Pavla Pavlíková

# O Josephově problému

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 57 (2012), No. 4, 274–284

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/143212

# O Josephově problému

*Pavla Pavlíková, Praha*

*Na koho to slovo padne,*
*ten musí jít z kola ven!*

## 1. Úvod

Snad každý z nás se v dětství setkal s hrou, jejíž podstatou bylo rozpočítávání. Obvykle byla doprovázena odříkáváním „rozpočítadla“ typu *Ententýky dva špalíky*... nebo *Enyky benyky kliky bé*.... Každé slovo nebo slabika odpovídalo ukázání prstem na jednoho z hráčů a šlo o to, na kom zůstane prst jako na posledním – ten byl vítězem, musel splnit nějaký úkol, nebo naopak hru opustit. Takový způsob rozpočítávání samozřejmě nahrával i nepoctivcům. Zkušení hráči uměli velmi dobře zařídit (volbou konkrétní osoby, od které se začne rozpočítávat), aby volba padla na předem zvolenou osobu. Podobný princip se pravděpodobně uplatňoval již velmi dávno, např. při obětních rituálech. Rozpočítadla najdeme téměř ve všech světových jazycích, často však obsahují nesmyslná slova, která vznikla zkomolením jiných, nebo slova ze zastaralých jazyků. Studiem rozpočítadel z folkloristického hlediska se zabývá např. [15].

Naším cílem bude podat matematický popis spravedlivé varianty rozpočítávání. Inspirací se nám stala úloha číslo 232 *Catching the Mice* z knihy [7] britského matematika, autora mnoha logických hříček a matematických hádanek Henryho Ernesta Dudeneyho (1857–1930): *Kočka sedí uprostřed kruhu a kolem ní 12 černých a jedna bílá myš. Kočka se točí ve směru hodinových ručiček a každou třináctou myš postupně zakousne. Od které myši musí začít počítat, aby bílá myš zůstala poslední živá?*

Lze ověřit, že bílá myš na začátku rozpočítávání musí být osmá v pořadí ve směru pohybu hodinových ručiček. Dobrá zpráva pro ochránce zvířat je, že v této hádance ve skutečnosti nedojde k usmrcení žádné z myší. Dudeney totiž dodává, že kočka se tak dlouho rozmýšlí, od které myši má začít počítat, až usne a myši se rozprchnou. Pro zarputilé luštitele hádanek jsou v [7] uvedeny dva doplňující úkoly: 1. Určete, po kolika by kočka musela rozpočítávat, aby začala od bílé myši a přitom bílá myš stejně zůstala naživu jako poslední. 2. Určete, po kolika by kočka musela rozpočítávat, aby začala od bílé myši a přitom bílá myš byla vybrána jako třetí v pořadí.[1]

V dalším textu vysvětlíme, proč je tento typ úloh v literatuře označován jako *Josephův problém*, a ukážeme několik variací tohoto problému. Pojmenování historicky souvisí s postavou známého židovského historika Josepha Flavia.

[1] Odpověď je uvedena v závěru tohoto článku v poznámce pod čarou.

RNDr. Pavla Pavlíková, Ph.D., Ústav matematiky VŠCHT Praha, Technická 5, 166 28 Praha 6, e-mail: `Pavla.Pavlikova@vscht.cz`

## 2. Josephus Flavius

Josephus Flavius[2], vlastním jménem Jóséf ben Mattatjáh, se narodil v roce 37 n. l. v Jeruzalémě. Pocházel z vysoce postavené rodiny. Již od raného mládí byl velmi vzdělaný, měl přehled o židovské, řecké i římské kultuře. Když vypuklo židovské protiřímské povstání v Galilei, byl jmenován jedním z hlavních velitelů. Proti přesile, vedené vynikajícím římským vojevůdcem Vespasiánem, však Židé neměli nejmenší šanci.

V červenci roku 67 n. l. byl Josephus spolu se čtyřiceti svými bojovníky obklíčen římskou armádou v úkrytu poblíž pevnosti Jotapata. Jeho vojáci se rozhodli vyhnout se zajetí tím, že si vezmou život. Josephus ovšem nesouhlasil, a tak na jeho návrh (podle [11]) losovali s tím, že další vylosovaný zabije předchozího vylosovaného, a tak budou postupovat tak dlouho, dokud nezůstane naživu jen poslední z nich, který spáchá sebevraždu. O samotném mechanismu losování nemáme podrobnější informace. Ve skutečnosti zůstal Josephus jako jeden ze dvou posledních naživu a svého přítele přemluvil, aby se společně vzdali Římanům. Zda jeho přežití bylo dílem štěstěny, projevem boží vůle (jak uvádí [11]), nebo výsledkem jeho vychytralosti, dnes můžeme pouze spekulovat.

