Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica

L. Konguetsof; Th. Vougiouklis

Constructions d'hyperanneaux à partir d'anneaux

Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica, Vol. 28 (1987), No. 1, 9--13

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/142580`

1987 ACTA UNIVERSITATIS CAROLINAE—MATHEMATICA ET PHYSICA VOL. 28. NO. 1

Constructions d'Hyperanneaux à Partir d'Anneaux

L. KONGUETSOF AND TH. VOUGIOUKLIS

Section de Mathématiques Université Démocrite de Thrace, Xanthi, Greece

Received 17 April 1986

Using two subsets of a ring we define two multiform operations and we prove a necessary and sufficient condition for the construction of hyperrings.

Užitím dvou podmnožin okruhu definujeme multiformní operace a dokazujeme nutnou a postačující podmínku pro konstrukci hyperokruhů.

Посредством двух подмножеств кольца определяем мультиформные операции и доказываем необходимое и достаточное условие для конструкции гиперколец.

A. Introduction

Généralement on appelle hyperstructure algébrique un ensemble X muni d'une, au moins, opération multiforme, c'est-à-dire d'une application $X \times X \to \mathscr{P}(X)$ du produit cartésien $X \times X$ dans l'ensemble des parties de X, qui satisfait certaines propriétés.

Après la définition de l'hypergroupe par F. Marty en 1934 [4] on a commencé l'étude des hyperstructures algébriques d'une façon plus systématique. Le choix des propriétés, qui doivent satisfaire les différentes hyperstructures, est un problème essentiel et on utilise souvent les propritétés connues des structures habituelles avec des adaptations convenables à cause de la complexité qui se présente au calcul.

Let hyperanneaux sont des hyperstructures qui ont été l'objet de recherche de plusieurs chercheurs. Hyperanneau est un ensemble muni de deux opérations multiformes internes telles que l'ensemble est un hypergroupe de Marty par rapport à la première et un demihypergroupe par rapport à la deuxième et en plus cette deuxième opération multiforme distribue bilatéralement la première. Souvent on note additivement la première et multiplicativement la seconde et on les appelle respectivement addition et multiplication.

The results of the paper were presented at Charles University during authors' stay in Prague, Spring 1986.

Deux formes d'hyperanneaux qui ont été étudiés plus que les autres sont celles dont l'une de deux opérations est multiforme tandis-que l'autre opération est univoque. Dans le cas où la multiplication est une opération univoque et l'addition une opération multiforme, nous avons principalement l'hyperanneau de Krasner. Souvent l'hypergroupe additif est celui qu'on appelle hypergroupe canonique. Si l'addition est une opération univoque et la multiplication une opération multiforme, alors nous avons l'hyperanneau multiplicatif qui a été introduit et étudié récemment par R. Rota [5].

Une méthode de recherche d'hyperstructures est celle dans laquelle on utilise des ensembles munis des opérations habituelles ou des ordres a l'aide desquelles on définit des opérations multiformes. Dans cette direction, pour les hyperanneaux, il est possible de trouver des ensembles qui sont des hypergroupes à opérateurs [1], [2], où le domaine d'opérateurs coïncide avec l'ensemble lui-même. C'est-à-dire, l'opération multiforme externe, composition d'opérateurs et d'éléments de l'hypergroupe, est en réalité une nouvelle opération multiforme interne qui sera la multiplication. Dans ce cas la vérification seulement de l'associativité de la multiplication est suffisante de donner une structure d'hyperanneau sous la notion générale. En travaillant de cette façon et en utilisant les P-hyperopérations [6] nous démontrons une condition nécessaire et suffisante d'existance d'une grande classe d'hyperanneaux sous la notion générale.

B. Preliminaire

Une hyperstructure $\langle H, *\rangle$ est un hypergroupe de Marty si l'ensemble H est muni d'une opération multiforme associative non triviale $*$ qui satisfait l'axiome de la reproduction:

$$x*H = H*x = H\,, \quad \forall x \in H\,.$$

Un hypergroupe H pour lequel on définit une opération multiforme externe et distributive par rapport à son opération multiforme interne: $\circ\colon \Omega \times H \to \mathscr{P}(H)$ s'appelle hypergroupe à opérateurs avec pour opérateurs les éléments de Ω [1].

