

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Irena Sýkorová  
Zápisy čísel ve starověké Indii

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 59 (2014), No. 1, 17--26

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/143735>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2014

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

# Zápisy čísel ve starověké Indii

Irena Sýkorová, Praha

## 1. Úvod

Všichni dnes počítáme s čísly vyjádřenými v desítkové poziční soustavě. Tento způsob zápisu čísel má svůj původ ve staré Indii, odkud se přes arabskou matematiku dostal až do Evropy. Pojděme se podívat, jak to vypadalo na začátku.

V nejstarších dobách se ve staré Indii číslice používaly pouze pro zápis čísel nebo dat, počítalo se pomocí mušliček *kauri*; při výpočtech se tedy čísla nepsala, ale „pokládala“.<sup>1</sup> Indičtí počtáři používali mušličky dvojího druhu – podlouhlé *anika-rāśi*, ty sloužily k vyjádření číslic 1 až 9, a kulaté *śūnya-rāśi*, které označovaly nulu. Později se čísla „zapisovala“ do prachu rozprostřeného na desce nebo na zemi. Proto se provádění matematických výpočtů také někdy říkalo *dhūlī-karma* neboli prachová práce.

V Indii dlouho přetrvával zvyk uchovávat literární díla ústní tradicí, nejstarší rukopisy pocházejí až z počátku našeho letopočtu. Nejčastěji se psalo na upravené palmové listy svázané provázkem, na něž se v severní Indii psalo perem a inkoustem, v jižní části bylo zvykem vyrývat písmena do listu rydlem a pro zvýraznění je ještě potřít inkoustem. Dalším psacím materiálem byla březová kůra, která se používala hlavně na severu Indie. Palmové listy i březová kůra však v indickém klimatu snadno podléhají zkáze. Naději na delší přežití tak měly jen velmi oblíbené texty nebo náboženská díla, která se stále dokola opisovala.

## 2. Písmo

Nejstarší dochované písemné doklady jsou rané nápisy a edikty panovníka Ašóky (3. stol. př. n. l.)<sup>2</sup>, který jako první sjednotil pod svou vládou do jedné říše téměř celé území Indického poloostrova. Aby lidé v jeho velké říši byli informováni o jeho vladařských záměrech, nechal tesat do skal nebo kamenných sloupů nápisy v dialektech srozumitelných všemu obyvatelstvu. Dochovala se necelá stovka ediktů napsaných písmem *brāhmī* (bráhmí). *Brāhmī* je slabikové písmo neznámého původu, které se četlo zleva doprava.<sup>3</sup> Na obrázku 1 je část Ašókova nápisu na pískovcovém sloupu (asi 238 př. n. l.) dnes uloženého v Britském muzeu v Londýně.

---

<sup>1</sup>Podobná situace byla i ve staré Číně, kde k počítání sloužily početní tyčinky.

<sup>2</sup>Ašóka byl třetím panovníkem z královské dynastie Maurjů, byl synem Bindusáry a vnukem Čandragupty. Vládl přibližně v letech 269 až 227 př. n. l., viz [11].

<sup>3</sup>Toto písmo vyhovovalo fonetice indických jazyků a stalo se základem většiny indických písmových systémů, zejména písma *devanāgarī*, (devanāgarí, krátce nāgarí), které dodnes používá nejen sanskrt, ale i některé novindické jazyky jako hindština.



Obr. 1. Fragment Ašókovy nápisy (asi 238 př. n. l.)

Jiné písmo, nalezené jen na několika nápisech v severozápadní části Indického poloostrova, je písmo *kharoṣṭhī* (kharóští). Toto písmo je aramejského původu, četlo se zprava doleva a používalo se hlavně v době mezi 4. stol. př. n. l. a 3. stol. n. l.