V římském táboře zajatý Josephus předpověděl Vespasiánovi, že se brzy stane císařem. Když se jeho odvážná předpověď splnila, učinil jej Vespasián členem své družiny.[3] Na jeho počest pak Josephus přijal rodové jméno[4] císaře Flavius, jak tomu bývalo u propuštěných otroků zvykem. V Římě pak žil z pravidelného ročního důchodu, který mu císař vyměřil, a věnoval se spisovatelské činnosti (jmenujme jeho díla *O válce židovské* a *Židovské starožitnosti*,[5] autobiografii *Můj život*, spis *O starobylosti Židů*). Josephus zemřel kolem roku 100 n. l. v Římě. O jeho životě se lze více dočíst např. v [9], [10].

## 3. Formulace Josephova problému

Pravděpodobně první, kdo popis losování mezi Josephem a jeho muži okořenil legendou o rozestavení 41 mužů do kruhu a jejich postupnou pravidelnou[6] eliminací, byl Girolamo Cardano (1501–1576). *Ludus Joseph* se objevil v jeho spise *Practica arithmetice et mensurandi singularis* z roku 1539. Někteří autoři (např. [6]) se dokonce odvolávají až na pojednání *Problèmes plaisants et délectables* z roku 1624, jehož autorem je Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1581–1638). Za jeden z prvních pokusů o ryze matematický náhled do problematiky rozpočítávacích úloh lze označit práci [8] Leonharda Eulera (1707–1783) z roku 1771.

[2] Jménem *Josephus Flavius* byla pojmenována planetka č. 6304.

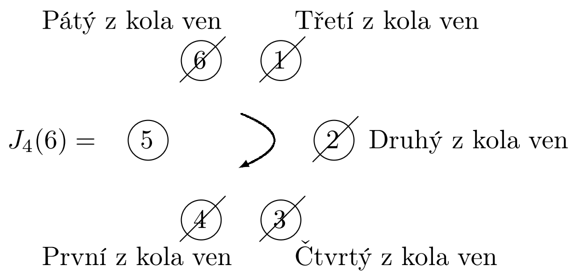
[3] Josephus vděčil Vespasiánovi za život, současný svět mu vděčí za jeden z novodobých sedmi divů světa. V roce 72 n. l. nechal Vespasián postavit Koloseum (slavnostní otevření proběhlo v roce 80 n. l.). Za jeho vlády byla postavena tři patra, jeho syn Titus stavbu nechal ještě o jedno patro zvýšit.

[4] Za flaviovskou císařskou dynastii dnes považujeme Vespasiána a jeho syny Tita a Domitiana.

[5] Tato dvě díla najdeme v upravené verzi i v největší rukopisné knize na světě, v Codexu gigas (Ďáblově bibli), o níž se předpokládá, že byla napsána počátkem 13. století v klášteře v Podlažicích u Chrudimi.

[6] Pravidla postupné eliminace židovských vojáků uvádějí mnohé zdroje odlišně. Např. podle [2] byl eliminován každý druhý, podle [14], [20] každý třetí, podle [17] každý sedmý. My se přikloníme k nejčastěji citované variantě eliminace každého třetího.

Nyní přistoupíme k obecné formulaci problému, který budeme v dalším textu řešit. Osoby 1, 2, 3, …, $n$ rozestavíme po obvodu kruhu a poté postupně každého $k$-tého z těch, kteří ještě zůstali, eliminujeme (začneme od osoby 1 a odpočítáváme např. ve směru pohybu hodinových ručiček). Řešením problému je určení pozice osoby, která zůstane po této eliminaci stát na obvodu kruhu jako poslední. Případ $n = 6$ a $k = 4$ ilustruje obrázek 1.




Obr. 1. Postupná eliminace každé čtvrté z šesti osob v kruhu.

Označme hledanou pozici jako $J_k(n)$. Z didaktického pohledu se jeví příhodné řešit Josephův problém nejprve pro $k = 2$. Několik prvních případů při eliminaci každého druhého je uvedeno v tabulce:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $J_2(n)$ | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 5 | 7 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 1 |

