David Břeň
Základní rovnice rovnováhy plazmatu v tokamacích

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 57 (2012), No. 2, 140--146

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/142921`

Základní rovnice rovnováhy plazmatu v tokamacích

David Břeň, Praha

V článku odvodíme Gradovu-Šafranovovu rovnici. Nejprve budeme pracovat v kartézském systému souřadnic, který je sice pro fúzní plazma téměř zcela nepoužitelný, ale postup a význam veličin je zde naopak velmi zřejmý. Poté si tvar této rovnice ukážeme ve válcovém systému souřadnic, tedy v systému nejvíce používaném pro popis plazmatu v tokamacích. Gradova-Šafranovova rovnice je nelineární eliptická parciální diferenciální rovnice. Je rovnovážnou magnetohydrodynamickou (MHD) rovnicí a je výhodná pro popis takové konfigurace plazmatu, kdy je popis nezávislý na jedné souřadnici a lze pak plazma popisovat pouze pomocí dvou souřadnic.

V další části článku odvodíme vztah pro Pfirschův-Schlüterův proud, což je toroidální proud kompenzující vertikální rozdělení nábojů v plazmatu tokamaku. Odvození je opět v rámci MHD, která se v případě tokamaků ukazuje jako zcela dostatečná.

1. Gradova-Šafranovova rovnice

Pro jednoduchost předpokládejme, že konfigurace systému je taková, že nezávisí na jedné ze souřadnic, např. y, tj. $\partial/\partial y \to 0$. Magnetické pole tohoto systému lze pak popsat vektorovým potenciálem

$$\mathbf{A}(x,z) = [A_x(x,z), A_y(x,z), A_z(x,z)] \,,$$

a

$$\mathbf{B}(x,z) \equiv \nabla \times \mathbf{A}(x,z) = \left[-\frac{\partial A_y(x,z)}{\partial z},\, B_y(x,z),\, \frac{\partial A_y(x,z)}{\partial x}\right] . \tag{1.1}$$

Poslední vztah lze přepsat do tvaru (pro jednoduchost budeme vynechávat nezávislé parametry)

$$\mathbf{B}(x,z) = \nabla A_y \times \mathbf{e}_2 + B_y \mathbf{e}_2 \,, \tag{1.2}$$

kde $\mathbf{e}_2$ je jednotkový vektor ve směru y. Samozřejmě by bylo možné vyjádřit i složku B_y pomocí vektorového potenciálu, ale pro naše potřeby to není nutné. Je-li plazma ve stacionárním stavu, pak je v systému rovnováha mezi gradientem tlaku a hustotou Lorentzovy síly

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \,. \tag{1.3}$$

RNDr. David Břeň, Ph.D., Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT, Břehová 7, 115 19 Praha 1, e-mail: david.bren@fjfi.cvut.cz

Odtud je vidět, že gradient tlaku je kolmý jak na vektor proudové hustoty, tak i na vektor indukce magnetického pole a tlak p je konstantní podél magnetických indukčních čar. Navíc, protože je systém nezávislý na souřadnici y, je také

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0\,. \tag{1.4}$$

Složku magnetického pole, resp. proudové hustoty v rovině kolmé ke směru y označíme $\mathbf{B}_\perp = (B_x, 0, B_z)$, resp. $\mathbf{j}_\perp = (j_x, 0, j_z)$, a platí tedy, že $\mathbf{j}_\perp \times \mathbf{B}_\perp = 0$, tj. že $\mathbf{j}_\perp$ a $\mathbf{B}_\perp$ jsou rovnoběžné. Rovnici (1.3) s přihlédnutím k (1.4) můžeme rozepsat ve složkách

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = (j_y B_z - j_z B_y,\, 0,\, j_x B_y - j_y B_x) = (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{B}_\perp) j_y - (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{j}_\perp) B_y\,. \tag{1.5}$$