Soit $(H, \cdot)$ un groupe abélien avec élément neutre e et soit P un sous-ensemble quelconque de H. On appelle P-hyperopération [6] l'hyperopération $*^P$ qui se définit sur H par la relation

$$x *^P y = xy(\{e\} \cup P)\,.$$

L'hyperstructure $\langle H, *^P\rangle$ est un hypergroupe commutatif. Si $(H, \cdot)$ est seulement un demi-groupe et $P \subset H$, alors on appelera P-hyperopération celle qui est définie de la façon suivante:

$$x *^P y = \{xy\} \cup (xyP)\,, \quad \forall x, y \in H\,.$$

L'hyperopération qui se définit sur un demi-groupe n'est pas nécessairement associative et elle constitue une généralisation de la P-hyperopération connue.

En effet, nous avons:

$$(x *^P y) *^P z = \{xyz\} \cup (xyzP) \cup (xyPz) \cup (xyPzP)$$
$$x *^P (y *^P z) = \{xyz\} \cup (xyzP) \cup (xyzPP)$$

et les deuxièmes membres ne sont pas nécessairement égaux.

C. Une construction d'hyperanneaux

Soit $(R, +, \cdot)$ un anneau, non nécessairement unitaire ni commutatif. Soit $P_1, P_2 \subset R$ avec $P_1 \neq \emptyset$, $P_2 \neq \emptyset$, $P_1 \neq \{0\}$ et si $1 \in R$ (anneau unitaire) alors $P_2 \neq \{1\}$. Cettes restrictions se posent pour éviter le cas des opérations multiformes triviales.

Nous considérons les P-hyperopérations

$$*: R \times R \to \mathscr{P}(R): (x, y) \mapsto x * y = \{x + y\} \cup (x + y + P_1)$$
$$\circ: R \times R \to \mathscr{P}(R): (x, y) \mapsto x \circ y = \{xy\} \cup (xyP_2)$$

Proposition 1. La condition

$$(RP_1) \cup (RP_1P_2) \subset \{0\} \cup P_1 \tag{I}$$

est nécessaire et suffisante pour que l'opération $\circ$ soit distributive à gauche par rapport à l'opération $*$.

Demonstration. Nous supposons que la condition (I) soit vraie, alors $\forall x, y, z \in R$ nous avons

$$\begin{aligned} x \circ (y * z) &= x \circ (\{y + z\} \cup (y + z + P_1)) = \\ &= (x \circ \{y + z\}) \cup (x \circ (y + z + P_1)) = \\ &= x(y + z) \cup (x(y + z) P_2) \cup (x(y + z + P_1)) \cup (x(y + z + P_1) P_2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (x \circ y) * (x \circ z) &= (\{xy\} \cup (xyP_2)) * (\{xz\} \cup (xzP_2)) = \\ &= \{xy + xz\} \cup (xy + xz + P_1) \cup (xy + xzP_2) \cup (xy + xzP_2 + P_1) \cup \\ &\cup (xyP_2 + xz) \cup (xyP_2 + xz + P_1) \cup (xyP_2 + xzP_2) \cup (xyP_2 + xzP_2 + P_1). \end{aligned}$$

Nous avons aussi:

a) $x(y + z) = xy + xz$,

b) $x(y + z) P_2 \subset xyP_2 + xzP_2$,

c) $x(y + z + P_1) = xy + xz + xP_1 \subset xy + xz + (\{0\} \cup P_1) =$
$= \{xy + xz\} \cup (xy + xz + P_1)$ (condition (I)),

d) $x(y + z + P_1) P_2 \subset xyP_2 + xzP_2 + P_1P_2 \subset xyP_2 + xzP_2 + RP_1P_2 \subset$
$\subset xyP_2 + xzP_2 + (\{0\} \cup P_1) = (xyP_2 + xzP_2) \cup (xyP_2 + xzP_2 + P_1)$
(condition (I))

ce qui entraîne

$$x \circ (y * z) \subset (x \circ y) * (x \circ z) .$$

Par conséquent, la condition (I) est suffisante. Considérons maintenant que l'opération $\circ$ soit distributive (faible) par rapport à l'opération $*$, alors $\forall x \in R$ et pour $y = z = 0$ nous avons

$$x \circ (y * z) = x \circ (\{0\} \cup P_1) = \{0\} \cup (xP_1) \cup (xP_1P_2)$$

et

$$(x \circ y) * (x \circ z) = (x \circ 0) * (x \circ 0) = 0 * 0 = \{0\} \cup P_1 ;$$

donc, il en résulte

$$\begin{gathered}\{0\} \cup (xP_1) \cup (xP_1P_2) \subset \{0\} \cup P_1 , \quad \forall x \\ \Updownarrow \\ \{0\} \cup (RP_1) \cup (RP_1P_2) \subset \{0\} \cup P_1 \\ \Updownarrow \\ (RP_1) \cup (RP_1P_2) \subset \{0\} \cup P_1\end{gathered}$$

c'est-à-dire, la condition (I) est nécessaire.