Z tabulky lze usoudit, že v případech $n = 2^a$, $a \in \mathbb{N}$, platí $J_2(2^a) = 1$, a dále mezi po sobě následujícími mocninami čísla 2 je $J_2(n)$ rostoucí posloupnost po sobě následujících lichých čísel. Odtud se nabízí jednoduchá možnost výpočtu čísla $J_2(n)$: najdeme nezáporné číslo $a$, pro které $2^a \le n < 2^{a+1}$, a číslo $n$ zapíšeme ve tvaru $n = 2^a + t$; potom platí $J_2(n) = 2t + 1$. Důkaz správnosti hypotézy vypozorované z tabulky lze provést matematickou indukcí, přičemž je nutné rozlišit možnost pro liché a sudé $n$ (viz např. [17]). Jednoduše lze tento postup zapsat pomocí formule v explicitním tvaru[7]

$$J_2(n) = 1 + 2n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}\,.$$

Velmi názorně je rovněž možné určovat $J_2(n)$ pomocí zápisu čísla $n$ v binární soustavě:

$$n = 2^m + 2^{m-1} n_{m-1} + \dots + 2n_1 + n_0 = (1, n_{m-1}, \dots, n_1, n_0)_2.$$

Určit $t$ znamená odečíst od čísla $n$ největší mocninu dvojky v něm obsaženou, tj. $t = n - 2^m = (n_{m-1}, \dots, n_1, n_0)_2$. Pro určení $J_2(n)$ dále hledáme dvojnásobek $t$, tedy číslo $2t = (n_{m-1}, \dots, n_1, n_0, 0)_2$. Zbývá přičíst 1 a celkem dostáváme

$$J_2(n) = 2t + 1 = (n_{m-1}, \dots, n_1, n_0, 1)_2.$$

[7] $\lfloor x \rfloor$ zde označuje dolní celou část čísla $x$.

Srovnáme-li tento rozvoj s rozvojem čísla $n$, je zřejmé, že jsme pouze první koeficient binárního rozvoje přesunuli na poslední pozici (provedli jsme tzv. jednobitový cyklický shift).

Další možností, jak vypočítat $J_2(n)$, je nahradit v binárním zápisu čísla $n$ všechny koeficienty 0 číslem $-1$, koeficienty 1 ponechat bez změny a výsledek převést zpět do desítkové soustavy. Ukážeme si postup pro $n = 41$:

$$\begin{aligned} n = 41 = (1, 0, 1, 0, 0, 1)_2 \quad \to \quad J_2(n) &= (1, -1, 1, -1, -1, 1)_2 = \\ &= 32 - 16 + 8 - 4 - 2 + 1 = 19. \end{aligned}$$

V případě původního Josephova problému je $n = 41$ a $k = 3$ a hledáme tedy $J_3(41)$. Několik prvních hodnot $J_3(n)$ je uvedeno v následující tabulce:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $J_3(n)$ | 1 | 2 | 2 | 1 | 4 | 1 | 4 | 7 | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 2 | 15 |

Pro zjištění $J_3(n)$ uvádí [12] rekurentní formuli[8]

$$J_3(n) = \left\lceil \frac{3}{2} J_3\left(\left\lfloor \frac{2}{3} n \right\rfloor\right) + a_n \right\rceil \pmod{n} + 1\,,$$

kde $J_3(1) = 1$ a

$$a_n = \begin{cases} -2\,, & \text{je-li } n \equiv 0 \pmod{3}, \\ +1\,, & \text{je-li } n \equiv 1 \pmod{3}, \\ -\frac{1}{2}\,, & \text{je-li } n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Tento vztah není pro praktický výpočet při větších hodnotách $n$ příliš vhodný, což naznačuje i případ $n = 41$, který si může trpělivý čtenář sám prověřit. Správného výsledku $J_3(41) = 31$ lze dosáhnout i použitím jednoduchého algoritmu (viz [12], str. 80):

$$\begin{aligned} &N := 3n; \\ &\texttt{while } N > n \texttt{ do } N := \left\lfloor \frac{N - n - 1}{2} \right\rfloor + N - n; \\ &J_3(n) := N. \end{aligned}$$

Odpověď na to, jak hledat $J_k(n)$ v obecném případě (nejen pro $k = 2$ a $k = 3$), může přinést např. první rekurentní algoritmus pro řešení tohoto problému (viz [19]). Jeho autorem je skotský matematický fyzik Peter Guthrie Tait (1831–1901):

$$\begin{aligned} J_k(1) &= 1, \\ J_k(j + 1) &\equiv 1 + (J_k(j) + k - 1) \pmod{(j + 1)},\ j = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Vraťme se na chvíli znovu k situaci v obležené jeskyni. Legenda říká, že Josephus zůstal naživu spolu s jedním svým vojákem. To znamená, že mohl stát na 31. pozici (neboť $J_3(41) = 31$), ale také mohl být vybrán jako předposlední. To nás vede

[8] $\lceil x \rceil$ zde označuje horní celou část čísla $x$.

k rozšíření původního zadání – můžeme se obecně ptát, kdo bude eliminován jako $i$-tý v pořadí ($i \leq n$).