Nyní vyjádříme jednotlivé členy této rovnice. Z Maxwellových rovnic máme v případě statické rovnováhy vztah

$$\mu_0\, \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}\,. \tag{1.6}$$

V našem případě můžeme vztah (1.6) vyjádřit pomocí (1.1) ve tvaru

$$\mu_0\, \mathbf{j} = \left(-\frac{\partial B_y}{\partial z},\, -\nabla^2 A_y,\, \frac{\partial B_y}{\partial x} \right)\,. \tag{1.7}$$

Pro složku j_y vektoru proudové hustoty tedy platí

$$j_y = \frac{1}{\mu_0} \left(-\nabla^2 A_y \right) \tag{1.8}$$

(platí, že $\partial A_y / \partial y = 0$). Z definice kolmé složky proudové hustoty a z (1.7) dostaneme

$$\mathbf{j}_\perp = \frac{1}{\mu_0} \left(\nabla B_y \times \mathbf{e}_2 \right)\,. \tag{1.9}$$

Odtud je vidět, že gradient B_y (navíc $\partial B_y / \partial y = 0$) je kolmý k $\mathbf{j}_\perp$ (a tedy i k $\mathbf{B}_\perp$, jsou rovnoběžné). Složka B_y magnetického pole se tedy podél magnetické indukční čáry nemění (podobně jako tlak p). Dále ze vztahů (1.2) a (1.9) vyjádříme

$$(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{B}_\perp) = \mathbf{e}_2 \times (\nabla A_y \times \mathbf{e}_2) = \nabla A_y \tag{1.10}$$

a

$$(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{j}_\perp)\, B_y = \frac{B_y}{\mu_0}\, \nabla B_y\,, \tag{1.11}$$

protože $\nabla A_y \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ a $\nabla B_y \cdot \mathbf{e}_2 = 0$, ($\partial A_y / \partial y = 0$ a $\partial B_y / \partial y = 0$). Rovnici (1.5) pak již lze vyjádřit pomocí (1.8)–(1.11)

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{B}_\perp)\, j_y - (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{j}_\perp)\, B_y = -\frac{1}{\mu_0}\, \nabla A_y \left(\nabla^2 A_y \right) - \frac{B_y}{\mu_0}\, \nabla B_y = \nabla p\,. \tag{1.12}$$

Tlak p a složka B_y jsou podél magnetických indukčních čar konstantní a jsou funkcí pouze složky A_y vektorového potenciálu. Protože B_y je podél indukční čáry konstantní, můžeme tlak p a složku B_y vyjádřit jako funkce složky A_y vektorového potenciálu, tj. $p = p(A_y)$, $B_y = B_y(A_y)$. Gradienty obou veličin pak snadno přepíšeme do tvaru

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial A_y} \nabla A_y \quad \text{a} \quad \nabla B_y = \frac{\partial B_y}{\partial A_y} \nabla A_y$$

a rovnici (1.12) pak lze vyjádřit takto

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial A_y} \left(p + \frac{B_y^2}{2\mu_0} \right) , \tag{1.13}$$

což je Gradova-Šafranovova rovnice v kartézských souřadnicích.

Vidíme tedy, že magnetické pole tvoří magnetické plochy, pomocí nichž můžeme toto pole popsat ve 2-D plochách. Stojí za povšimnutí, že složka A_y v této rovnici hraje úlohu jak nezávisle, tak i závisle proměnné.

Takto zvolená geometrie je vhodná pro výpočet např. plazmatu sluneční koróny, ale je pramálo vhodná pro výpočet plazmatu tokamaku, který má toroidální symetrii. Odvození pro tuto geometrii ve válcových souřadnicích (R, ϕ, z) je zcela analogické předchozímu. V toroidální geometrii budeme hledat tvar magnetických ploch v souřadnicích R a z, zatímco na otočení, tedy na úhlu ϕ bude naše konfigurace nezávislá, tj. všude na těchto plochách bude platit $\partial/\partial\phi \to 0$. Zavedeme funkci ψ tak, že povrch magnetické trubice je dán vztahem $\psi(R, z) = \text{konst.}$

