago Press, 1982.