Možnou metodu výpočtu $J_k(i,n)$ uvádí např. [1], resp. [3], a sice pomocí posloupnosti (tzv. „Oberreihe“) určené trojicí reálných parametrů $(a, s, q)$ definované rekurentně:

$$a_1 = \lceil a \rceil\,, \quad a_{n+1} = \lceil (s + a_n)q \rceil\,, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Pokud v souladu s předchozím značením zvolíme $a = k(n - i) + 1$, $s = 0$, $q = k/(k-1)$, obdržíme rostoucí posloupnost čísel. Jestliže v ní najdeme největší člen $m$, který nepřesahuje číslo $kn + 1$, a vypočteme rozdíl $kn + 1 - m$, pak platí[9]

$$J_k(i,n) = kn + 1 - m.$$

V konkrétním případě $i = 40$, $n = 41$ a $k = 3$ tedy máme $a = 3(41 - 40) + 1 = 4$, $s = 0$, $q = 3/2$ a dostáváme posloupnost

$$4, 6, 9, 14, 21, 32, 48, 72, 108, 162, \ldots$$

Největší člen v této posloupnosti menší než $kn + 1 = 124$ je číslo 108, odkud plyne

$$J_3(40, 41) = 124 - 108 = 16.$$

Předposlední výběr padne na osobu na šestnácté pozici. Josephus a jeho přítel by podle legendy na začátku rozpočítávání museli stát na 16. a 31. místě ve směru rozpočítávání.

## 4. Další variace

Při studiu historie matematiky se setkáme s různými variacemi rozpočítávacích úloh. Velmi oblíbená byla tato varianta: uvažujme $2m$ osob (nejčastěji platilo $2m = 30$), z toho $m$ dobráků a $m$ zlosynů. V jakém pořadí je nutné všechny rozestavit po obvodu kruhu, aby při odpočítávání každého $k$-tého zůstalo právě $m$ dobráků a všichni zlosynové byli eliminováni? Uvedeme dvě různé konkrétní verze tohoto problému – úlohu o lodi v bouři (úloha 1) a úlohu o dědictví (úloha 2).

**Úloha 1.** *Patnáct studentů a patnáct budižkničemů se ocitne na lodi v silné bouři. Má-li se loď zachránit, polovina cestujících musí přes palubu. Jak rozestavit všechny do kruhu tak, aby při eliminaci každého devátého zůstali na lodi všichni studenti a všichni budižkničemové skončili přes palubu?*

V podobném znění najdeme tento příklad u řady autorů, jen místo studentů a budižkničemů na lodi cestují křesťané a Turci, židé a křesťané atp. Podle [4] na tuto úlohu narazíme např. u Abrahama ibn Ezry (1092?–1167), u Nicholase Chuqueta (cca 1445–1488) v jeho *Triparty en la science des nombres*, u Jaqua Ozanama (1640–1718) v *Récréationes mathématiques et physiques*, či v díle *Arithmetica calculatoria et divinatoria*, jehož autorem je Claude François Milliet Dechales (1621–1678).

[9] Analogicky lze tento výsledek získat mimo jiné při volbě $a = 1$, $s = n - i$, $q = k/(k-1)$ a hledání největšího členu posloupnosti, pro který platí $m < ki + 1$. Potom platí $J_k(i,n) = ki + 1 - m$.

Problém však dlouho postrádal snahu o matematické řešení. Pro správnou volbu rozestavení byla vždy po ruce vhodná mnemotechnická pomůcka. Uvedeme její anglickou, francouzskou, latinskou a německou variantu (podle [1]):[10]

- From numbers' aid and art, never will fame depart.
- Mort, tu ne falliras pas, En me livrant le trépas!
- Populeam virgam mater regina ferebat.
- Gott schlug den Mann in Amalek; Den Israel bezwang.

Při bližším pohledu mají všechny tyto věty jedno společné – a sice rozmístění samohlásek:

$$OUEAIAAEEIAEEA.$$

Použitím jednoduchého šifrovacího klíče, v němž pořadí samohlásky v abecedě určuje počet po sobě následujících cestujících ($A = 1$, $E = 2$, $I = 3$, $O = 4$, $U = 5$), dostaneme posloupnost, ve které je třeba všechny rozestavit do kruhu (označme studenty $S$, budižkničemy $B$):

$$\underbrace{SSSS}_{O=4}\underbrace{BBBBB}_{U=5}\underbrace{SS}_{E=2}\underbrace{B}_{A=1}\underbrace{SSS}_{I=3}\underbrace{B}_{A=1}\underbrace{S}_{A=1}\underbrace{BB}_{E=2}\underbrace{SS}_{E=2}\underbrace{BBB}_{I=3}\underbrace{S}_{A=1}\underbrace{BB}_{E=2}\underbrace{SS}_{E=2}\underbrace{B.}_{A=1}$$