### 3. Nejstarší zápisy čísel

Pro Indii je charakteristické velmi časně užívání velkých čísel vyjádřených v desítkové soustavě včetně jejich názvů. V buddhistické práci *Lalitavistara* (1. stol. př. n. l.) jsou uvedeny mocniny deseti až do *tallakṣaṇa*, tj.  $10^{53}$ . Zatímco Římané neměli terminologii pro čísla větší než *mille* (tisíc), Řekové větší než *myriada* ( $10^4$ ), ve starých indických aritmetických textech bývaly uvedeny názvy nejméně pro 18 mocnin deseti. Kromě toho existovaly názvy pro číslice od 1 do 9 a některá další čísla, například 20, 30, 200, 300. Pokud číslo obsahovalo pouze jednotky a desítky, nejprve se uváděl nižší řád, tj. jednotky, tedy například číslo 29 bylo vyjádřeno jako *nava-vimśati* neboli pouhým výčtem čísel počínaje od jednotek *devět-dvacet*. Když bylo číslo větší, další řády už následovaly od nejvyššího sestupně (například tisíce, stovky, jednotky, desítky). Jiný způsob, jak nazývat čísla 19, 29, 39 atd., byl založen na odčítacím principu, například číslo 29 bylo vyjádřeno jako *ekāṇna-trimśat* (o jednu méně než třicet), viz [4].

Nejstarší díla se nezapisovala, byla šířena ústním podáním a pro lepší zapamatování byla formulována ve verších. Proto bylo třeba i čísla vyjadřovat tak, aby vyhovovala metrice daného verše. Z toho důvodu se hledaly různé způsoby, jak dané číslo zapsat. Často se používala aditivní metoda, někdy multiplikativní. V různých matematických dílech byla nalezena například takto vyjádřená čísla, viz [3], [8], [4]: *o tři méně než tři sta* (297), *čtyřicet přidané k o jedna méně než sto* (139), *tři devítky* (27), *osmdesát tři spojené se čtyřmi sty a čtyři tisíce násobené sedmi* (28 483).

Zpočátku byla velká čísla popisována slovně, ale pro malé jednotky existovaly speciální symboly velmi brzy. V době krále Ašóky bylo již užívání číselných symbolů zcela běžné, zatím však ještě bez pozičního zápisu. Tak jako se ve staré Indii používalo písmo dvojího druhu, existovaly i dva způsoby zápisů číselných symbolů – *brāhmī* a *kharoṣṭhī*. Čísla *kharoṣṭhī* se zapisovala zprava doleva, některé jejich tvary z počátku našeho letopočtu jsou na obrázku 2, viz [4].

Čísla od 5 do 8 byla vyjádřena aditivním způsobem se základem čtyři. Nevíme, jak se zapisovala devítka. Je pravděpodobné, že znakem IXX. Pro číslo 10 byl použit zcela odlišný symbol, není známo, proč se nepokračovalo v aditivním způsobu, tj. IIXX, proč se upustilo od čtyřky jako základu. Symbol pro 20 mohl vzniknout spojením

1	2	3	4	5	6	7	8
I	II	III	X	IX	IIIX	IIIX	XX
10	20	40	50	60	70	80	
𐌒	𐌔	𐌔𐌔	𐌔𐌔𐌔	𐌔𐌔𐌔	𐌔𐌔𐌔𐌔	𐌔𐌔𐌔𐌔	𐌔𐌔𐌔𐌔
100	200	300	122		274		
𐌒𐌒	𐌔𐌔	𐌔𐌔𐌔	𐌒𐌔𐌒		𐌔𐌒𐌔𐌔𐌔𐌒		

Obr. 2. Čísla *kharoṣṭī*



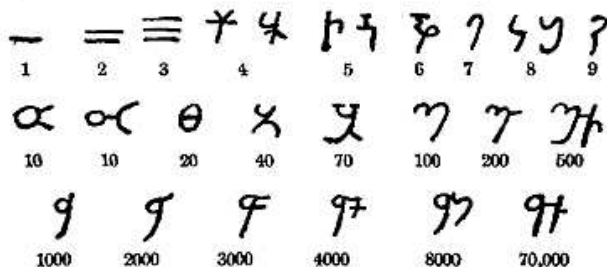
Obr. 3. Čísla *brāhmī* 10 a 7 (asi 2. stol. př. n. l.)

dvou znaků pro 10. Symboly 200, 300 atd. vznikly připsáním symbolů 2, 3 atd. zprava k číslu 100. Tento multiplikativní způsob byl nalezen rovněž u Feničanů. Vytváření dalších čísel je vidět například na čísle 274, které je zapsáno pomocí znaků pro 2, 100, 20, 10, 4 uspořádaných zprava doleva. Je vyjádřeno jako  $2 \cdot 100 + 20 + 20 + 20 + 10 + 4$ , viz [4].