Magnetické pole $\mathbf{B}$ pak v případě válcových souřadnic vyjádříme ve tvaru

$$\mathbf{B} = \left(-\frac{\partial A_\phi(R,z)}{\partial z},\ B_\phi(R,z),\ \frac{1}{R} \frac{\partial \left(R A_\phi(R,z)\right)}{\partial R} \right) . \tag{1.14}$$

Opět budeme hledat takové plochy, ve kterých budou „ležet“ magnetické indukční čáry, tj. aby platilo

$$\mathbf{B}\,(R,z) \cdot \nabla\psi\,(R,z) = 0\,. \tag{1.15}$$

Ve válcových souřadnicích obecně je $\nabla\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial R}, \frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}, \frac{\partial\psi}{\partial z} \right)$. V našem případě je prostřední člen nulový a z rovnice (1.15) pak vyjádříme

$$\frac{\partial \left(R A_\phi(R,z)\right)}{\partial z} \frac{\partial\psi}{\partial R} = \frac{\partial \left(R A_\phi(R,z)\right)}{\partial R} \frac{\partial\psi}{\partial z}\,. \tag{1.16}$$

Tato podmínka je splněna tehdy, když $R A_\phi(R,z) = f\left(\psi(R,z)\right)$. Bez újmy na obecnosti můžeme libovolnou funkci f zvolit tak, aby $\psi = R A_\phi(R,z)$. Pomocí této funkce pak lze magnetické pole vyjádřit z definičního vztahu (1.14)

$$\mathbf{B} = \left(-\frac{1}{R}\frac{\partial\phi}{\partial z},\ B_\phi,\ \frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R} \right) , \tag{1.17}$$

kde jsme již pro jednoduchost vynechali proměnné. Toto pole je podle (1.3) opět kolmé ke gradientu tlaku, tedy platí

$$\mathbf{B}\cdot\nabla p = \left(B_R \frac{\partial p}{\partial R} + B_\phi \frac{1}{R}\frac{\partial p}{\partial\phi} + B_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) = -\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial R} + 0 + \frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R}\frac{\partial p}{\partial z} = 0\,. \tag{1.18}$$

To vede na podmínku

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}\,\frac{\partial p}{\partial R} = \frac{\partial\psi}{\partial R}\,\frac{\partial p}{\partial z}\,. \tag{1.19}$$

Podmínku (1.19) lze splnit tak, že tlak p bude funkcí magnetické plochy $p(\psi)$. Ze vztahu (1.12) je patrno, že ∇p a $\mathbf{j}$ jsou navzájem kolmé vektory

$$\mathbf{j}\cdot\nabla p = 0\,. \tag{1.20}$$

Vektor proudové hustoty $\mathbf{j}$ opět vyjádříme z Maxwellovy rovnice (1.6) ve válcových souřadnicích

$$\begin{aligned} \mu_0 j_R &= -\frac{\partial B_\phi}{\partial z}\,,\\ \mu_0 j_\phi &= \frac{\partial B_R}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial R}\,,\\ \mu_0 j_z &= \frac{1}{R}\,\frac{\partial (RB_\phi)}{\partial R}\,. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Ve vztahu (1.20) je derivace podle složky ϕ rovna nule a s pomocí (1.21) pak obdržíme podmínku

$$\frac{\partial (RB_\phi)}{\partial z}\,\frac{\partial p}{\partial R} = \frac{\partial (RB_\phi)}{\partial R}\,\frac{\partial p}{\partial z}\,. \tag{1.22}$$

Relaci automaticky splníme, pokud je RB_ϕ stejně jako tlak p funkcí magnetické plochy ψ. Nyní již můžeme vyjádřit rovnici rovnováhy (1.3) ve válcových souřadnicích pomocí (1.17) a (1.21). Složka R je pak