V japonské literatuře byla velmi oblíbená následující úloha Mamakodate:

**Úloha 2.** *Bohatý farmář měl 30 dětí, 15 z prvního a 15 z druhého manželství. Jeho druhá manželka jej přemluvila, aby určili jediného dědice (a předešli tak pozdějšímu rozdrobení majetku), a vychytrale rozestavila děti do kruhu tak, že při rozpočítávání každý desátý vypadl z úvah o dědictví. Když bylo takto vyřazeno již 14 dětí z prvního manželství, začal farmář tušit zradu. Rozpočítávání zastavil a navrhl změnit směr otáčení a začít počítat od posledního potomka z prvního manželství. Pomohla mu tato změna, nebo se dědicem stalo i přesto dítě vychytralé ženy?*

Pro řešení této úlohy[11] opět existovala šikovná mnemotechnická pomůcka: *Rex paphi cum gente bona dat signa serena.* Pokud by děti z prvního a druhého manželství byly seřazeny podle analogického šifrovacího klíče jako v úloze 1, pak by dědictví získalo dítě z prvního manželství, takže změna by farmáři pomohla.

Zachováme-li předchozí značení, jde v úlohách 1 a 2 v podstatě o Josephův problém pro $n = 30$ a $k = 9$, resp. $k = 10$, ovšem v tomto případě nehledáme $J_9(30)$, $J_{10}(30)$, ale zajímá nás samotný průběh postupné eliminace. Pro tento účel je vhodné definovat permutaci (viz např. [6])

$$P_J(n,k) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_n \end{pmatrix},$$

[10] Vzhledem k dosavadní absenci české analogie této mnemotechnické pomůcky si dovolujeme navrhnout větu: Bouře zmařila nám nejlepší náš „veleplán“.

[11] V případě $k = 10$ jde o tzv. *decimační* problém. Historicky byla decimace (neboli odstranění každého desátého) používána jako tvrdá forma vynucování disciplíny v římských legiích, např. při trestání vzpoury. Legie byla rozdělena do desetičlenných skupin, v nichž se losovalo a ten, na koho padl los, byl popraven ostatními vojáky. Dnes se s decimací setkáme např. při snižování počtu vzorků signálu při jeho zpracování.

která popisuje situaci, kdy první je eliminována osoba na pozici $j_1$,[12] druhá je vybrána osoba na pozici $j_2$ atd., poslední zůstává osoba na pozici $j_n$, tj. $j_n = J_k(n)$.

Uvedeme jednoduchý ilustrační příklad. Uvažujme případ $n = 4$ a $k = 2$. Josephova permutace v tomto případě má podobu

$$P_J(4,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

K výpočtu Josephovy permutace $P_J(n,k)$ lze použít dostupný matematický software, např. program `Mathematica`. Stačí po vyvolání balíku *Combinatorica* zadat příkaz `InversePermutation[Josephus[n,k]]` a obdržíme hledaný výsledek. Pokusme se nyní odpovědět na několik jednoduchých otázek spojených s permutacemi $P_J(n,k)$.

**Otázka první:** Pro které hodnoty $k > 1$ dostaneme pro pevné $n$ identitu, tj. osoba na $k$-tém místě je eliminována jako $k$-tá v pořadí?

Tato situace nastane např. pro $k = n! + 1$ nebo $k = L + 1$, kde $L$ označuje nejmenší společný násobek čísel 1, 2, …, $n$.

**Otázka druhá:** Pro které hodnoty $k$ je osoba na prvním místě vybrána jako poslední, osoba na druhém místě jako předposlední atd. až osoba na posledním místě v permutaci jako první?

Podobně jako v předchozím případě lze volit např. $k = n!$ nebo $k = L$.

**Otázka třetí:** Lze pro libovolnou permutaci $P$ najít takové $k$, aby permutace odpovídala zvolenému postupu eliminace pro krok $k$?

Odpověď na tuto otázku je negativní. Jak ukazuje např. [18], vhodným protipříkladem může být permutace

$$P_J(6,k) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Pokud by totiž jako první měla být eliminována osoba na první pozici, musela by platit kongruence $k \equiv 1 \pmod 6$. Dále pokud by jako druhá měla být vybrána osoba na třetí pozici, muselo by platit $k \equiv 2 \pmod 5$, a podobně třetí eliminovaná osoba na páté pozici by odpovídala podmínce $k \equiv 2 \pmod 4$. Tyto kongruence však nelze splnit zároveň pro žádné přirozené číslo $k$.