Čísla *brāhmī* se zapisovala zleva doprava, nejstarší dochované symboly jsou z Ašókových ediktů. Další nápisy obsahující čísla (asi ze 2. stol. př. n. l.) byly nalezeny v jeskyni na vrcholku hory Nana Ghat ve střední Indii asi 120 km od Puné. Na obrázku 3 jsou čísla 10 a 7; zatímco znak pro desítku trochu připomíná řecké písmeno alfa, tvar sedmičky se podobá jejímu dnešnímu symbolu, viz [7]. Nápisy obsahují seznam darů pravděpodobně vyrobených u příležitosti náboženské oběti.

Jiné nápisy s čísly *brāhmī* (asi z 1. nebo 2. stol. n. l.) na obrázku 4 byly objeveny v jeskyni v oblasti Nasik, viz [9].

V systému *brāhmī* existovaly samostatné znaky pro každé číslo 1, 4 až 9 a 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 200, 300, ..., 1000, 2000 atd. V nejstarší písemné podobě



Obr. 4. Čísla *brāhmī*

*kharoṣṭī* byly znaky jen pro 1, 10, 20 a 100. Také tvoření velkých čísel bylo v obou systémech odlišné. Zatímco v *brāhmī* se nejvyšší řád psal vlevo, v *kharoṣṭī* bylo pořadí opačné. Například číslo 274 bylo zapsáno pomocí znaků pro 200, 70 a 4; v *brāhmī* bylo pořadí 200-70-4, *kharoṣṭī* řadilo 4-70-200.

#### 4. Poziční zápis a nula

Desítkový poziční zápis by nebyl možný bez nuly. V desítkovém pozičním zápisu má nula dvojitou funkci – jako číslice slouží k označení chybějícího řádu a zároveň je plnohodnotným číslem, pro které je třeba definovat aritmetické operace. Nula se nazývala *śūnya* (prázdnost, nedostatek) a byla považována za číslo od prvních století našeho letopočtu, není však jasné, jaká byla její přesná podoba. Existovalo několik symbolů, kterými byla nula označována. V rukopisu *Bakhshālī* (asi 7. nebo 8. stol. n. l.) byla zavedena pro nulu tečka •. Termín *bindu* (tečka) se užíval pro nulu ve slovním vyjádření i v pozdější literatuře. Někdy k označení nuly sloužil malý kroužek o.

Nejstarší indické dílo, ve kterém se objevuje nula, je *Chandaḥ sūtra* (kolem roku 200 př. n. l.). Nula zde však má roli jen jakési značky.<sup>4</sup> V astronomické práci Varáhamihiry *Pañca-siddhāntikā* (6. stol. n. l.) je nula zmiňována na několika místech, objevuje se při sčítání i odčítání, viz [4]. Jeden z nejstarších dochovaných záznamů nuly byl nalezen v čísle 270 na obrázku 5, v nápisu z chrámu ve Gwalioru (asi 400 km jižně od Dillí) datovaném *Samvat* 933, což odpovídá roku 876 n. l., viz [7].

Všechna známá indická pojednání o aritmetice a algebre obsahují část věnovanou základním operacím s nulou. Brahmagupta (asi 598 až 670) považoval nulu za číslo, které není ani kladné ani záporné a je součtem dvou opačných. Kompletní aritmetika byla uvedena v komentáři Bhāskary I. (asi 600 až 680) k práci *Āryabhaṭṭīya*. Dělení nulou však zpočátku působilo problémy, většinou staří Indové považovali dělení nulou za nemožné. Nulu znali a používali také ve staré Číně. Dodnes není zcela jasné, zda Číňané nulu převzali od Indů, nebo zda byla naopak zavedena v obou zemích nezávisle.

Nejdůležitějším rysem indické číselné soustavy je desítkový poziční zápis. Dobrým

<sup>4</sup>Nula bývala ztotožňována s pojmem nepřítomnost a v algoritmu na výpočet  $2^n$  označovala, že dané číslo není dělitelné dvěma. V tomto algoritmu by však stejně dobře posloužil jakýkoli jiný (i nenumerický) symbol.