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial R} &= \frac{\partial p}{\partial \psi}\,\frac{\partial\psi}{\partial R} = j_\phi B_z - j_z B_\phi = \\ &= \left[\frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{1}{R}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{\mu_0}\,\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\,\frac{\partial\psi}{\partial R}\right)\right]\frac{1}{R}\,\frac{\partial\psi}{\partial R} - \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{R}\,\frac{\partial (RB_\phi)}{\partial\psi}\,\frac{\partial\psi}{\partial R}\right)B_\phi\,, \end{aligned} \tag{1.23}$$

což lze jednoduše upravit do tvaru

$$\Delta^*\psi + R^2\mu_0\,\frac{\partial p}{\partial\psi} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial (RB_\phi)^2}{\partial\psi} = 0\,, \tag{1.24}$$

kde operátor

$$\Delta^* \equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + R\,\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\right)\right]. \tag{1.25}$$

Toto je Gradova-Šafranovova rovnice ve válcových souřadnicích, kterou lze ještě dále přepsat s pomocí proudu, který teče v poloidálním směru (ne celkovým proudem v plazmatu!) a pomocí něhož můžeme vyjádřit složku ϕ magnetického pole

$$B_\phi = \frac{\mu_0\, I}{2\pi R}\,. \tag{1.26}$$

Protože je B_ϕ na celé magnetické ploše ψ konstantní a je tedy funkcí ψ, je také poloidální proud I funkcí pouze ψ. Rovnici (1.24) pak lze psát ve tvaru

$$\Delta^*\psi + R^2\mu_0\frac{\partial p}{\partial\psi} + \frac{\mu_0^2}{8\pi^2}\,\frac{\partial I^2}{\partial\psi} = 0\,. \tag{1.27}$$

V rovnici vystupují jako proměnné tlak p a poloidální proud I jako funkce magnetické plochy ψ. Ta zde vystupuje, jak již bylo zmíněno dříve, jako funkce jak závisle, tak i nezávisle proměnná.

Funkce ψ je tedy taková, že povrch magnetické trubice je dán vztahem $\psi(R, z) =$ konst. a je nezávislá na ϕ. Lze ji tedy použít jako třetí souřadnici vedle toroidálního a poloidálního úhlu. Plochy $\psi(R, z) =$ konst. jsou také plochami konstantního tlaku a nazývají se plochami konstantního magnetického toku. Lze navíc ukázat, že funkci ψ lze volit tak, aby byla rovna toku poloidálního magnetického pole. Má i řadu jiných vlastností, lze ji např. použít pro popis dvourozměrného fázového prostoru, kde vystupuje v rovnicích, které mají tvar podobný Hamiltonovým kanonickým rovnicím. Protože Hamiltonova funkce se nemění v systému nezávislém explicitně na čase, může mít v systému explicitně nezávislém na parametru (úhlu) ϕ funkce ψ úlohu analogickou té, kterou hraje v teoretické mechanice Hamiltonova funkce [4].

2. Pfirschův-Schlüterův proud

Díky driftu zakřivení a gradientu B driftu dochází v plazmatickém toru k vertikálnímu rozdělení nábojů. Složka proudu, resp. proudové hustoty, tekoucí podél magnetických indukčních čar v toroidálním plazmatu vede k odstranění této nábojové separace, a tedy k udržení rovnováhy a nazývá se *Pfirschův-Schlüterův* proud.

Ze vztahu (1.3) vyplývá nejenom kolmost pole $\mathbf{B}$ ke gradientu tlaku, ale i proudové hustoty $\mathbf{j}$. Vynásobíme-li ho zleva na obou stranách jednotkovým vektorem magnetického pole $\mathbf{e}_B \equiv \mathbf{B}/B$, obdržíme

$$\frac{\mathbf{e}_B}{B} \times \nabla p = \mathbf{e}_B \times (\mathbf{j} \times \mathbf{e}_B) = \mathbf{j}(\mathbf{e}_B)^2 - \mathbf{e}_B(\mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_B) = \mathbf{j} - \mathbf{j}_\parallel = \mathbf{j}_\perp \,. \tag{2.1}$$