**Otázka čtvrtá:** Kolik existuje pro dané $n$ celkem různých Josephových permutací?

Pro pevně zvolené $n$ existuje celkem $L$ různých Josephových permutací, viz např. [6]. Množina všech těchto permutací pro dané $n$ má přitom zajímavou strukturu. Je-li $n = 2$, resp. $n = 3$, tvoří všechny Josephovy permutace symetrickou grupu $\mathbb{S}_2$, resp. $\mathbb{S}_3$. Je-li $n = 4$, resp. $n = 5$, tvoří všechny Josephovy permutace alternující grupu $\mathbb{A}_4$, resp. $\mathbb{A}_5$. Pro $n \geq 6$ přestává být množina těchto permutací uzavřená vůči násobení a existenci inverzního prvku, viz [5].

**Otázka pátá:** Představme si, že stojíme v kruhu $n$ lidí na pozici $q$ a máme možnost si zvolit $k$. Existuje vždy takové $k$, při jehož volbě zůstaneme v kruhu jako poslední?

Jestliže platí $q = n$, lze se triviálně zachránit volbou $k = 1$. Je-li $q = 1$, lze volit $k = L$ (viz otázka druhá). Pro $n = 2$ stačí vybrat sudé $k$ v případě $q = 1$, resp. liché $k$

[12] To znamená, že v případě $k \leq n$ je $j_1 = k$, v případě $k > n$ platí $k \equiv j_1 \pmod n$, kde $0 \leq j_1 < n$.

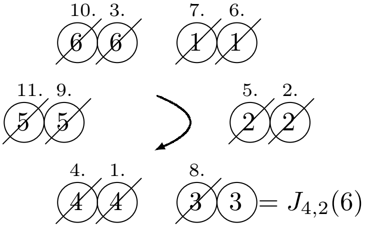
v situaci $q = 2$. V dalších úvahách lze tedy předpokládat, že $1 < q < n$ a $n > 2$. Dále je dobré si uvědomit, že pokud bychom místo eliminačního kroku $k$ zvolili krok $L - k + 1$ a otočili směr rozpočítávání, obdrželi bychom tentýž výsledek. Lze proto bez újmy na obecnosti uvažovat jen případ $q > n/2$. Podle Bertrandova postulátu pak existuje prvočíslo $p$ takové, že $n/2 < p < n$. Jako hledaný krok $k$ můžeme zvolit takové číslo, pro které platí soustava kongruencí

$$\begin{aligned} k &\equiv 1 \pmod{\frac{L}{p}}, \\ k &\equiv q + 1 - n \pmod{p}. \end{aligned}$$

K jejímu řešení můžeme použít např. čínskou větu o zbytcích, neboť čísla $p$ a $L/p$ jsou nesoudělná. Takové $k$ lze vždy najít.

## 5. Kočičí varianta

Předpokládejme nyní, že každá osoba stojící v kruhu má více životů (v době počítačových her nejde o nepředstavitelnou variantu). Zachovejme předchozí značení $n$ pro počet osob v kruhu, $k$ pro eliminační krok a označme $l$ počet životů každé osoby a $J_{k,l}(n)$ pozici, která zůstane při rozpočítávání jako poslední ve hře. Pro $l = 1$ jde o klasický Josephův problém, který jsme diskutovali již dříve. Situací pro obecné $l \in \mathbb{N}$ se zabývají Frank Ruskey a Aaron Williams v článku [16]. Na základě přísloví „Kočka má sedm životů“ zavádí pojmenování „kočičí Josephův problém“. Na obrázku 2 je znázorněna situace $n = 6$, $k = 4$, $l = 2$. Je zřejmé (srovnej s obr. 1), že zatímco $J_4(6) = 5$, v případě dvou životů je již $J_{4,2}(6) = 3$.




Obr. 2. Postupná eliminace každé čtvrté z šesti osob v kruhu, má-li každá osoba dva životy.

V případě, kdy čísla $n$ a $k$ jsou nesoudělná, nezávisí $J_{k,l}(n)$ na počtu životů $l$ a není nutné hledat nový způsob řešení. Je tedy zřejmé, že v případě původní historické úlohy ($n = 41$, $k = 3$) by výsledek neovlivnil ani libovolný počet životů navíc. Ruskey a Williams ukazují, že pro pevně zvolené $n$ a $k$ začíná $J_{k,l}(n)$ s rostoucím $l$ vykazovat stabilní chování, konkrétně platí

$$J_{k,l}(n) = \text{ konst.} \qquad \forall\, l \geq F_{n+2},$$

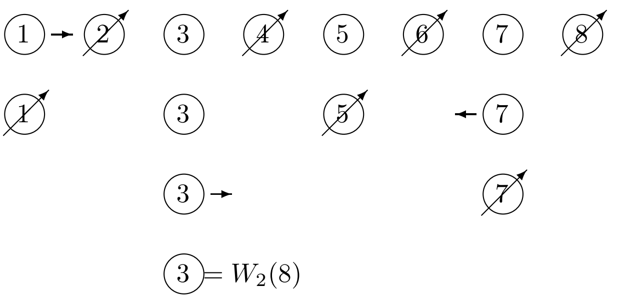
kde $F_n$ označuje $n$-té Fibonacciho číslo, tj. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_i = F_{i-2} + F_{i-1}$ pro $i = 2, 3, \ldots$. Tato mez se jeví jako velmi neostrá a předpokládá se, že bude v budoucnosti možné ji ještě výrazně zpřesnit.