Obr. 5. Číslo *brāhmī* 270 (vlevo nahoře, z roku 876 n. l.)

předpokladem pro jeho vznik byla existence samostatných symbolů pro čísla 1 až 9 nazývaných *aṅka* (znak, resp. značka) a znaku pro 0 obvykle nazývaného *śūnya*. Při způsobu psaní zleva doprava byla další výhodou skutečnost, že už ve starším zápisu čísel bývala číslice vyššího řádu umístěna vlevo. Z tohoto způsobu vyjádření se postupně vyvinul poziční zápis čísel. Za nejstarší dochovaný poziční zápis čísla je považováno vyjádření roku 346 éry Samvat na měděné darovací desce z roku 595 n. l., viz [4]. Starý způsob zapisování čísel bez pozičního systému byl užíván v Indii do 7. stol. n. l., pak začal převládat nový způsob s pozičním zápisem.

## 5. Vyjádření čísel speciálními slovy

Způsob vyjadřovat čísla slovy, stejně jako poziční zápis, byl rozvíjen a zdokonalován v prvních stoletích našeho letopočtu. V tomto systému byla čísla pojmenována jmény věcí nebo bytostí, které přirozeně nebo podle mytologie symbolizovaly určitý počet. Tak číslo 1 mohlo být označeno něčím, co je jedinečné, například Měsíc či Země, číslo 2 něčím, co je v páru, například oči nebo ruce. Nula byla nahrazena slovy prázdno, nebe, úplný. Tento způsob se užíval v astronomických a matematických dílech stejně jako v datech či rukopisech. Středověcí indiští matematikové a astronomové psali svá díla ve verších, proto hledali metodu, která by jim pomohla vyjádřit velká čísla způsobem vhodným pro daný verš. Velká čísla se vyskytovala jak v astronomických dílech, tak ve formulaci matematických problémů. Vyjádření čísel speciálními slovy uspokojilo tuto potřebu a brzy se stalo populárním. Pro každou číslici existovalo mnoho slov, takže každé číslo se dalo vyjádřit různými způsoby, z nichž se mohl vybrat ten název, který byl vhodný do konkrétního verše. Například číslo 1 230 mohlo být vyjádřeno (viz [4]) jako:

*kha* (díra, tj. 0) – *guṇa* (akord, tj. 3) – *kara* (ruka, tj. 2) – *ādi* (počátek, tj. 1),  
*ākāśa* (prázdno, tj. 0) – *kala* (tříoký, tj. 3) – *netra* (oko, tj. 2) – *dharā* (Země, tj. 1).

Pořadí slov, která označovala číslice, bylo obrácené než při vyjadřování čísel numerickými znaky. Jedno z možných vysvětlení je takové, že způsob označování čísel slovy byl považován za druh aritmetické operace, které se většinou prováděly zprava doleva.

Nevýhodou tohoto zápisu čísel však byla značná délka. V astronomických textech slovní označení někdy způsobilo, že celý verš, někdy i víc, byl věnován pouze časovému údaji. To se nelíbilo indickým astronomům, kteří stručnost a výstižnost pokládali za hlavní charakteristický rys vědeckých pojednání. Proto hledali cesty, jak vyjádření velkých čísel zestručnit.

## 6. Vyjádření čísel písmeny

Myšlenkou užívání písmen k označení čísel se zabýval už v polovině prvního tisíciletí př. n. l. Pāṇini (520 až 460 př. n. l.). Později někteří indiští učenci, kterým se zdálo slovní vyjádření čísel zbytečně zdlouhavé, nahrazovali slova písmeny, resp. slabikami. Āryabhaṭa I. (asi 476 až 550) zavedl abecední systém k vyjadřování numerických hodnot v astronomii. Pravidlo uvedl v první kapitole práce *Āryabhaṭīya*, viz [2], [6]:

*Varga [lichá] písmena začínající k [jsou užita jen] na lichých pozicích, avarga [sudá] na sudých. [Tak] ya je rovno ṛima [ṛa+ma]. Devět samohlásek [značí] dvakrát devět nul lichých a sudých [míst]. Totéž smí být [opakováno] na konci za devátým místem.*

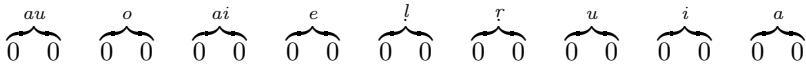
Āryabhaṭova metoda ukazuje, jak vyjádřit číslo v desítkovém pozičním zápisu pomocí písmen abecedy. K tomu, abychom mu lépe porozuměli, je třeba znát uspořádání hlásek sanskrtské abecedy. Ve zjednodušené podobě ji vidíme v následující tabulce:<sup>5</sup> samohlásky:

	<i>a</i>	<i>i</i>	<i>u</i>	<i>ṛ</i>	<i>ḷ</i>	<i>e</i>	<i>ai</i>	<i>o</i>	<i>au</i>	
souhlásky:	<i>k</i> (1)	<i>kh</i> (2)	<i>g</i> (3)	<i>gh</i> (4)	<i>ñ</i> (5)	<i>c</i> (6)	<i>ch</i> (7)	<i>j</i> (8)	<i>jh</i> (9)	<i>ñ</i> (10)
	<i>ṭ</i> (11)	<i>ṭh</i> (12)	<i>ḍ</i> (13)	<i>ḍh</i> (14)	<i>ṇ</i> (15)	<i>t</i> (16)	<i>th</i> (17)	<i>d</i> (18)	<i>dh</i> (19)	<i>n</i> (20)
	<i>p</i> (21)	<i>ph</i> (22)	<i>b</i> (23)	<i>bh</i> (24)	<i>m</i> (25)					
		<i>y</i> (3)	<i>r</i> (4)	<i>l</i> (5)	<i>v</i> (6)					
		<i>ś</i> (7)	<i>ṣ</i> (8)	<i>s</i> (9)						
	<i>h</i> (10)									

Termín *varga* lze přeložit jako čtverec nebo uspořádaný. Āryabhaṭa I. takto označoval skupinu 25 souhlásek *k* až *m*, které jsou uspořádány do čtverce, a říkal jim „lichá“ písmena. Druhá skupina souhlásek *y* až *h* je neuspořádaná, podle Āryabhaṭy to byla „sudá“ písmena.

<sup>5</sup>Ke každé z krátkých samohlásek *a*, *i*, *u*, *ṛ* existovala ještě dlouhá (*ā*, *ī*, *ū*, *ṝ*), pouze samohláskové *ḷ* nemělo dlouhou podobu. Dvojhlásky *e*, *ai*, *o*, *au* jsou v sanskrtu vždy dlouhé, proto se u nich délka neoznačovala. Za samohláskami následovaly souhlásky řazené foneticky podle místa výslovnosti (od zadní části patra směrem ke rtům). V každé řadě je nejprve hláska neznělá bez aspirace, po ní neznělá aspirovaná, znělá neaspirovaná, znělá aspirovaná a nakonec nosovka. Za těmito 25 souhláskami byly řazené polovokály, tři sykavky a znělé *h*, viz [12].

Existovalo 18 pozic, které byly označeny nulami rozdělenými do devíti dvojic. Každá dvojice se skládala z lichého místa (vpravo) a sudého (vlevo). „Lichá“ písmena  $k$  až  $m$  se používala pouze na lichých místech a označovala postupně čísla 1, 2, ..., 25. „Sudá“ písmena, tj.  $y$  až  $h$ , se užívala na sudých místech pro čísla 3, 4, ..., 10. Každá z devíti dvojic příslušela jedné z devíti samohlásek. První dvojice, jednotky a desítky, byla určena samohláskou  $a$ , druhá dvojice, stovky a tisíce, byla označena pomocí samohlásky  $i$  atd. Nuly určovaly jednotlivá místa a neměly žádnou numerickou hodnotu. Připojená samohláska tak určovala pozici v desítkovém pozičním zápisu.



Například když se k  $a$  připojilo  $y$  (označující „sudou“ 3), znamenalo to, že je  $y$  na prvním sudém místě, tj. desítkovém, proto  $ya$  znamenalo 30. Podobně  $yi$  vyjadřovalo 3 na místě tisíců, tj. 3 000. Pokud se však k samohlásce  $a$  přidala „lichá“ 3, tj.  $g$ , pak stála na první liché pozici, tedy  $ga$  značilo 3, podobně  $gi$  představovalo 300.