V případě statické rovnováhy máme pro proudovou hustotu vyjádření z Maxwellových rovnic (1.6) a platí pak, že $\nabla \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot (\mathbf{j}_\perp + \mathbf{j}_\parallel) = 0$, a tedy

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_\parallel = -\nabla \cdot \mathbf{j}_\perp = -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{e}_B}{B} \times \nabla p\right) = -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{B}}{B^2} \times \nabla p\right) = -\nabla p \cdot \left(\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{B^2}\right) \,. \tag{2.2}$$

Protože v posledním členu je

$$\left(\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{B^2}\right) = \frac{1}{B^2}\, \nabla \times \mathbf{B} + \nabla\left(\frac{1}{B^2}\right) \times \mathbf{B} \,, \tag{2.3}$$

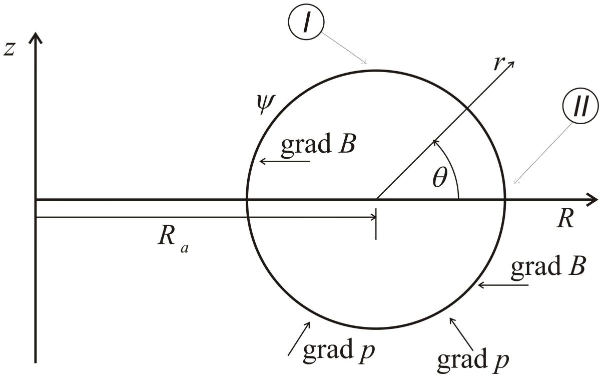
můžeme výraz (2.2) přepsat do tvaru

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_\parallel = -\nabla p \cdot \left(\frac{1}{B^2}\, \mu_0 \, \mathbf{j} + \nabla\left(\frac{1}{B^2}\right) \times \mathbf{B}\right) \,, \tag{2.4}$$

kde jsme opět použili Maxwellovy rovnice (1.6). Podle (1.20) je vektor proudové hustoty kolmý na vektor gradientu tlaku, a proto můžeme (2.4) zjednodušit do tvaru

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_\parallel = \frac{2\nabla p}{B^2} \cdot (\nabla B \times \mathbf{e}_B) \,. \tag{2.5}$$

Protože $\mathbf{j}_\parallel$ míří ve směru tečny magnetické indukční čáry, můžeme divergenci $\nabla \cdot \mathbf{j}_\parallel$ nahradit parciální derivací podél magnetické indukční čáry $\nabla \mathbf{j}_\parallel \to \partial j_\parallel / \partial s$. Tu pak



lze vyjádřit pomocí poloidálního úhlu: $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\iota}{2\pi R}\frac{\partial}{\partial\theta}$. Parametr ι (tzv. rotační transformace) je úhel, o který se pootočí magnetická indukční čára v poloidálním směru, když obejdeme celý obvod magnetického toru o plný úhel 2π. Tento úhel lze vyjádřit pomocí parametru známého jako tzv. *safety factor*, bezpečnostní faktor (někdy uváděn i jako „zásoba stability“), který také udává míru stáčení magnetických indukčních čar. Lze ho definovat pomocí počtu toroidálních oběhů nutných k jednomu poloidálnímu oběhu:

$$q \equiv \frac{\Delta\phi}{2\pi} \tag{2.6}$$

a úhel ι je pak $\iota = 2\pi/q$. Gradient tlaku míří vždy kolmo k ploše $\psi =$ konst. (viz obrázek), tedy v případě kruhového průřezu plazmatu míří ve směru $\mathbf{r}$. Můžeme tedy psát místo $\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r}\mathbf{e}_r$. Výraz na pravé straně (2.5) lze dále snadno odhadnout, uvážíme-li v prvním přiblížení, že velikost toroidálního magnetického pole je nepřímo úměrná vzdálenosti od osy z, tedy $B = \alpha/R$. Potom je $\nabla B = -\alpha/R^2\nabla R = -\alpha/R^2\mathbf{e}_R$, kde $\mathbf{e}_R$ je jednotkový vektor ve směru R, rovnoběžný s rovinou (x, y) mířící vždy od osy z. Toroidální magnetické pole míří vždy do nebo z obrázku a vektor $\nabla B \times \mathbf{e}_B$ je pak rovnoběžný s osou z. Úhel θ je tedy doplňkový k úhlu mezi vektory $\nabla B \times \mathbf{e}_B$ a ∇p. Např. v místě I je $\nabla B \times \mathbf{e}_B$ kolmý k povrchu ψ a rovnoběžný s vektorem ∇p, zatímco v místě II jsou k sobě $\nabla B \times \mathbf{e}_B$ a ∇p navzájem kolmé. Rovnici (2.5) můžeme pak přepsat

$$\frac{\Delta\theta}{2\pi R}\frac{\partial j_\parallel}{\partial\theta} = \frac{1}{qR}\frac{\partial j_\parallel}{\partial\theta} = -\frac{2}{RB}\frac{\partial p}{\partial r}\sin\theta\,. \tag{2.7}$$

Podélnou složku proudové hustoty, *Pfirschův-Schlüterův proud*, pak snadno získáme integrací rovnice (2.7) podle úhlu θ

$$j_\parallel = \frac{2q}{B}\frac{\partial p}{\partial r}\cos\theta\,. \tag{2.8}$$

Proud klesá s helicitou magnetických indukčních čar (ta je skrytá v bezpečnostním faktoru q) a magnetickým polem, roste s gradientem tlaku a mění znaménko s poloidálním úhlem.

Literatura

[1] Grad, H., Rubin, H.: *Hydromagnetic equilibria and force-free fields.* Proceedings of the 2nd UN Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy *31*, Geneva: IAEA, 1958, 190.

[2] Shafranov, V. D.: *Plasma equilibrium in a magnetic field.* Rev. of Plasma Phys. *2*, New York: Consultants Bureau (1966), 103.

[3] Mrkvová, H: *Magnetická rovnováha v tokamacích a její rekonstrukce.* FJFI, ČVUT v Praze, Bakalářská práce, 2007.

[4] Schep, T. J.: *Magnetic fields and plasmas.* Transactions of Fusion Science and Technology *45* (2004), 2T, `http://www.carolusmagnus.net/papers/2003/docs/BT_1_Schep.pdf`

[5] Kenro, M.: *Fundamentals of plasma physics and controlled fusion.* `www.rsphysse.anu.edu.au/~jnh112/AIIM/c17/Miyamoto.pdf`

Profilování teoretické fyziky na pražské univerzitě a vazby s pražským působením A. Einsteina před 100 lety[1]

Emilie Těšínská, Praha

Působení Alberta Einsteina v Praze v letech 1911–1912 patří v historii vědy v českých zemích stále k atraktivním, i když dnes již dost podrobně zmapovaným tématům (viz např. [4, 12, 16, 18, 24, 29, 30, 42, 48]). To ovšem neznamená, že již nelze nic dodat. Pokračující bádání v dějinách vědy otvírá stále nové úhly pohledu, které napomáhají stávající obraz dokreslit či upřesnit. V tomto článku se pokusíme pohlédnout

[1] Článek je rozšířenou verzí příspěvku předneseného anglicky na mezinárodní konferenci „*Universities in Central Europe – Crossroads of Scholars from all over the World*“, která se konala v Praze ve dnech 29. září – 2. října 2011 a jejíž jedno zasedání bylo věnováno 100. výročí povolání A. Einsteina na německou univerzitu do Prahy (viz např. [14]).

Mgr. Emilie Těšínská, Ústav pro soudobé dějiny AV ČR, v. v. i., Puškinovo nám. 9, 160 00 Praha 6, e-mail: `tesinska@cesnet.cz`