V dalším výsledku [16] je dokázáno, že pro pevně zvolené $n$ a $J_{k,l}(n)$ lze vždy najít odpovídající hodnotu $k$ nezávislou na počtu životů $l$, tj. pokud by Josephus stál v kruhu $n$ na $i$-té pozici a měl možnost zvolit $k$, vždy by se mohl zachránit šikovnou volbou $k$ tak, aby zůstal naživu jako poslední, tj.

$$i = J_{k,l}(n) \qquad \forall\, l \in \mathbb{N}.$$

## 6. Lineární varianta a (ne-)šťastná třináctka

Nyní stručně nastíníme lineární variantu rozpočítávací úlohy. Uvažujme $n$ lidí stojících vedle sebe v řadě. Z jednoho konce řady odpočítáváme a eliminujeme každého druhého. Když dojdeme na konec řady, pokračujeme zpětným chodem k začátku atd. (viz obrázek 3 pro $n = 8$). Kdo zůstane při tomto způsobu rozpočítávání jako poslední (tuto pozici označíme jako $W_2(n)$)?




Obr. 3. Postupná eliminace každé druhé v zástupu osmi osob.

Ačkoli tato varianta úlohy vykazuje některé podobné vlastnosti jako Josephův problém, v mnoha směrech se velmi liší. Pro srovnání s hodnotami $J_2(n)$ uvádíme v následující tabulce hodnoty $W_2(n)$ pro $n = 1, \ldots, 15$.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $W_2(n)$ | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 9 | 9 | 11 | 11 | 9 | 9 | 11 |

Na první pohled se zdá, že v této variantě se výrazně zmenšuje množina pozic zaručujících přežití. C. Gröer to potvrdil v [13], kde odvodil jednoduchý vztah pro výpočet $W_2(n)$ založený na rozvoji čísla ve dvojkové soustavě. Označme $N = n$, je-li $n$ liché, nebo $N = n - 1$, je-li $n$ sudé. Za tohoto předpokladu lze číslo $N$ zapsat ve tvaru:

$$N = \sum_{j=0}^{k} b_j 2^j\,, \qquad \text{kde} \;\; b_0 = b_k = 1.$$

Matematickou indukcí lze dokázat vzorec:

$$W_2(n) = 1 + \sum_{j=1}^{k}{}^{*}\, b_j 2^j,$$

kde součet $\sum^*$ je počítán pouze přes liché hodnoty $j$. Odtud pak plyne, že zatímco $J_2(n)$ může nabývat libovolné liché hodnoty (pro vhodné $n$), $W_2(n)$ může nabývat jen vybraných lichých hodnot, mezi něž mj. nepatří 5, 13 atd. Článek [13] s trochou nadsázky uvádí tuto skutečnost do souvislosti s tím, že číslo 13 bývá považováno za nešťastné,[13] což odpovídá tomu, že třináctá pozice nikdy není vítězná při takovém rozpočítávání, ať už volíme $k = 2$ nebo $k = 3$ při libovolném počtu lidí v řadě. Matematicky podloženou neoprávněnost triskaidekaphobie (fobie z třináctky) nám však zaručí volba $k = 4$. Eliminujeme-li každého čtvrtého v řadě 20 lidí, právě třináctý přežije jako poslední.

Na závěr poznamenejme, že třináctku skutečně nelze z matematického pohledu považovat za nešťastné číslo. Stačí si uvědomit, jak jsou definována tzv. „happy numbers“: označme součet čtverců cifer čísla $n$ jako $s_1$; dále součet čtverců cifer čísla $s_1$ jako $s_2$ atd. Jestliže existuje $s_i = 1$ pro nějaké $i \geq 1$, označíme číslo $n$ jako happy number. Mezi první šťastná (= happy) čísla podle této definice patří 1, 7, 10, **13**, 19, 23, .... Podobně tzv. „lucky numbers“ pojmenovaná podle Stanisława Ulama (1909–1984) najdeme analogicky jako prvočísla při použití Eratosthenova síta. Napišme několik prvních přirozených čísel postupně za sebou. Zakroužkujme jedničku. První nezakroužkované číslo v seznamu je dvojka – škrtneme ji a spolu s ní všechna nezakroužkovaná sudá čísla. Dále v seznamu zbývají čísla 1, 3, 5, 7, 9, .... Druhá v pořadí je trojka – proto v seznamu škrtneme každé třetí dosud neškrtnuté číslo atd. Zůstanou tak postupně jen šťastná (= lucky) čísla: 1, 3, 7, 9, **13**, 15 atd.[14]