Āryabhaṭa I. upozornil na další možnost, jak tímto způsobem vyjádřit číslo. Například 30 mohlo být zapsáno jako  $ya$  nebo jako  $\dot{n}ma$ . Protože  $\dot{n}a$  znamenalo 5,  $ma$  bylo 25, pak  $\dot{n}ma$  značilo součet  $\dot{n}ma = \dot{n}a + ma = 5 + 25 = 30$ . Při zapisování čísla byly pravděpodobně nejprve všude napsány nuly a později byly na některých místech nahrazeny potřebným symbolem, na neobsazených pozicích nuly zůstaly. Tento způsob mohl být rozšířen i na čísla, která potřebovala více než 18 míst, tak, že se celý postup opakoval se samohláskami, ke kterým byla přidána *anusvára* (samohláska se zapisuje s tečkou „nad“ a vyslovuje se s přídechem „m“)

Āryabhaṭa I. takto vyjádřil počet oběhů Slunce a Měsíce, viz [2], [7]:

Slunce	$\overset{r}{\underbrace{0 \quad gh}}$ 4	$\overset{u}{\underbrace{y \quad kh}}$ 3 2	$\overset{i}{\underbrace{0 \quad 0}}$ 0 0	$\overset{a}{\underbrace{0 \quad 0}}$ 0 0	<i>khyughṛ</i> 4 3 2 0 0 0
Měsíc	$\overset{r}{\underbrace{l \quad ch}}$ 5 7	$\overset{u}{\underbrace{\acute{s} \quad \dot{n}}$ 7 5	$\overset{i}{\underbrace{y \quad g}}$ 3 3	$\overset{a}{\underbrace{y \quad c}}$ 3 6	<i>cayagiyiriuśuchlṛ</i> 5 7 7 5 3 3 3 6

Výhodou tohoto způsobu byla stručnost, která převažovala nad dvěma nedostatky. Pořadí souhlásek bylo dáno jejich postavením v sanskrtské abecedě, proto při vytváření slov nebylo možné zachovat libozvučnost sanskrtu. Āryabhaṭova slova působí jako shluk těžko vyslovitelných zvuků a snad kvůli lepší výslovnosti autor vynechal některé opakující se samohlásky, například  $r$ . Další nevýhodou bylo, že tento systém nedovoľoval tolik rozmanitosti a pestrosti jako ostatní systémy.

Existovaly však i jiné způsoby, jak vyjádřit čísla pomocí písmen, například různé varianty systému *kaṭapayādi* nebo *akṣarapallī*. V systému *kaṭapayādi* souhlásky sanskrtu označovaly číslice 1 až 9 a 0. Připojená samohláska neměla numerický význam. Výsledkem byly číselné údaje, které se lépe vyslovovaly a dobře zněly. Kvalifikovaní autoři dokázali pro číselný údaj vymyslet slovo, které mělo nějaký konkrétní význam. Tento způsob byl lepší než Āryabhaṭův i než vyjádření pomocí speciálních slov. V Indii byly známé čtyři varianty tohoto systému; pravděpodobně kvůli nejednotnosti zápisu se tento způsob vyjadřování čísel nestal běžným.



V první variantě systému *kaṭapayādi* různé souhlásky představovaly určité číslice, pouze souhlásky *n*, *ñ* a samostatné samohlásky označovaly nuly. Ze souhlásek měla však numerickou hodnotu jen ta poslední před samohláskou. Souhláska, za kterou nenásledovala samohláska, se ignorovala. Název *kaṭapayādi* byl odvozen z písmen *k*, *t*, *p*, *y* značících jedničku.<sup>6</sup> Číslo byla vyjádřena v desítkové poziční soustavě, jednotlivé číslice byly nahrazeny písmeny podle tabulky:

<i>k</i> (1)	<i>kh</i> (2)	<i>g</i> (3)	<i>gh</i> (4)	<i>ñ</i> (5)
<i>c</i> (6)	<i>ch</i> (7)	<i>j</i> (8)	<i>jh</i> (9)	<i>ñ̄</i> (0)
<i>t̄</i> (1)	<i>th̄</i> (2)	<i>d̄</i> (3)	<i>dh̄</i> (4)	<i>ṇ</i> (5)
<i>t</i> (6)	<i>th</i> (7)	<i>d</i> (8)	<i>dh</i> (9)	<i>n</i> (0)
<i>p</i> (1)	<i>ph</i> (2)	<i>b</i> (3)	<i>bh</i> (4)	<i>m</i> (5)
	<i>y</i> (1)	<i>r</i> (2)	<i>l</i> (3)	<i>v</i> (4)
	<i>ś</i> (5)	<i>ṣ</i> (6)	<i>s</i> (7)	
<i>h</i> (9)				

Zapisovalo se zprava doleva, tj. jednotky stály vlevo, následovalo písmeno označující desítky atd. Uvedené příklady jsou z různých nápisů, darovacích desek a rukopisů, viz [4].