## 7. Závěr

Řadu dílčích úloh z předchozích řádků lze snadno zařadit jako motivační příklady do výuky na střední škole. Přejeme čtenářům, aby se nikdy nedostali do Josephovy situace, kdy by museli podobný problém řešit kvůli záchraně vlastního života, a aby se s podobnými úlohami vždy setkávali především v rámci rekreační matematiky či teorie algoritmů.

**Poděkování.** Autorka děkuje prof. RNDr. Michalu Křížkovi, DrSc., Ing. Ľubomíře Balkové, Ph.D., a doc. RNDr. Martinu Klazarovi, Dr., za cenné připomínky a pečlivé pročtení celého textu.

[13] Zde je třeba poznamenat, že číslo 7 bývá naopak považováno za šťastné, přestože rovněž pro žádné $n$ nenastane situace $W_2(n) = 7$.

[14] Zvídavým a pozorným čtenářům dlužíme odpověď na otázky k úloze H. E. Dudeneyho. Tady je (uvádíme nejmenší hodnoty $k$ splňující dané podmínky): 1. $J_k(13) = 1$ pro $k = 21$, 2. $J_k(3, 13) = 1$ pro $k = 100$.

L i t e r a t u r a

[1] Ahrens, W.: *Mathematische Unterhaltungen und Spiele.* B.-G. Teubner, Leipzig, 1901, 286–301.

[2] Burke, S., Davis, R.: *The ABBA modification of the Josephus problem.* [cit. 19. 1. 2012] Dostupné z: `http://www.units.muohio.edu/sumsri/sumj/2001/ABBA.pdf`

[3] Busche, E.: *Über die Schubert'sche Lösung eines Bachet'schen Problems.* Math. Ann. *47* (1) (1896), 105–112.

[4] Cantor, M.: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* Bd. II., III. (2. Aufl.), B.-G. Teubner, Leipzig, 1900–1901.

[5] Casburn, L., Phan, T.-L.: *The orthogonal Josephus problem.* [cit. 19. 12. 2011] Dostupné z: `http://www.users.muohio.edu/porterbm/sumj/2001/Orthog.pdf`

[6] Dowdy, J., Mays, M. E.: *Josephus Permutations.* J. Combin. Math. Combin. Comput. *6* (1989), 125–130.

[7] Dudeney, H. E.: *Amusement in mathematics.* [cit. 18. 1. 2012] Dostupné z: `http://www.gutenberg.org/etext/16 713`.

[8] Euler, L.: *Observationes circa novum et singulare progressionem genus.* Novi Commentarii academiae scientarum Petropolitane *20* (1776), 123–139.

[9] Feuchtwanger, L.: *Židovská válka, 1. díl trilogie Josephus Flavius.* Nakladatelství Svoboda, 1992.

[10] Flavius, J.: *O starobylosti Židů / Můj život.* Arista, edice Antická knihovna, 2006.

[11] Flavius, J.: *Válka židovská II.* Nakladatelství Svoboda, 1992.

[12] Graham, R. L., Knuth, D. E., Patashnik, O.: *Concrete mathematics: A foundation for computer science.* Addison-Wesley, 1994.

[13] Groër, C.: *The mathematics of survival: from antiquity to the playground.* Amer. Math. Monthly *110* (9) (2003), 812–825.

[14] Halbeisen, L., Hungerbühler, N.: *The Josephus problem.* J. Théor. Nombres Bordeaux *9* (1997), 303–318.

[15] Oring, E.: *On the tradition and mathematics of counting-out.* Western Folklore *56* (2) (1997), 139–152.

[16] Ruskey, F., Williams, A.: *The Feline Josephus problem.* Theory Comput. Syst. *50* (2012), 20–34.

[17] Schumer, P. D.: *The Josephus problem: once more around.* Math. Mag. *75* (1) (2002), 12–17.

[18] Schumer, P. D.: *Mathematical journeys.* John Wiley & Sons, Inc., 2004.

[19] Tait, P. G.: *On the generalization of the Josephus problem.* Scientific Papers II, Cambridge University Press, 1900, 432–435.

[20] Thériault, N.: *Generalizations of the Josephus problem.* Util. Math. *58* (2000), 161–173.