$$\begin{array}{r}
 rā - gha - vā - ya \\
 2 \quad 4 \quad 4 \quad 1 = \quad 1 \quad 442 \\
 bha - va - ti \\
 \quad 4 \quad 4 \quad 6 = \quad 644 \\
 śa - ktyā - lo - ke \\
 5 \quad 1 \quad 3 \quad 1 = \quad 1 \quad 315 \\
 ta - tvā - lo - ke \\
 6 \quad 4 \quad 3 \quad 1 = \quad 1 \quad 346 \\
 kha - go - ntyā - nme - śa - mā - pe \\
 2 \quad 3 \quad 1 \quad 5 \quad 6 \quad 5 \quad 1 = 1 \quad 565 \quad 132
 \end{array}$$

Není jasné, kdy a kde systém *kaṭapayādi* vznikl, podle poznámek komentátora Sūryadevy tento systém znal už Āryabhaṭa I., první doložený výskyt je v díle *Laghu-Bhāskarīya* od Bhāskary I., viz [4].

Druhou variantu popsal Āryabhaṭa II. (asi 920 až 1000) jako modifikaci předchozího způsobu. V systému Āryabhaṭy II. měly souhlásky tentýž význam jako v první variantě. Samohlásky zapsané vedle sebe nebo ve spojení se souhláskou neměly žádný numerický význam. Také, na rozdíl od první varianty, měla každá souhláska numerickou hodnotu. Písmena byla řazena zleva doprava tak, jak se zapisovala čísla. Rozdíl mezi první a druhou variantou je patrný na příkladu časového údaje, který uvedl Āryabhaṭa II., viz [4]:

$$\begin{array}{r}
 dhā - ja - he - ku - na - he - t - sa - bhā \\
 4 \quad 8 \quad 8 \quad 1 \quad 0 \quad 8 \quad 6 \quad 7 \quad 4 = 488108674 \\
 4 \quad 8 \quad 8 \quad 1 \quad 0 \quad 8 \quad \quad 7 \quad 4 = 47801884
 \end{array}$$

Podle Āryabhaṭy II. bylo takto vyjádřeno číslo 488108674, zatímco podle první varianty se jednalo o číslo 47801884 s opačným pořadím cifer a vynecháním šestky.

<sup>6</sup> *Kaṭapayādi* znamená začínající *k*, *t*, *p* a *y*, viz [7].

Třetí varianta byla užívána v jižní Indii a je známá jako *kerala* systém. Šlo o první variantu s tím rozdílem, že se slabiky zapisovaly zleva doprava.

Čtvrtá varianta byla objevena v několika rukopisech nalezených v Barmě. Tyto rukopisy jsou v jazyce *pali*. Byl to první způsob, kde některé souhlásky měly odlišnou numerickou hodnotu:  $s = 5$ ,  $h = 6$  a  $l = 7$ . Změna hodnot těchto písmen souvisí s tím, že abeceda *pali* neobsahuje sanskrtské  $ś$  a  $ṣ$ .

Různé zvláštnosti se vyskytovaly i v číslech, která se používala na číslování stránek starých rukopisů. Tyto symboly byly známé pod názvem *akṣarapallī*, byla to písmena nebo slabiky, které sloužily k číslování stránek.

Existovala i další vyjádření čísel pomocí písmen. Například způsob, který užíval 16 samohlásek a 34 souhlásek sanskrtské abecedy, nalezený na některých rukopisech z jižní Indie, Srí Lanky a Barmy. Souhlásky ve spojení se samohláskou *a* znázorňovaly čísla 1 až 34, stejné souhlásky ve spojení s  $\bar{a}$  značily čísla 35 až 68 atd., viz [4].

## 7. Cesta do Evropy

Za vlády chalífy al-Mansúra (745–775) přišli do Bagdádu s indickými vyslanci také učenci, kteří přinesli některé matematické a astronomické práce. Tyto texty byly přeloženy do arabštiny a značně ovlivnily arabskou matematiku. Arabové jako první přijali podobu čísel *ghubār*, někdy též nazývané *ghobār* (prachové číslice), odvozenou pravděpodobně z číslic *brāhmī*. Desítkový poziční zápis čísel včetně desítkové aritmetiky Arabové nazývali *indické výpočty* a rychle si ho osvojili. Do té doby se v arabském světě používal nepoziční alfanumerický zápis podobný řeckému nebo se číselné hodnoty vyjadřovaly slovy.

Výklad indického počítání byl uveden v různých arabských textech, například perský matematik a astronom al-Chwárizmí (asi 780 až 850) tuto metodu vyložil v aritmetickém traktátu *O výpočtech s indickými číslicemi*, kde podrobně vysvětlil zápis čísel s použitím nuly – *malého kruhu podobného písmenu o*, a popsal matematické operace podle indického vzoru, viz [5]. Latinský překlad se ve 12. století dostal do Evropy a pomohl prosadit používání „indických“ číslic, kterým dnes říkáme arabské, resp. indo-arabské.

Prvním, kdo v Evropě pracoval s číslicemi *ghubār*, byl patrně francouzský mnich Gerbert (asi 940 až 1003). S číslicemi se mohl seznámit v maurském Španělsku, kam se číslice dostaly prostřednictvím kupců z arabských zemí. Symboly číslic 1 až 9, tzv. „apices“ nebo „apexy“ vyryté do jakýchsi žetonů uplatňoval pouze při počítání na abaku, ve svých matematických dílech používal římské číslice, viz [1]. Nejstarší dochovaný zápis nových číslic na obrázku 6 pochází z roku 976 a je z kláštera Albelda v severním Španělsku, viz [10].



Obr. 6. Nejstarší evropské číslice

Největší vliv na rozšíření nového zápisu čísel měl Leonardo Pisánský – Fibonacci (asi 1170 až 1250). Na svých cestách po střeozemí poznal různé číselné systémy a nejvíce ho zaujal indický. Po návratu do Pisy napsal *Knihu o abaku*, kde vysvětlil možnost užití indických číslic i pro obyčejné kupecké počítání. Mezi další osobnosti, které pomohly šíření indických číslic v Evropě, patří například anglický vzdělanec Jan Sacrobosco (asi 1195 až 1256), známý též jako Jan z Holywoodu nebo John z Halifaxu, v jehož práci *Algorismus prostý* jsou uvedeny způsoby zápisu čísel a operace s celými čísly. Počítání s celými čísly vyložil rovněž francouzský matematik Alexandre de Villedieu (asi 1175 až 1240) v knize *Píseň o algoritmu*.

Přesto se nový způsob zápisu čísel prosazoval velmi pomalu, zpočátku ho přijali jen učenci. Obyčejní lidé, zejména obchodníci, přistupovali k novým číslicím s nedůvěrou.

**Poděkování.** Za cenné připomínky děkuji prof. RNDr. Michalu Křížkovi, DrSc., doc. RNDr. Jindřichu Bečvářovi, CSc., a Ing. Ľubomíře Balkové, Ph.D.

## L i t e r a t u r a

- [1] BEČVÁŘ J., a kol.: *Matematika ve středověké Evropě*. Dějiny matematiky, sv. 19. Prometheus, Praha, 2001.
- [2] CLARK, W. E.: *The Āryabhaṭīya of Āryabhaṭa*. The University of Chicago Press, Chicago, 1930.
- [3] COLEBROOKE, H. T.: *Algebra, with arithmetic and mensuration from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhāscara*. John Murray, London, 1817.
- [4] DATTA, B., SINGH, A. N.: *History of Hindu mathematics (part I)*. Molital Banarsidass, Lahore, 1935.
- [5] JUŠKEVIČ, A. P.: *Dějiny matematiky ve středověku*. Academia, Praha, 1978.
- [6] KAK, S. C.: *Some early codes and ciphers*. Indian J. Hist. Sci. 24 (1) (1989), 1–7.
- [7] PLOFKER, K.: *Mathematics in India*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.
- [8] RANGACARYA, M.: *Ganita-sara-sangraha of Mahaviracarya with English translation and notes*. Government Press, Madras, 1912.
- [9] SMITH D. E., KARPINSKI L. CH.: *The Hindu-Arabic numerals*. Ginn and Company Publishers, Boston, 1911.
- [10] SMITH D. E.: *History of mathematics, vol. 2*. Special Topics of Elementary Mathematics. Dover Publications, New York, 1958.
- [11] ZBAVITEL, D.: *Starověká Indie*. Panorama, Praha, 1985.
- [12] ZBAVITEL D., STRNAD J.: *Učebnice sanskrtu*. Nakladatelství Karolinum, Univerzita Karlova, Praha, 2006.