Remarques

1. La condition (I) est nécessaire et suffisante pour que $\langle R, * \rangle$ soit un hypergroupe à opérateurs avec pour domaine d'opérateurs l'ensemble R, en considérant comme opération multiforme externe l'opération $\circ$.

2. Si R est un anneau commutatif ou si simplement la commutativité se vérifie entre les éléments de P_1 et de P_2, alors nous avons $RP_1P_2 = RP_2P_1 \subset RP_1$ et par conséquent la condition (I) devient

$$RP_1 \subset \{0\} \cup P_1 \tag{II}$$

3. Si on prend un seul sous-ensemble de R, c'est-à-dire si on pose $P_1 = P_2$, alors nous avons de nouveau la condition (II). La même chose, si on prend $P_2 \subset P_1$.

4. Lorsque P_1 est un singleton $P = \{p_1\}$ avec $p_1 \neq 0$, alors de la condition (I) résulte $(Rp_1) \cup (Rp_1P_2) \subset \{0, p_1\}$ et par conséquent $\forall x \in R$ il faut ou bien $xp_1 = 0$ ou bien $xp_1 = p_1$ et comme nous constatons facilement $\forall y \in P_2$ il faut aussi $p_1 y = 0$ ou $p_1 y = p_1$.

5. Pour avoir une distributivité forte, c'est-à-dire

$$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z) , \quad \forall x, y, z \in R$$

il nous faudra un hyperanneau de Rota, c'est-à-dire où l'opération multiforme $*$ dégénére à l'opération $+$ de R. En effet, de la distributivité forte résulte pour $x = y = z = 0$ l'égalité $\{0\} = \{0\} \cup P_1$ d'où $P_1 = \emptyset$ ou $P_1 = \{0\}$.

6. Si R est un anneau unitaire avec pour unité 1, alors la condition (I) s'écrit

$$RP_1(\{1\} \cup P_2) \subset \{0\} \cup P_1$$

et si en plus $1 \in P_2$, alors nous avons

$$RP_1P_2 \subset \{0\} \cup P_1$$

tandis-que si $1 \in P_1$, alors (I) devient $R \subset \{0\} \cup P_1$ donc elle se vérifie seulement si $P_1 = R$ ou $P_1 = R \setminus \{0\}$.

Exemple

Si P_1 est un idéal bilatère de R et P_2 un ensemble quelconque, alors la condition (I) est satisfaite, donc R devient un hypergroupe à opérateurs avec pour domaine d'opérateurs l'ensemble R (c.f. [3]).

Proposition. Si R est un anneau commutatif, alors $\langle R, *, \circ \rangle$ est un hyperanneau sous la notion générale si et seulement si la condition (II) est vérifiée.

La démonstration est une conséquence immédiate de la remarque 2 ci-dessus et du fait que l'opération $\circ$ soit associative et bilatérarement distributive lorsque la multiplication $(\cdot)$ de l'anneau est commutatif.

References

[1] KONGUETSOF, L.: Construction d'hypergroupes à partir d'ensembles munis d'opérations partielles. Définition et construction d'hypergroupes a opérateurs. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 258, pp. 1961—1964, (17 Février 1964).

[2] KONGUETSOF, L.: Structures à opérations multiformes. L'hypergroupe à opérateurs, Buletin de la Société Mathématique de Belgique, t. XIX, p.p 3—12, (1967).

[3] KONGUETSOF, L. - VOUGIOUKLIS, TH.: Structures algébriques à opérations multiformes, Gr. Sch. of Ind. St. Piraeus (en Grec) p. 77—91, (1982).

[4] MARTY, F.: Sur une généralization de la notion de groupe. Huitième congrès de mathématiciens scandinaves, Stockholm, (1934), p.p. 45—49.

[5] ROTA, R.: Sugli iperanelli moltiplicativi, Rendiconti di Matematica e Delle Sue Applicazioni, Ser. VII, Vol. 2(4), p. 711—724 (1982).

[6] VOUGIOUKLIS, TH.: Cyclicity in a Special Class of Hypergroups, Acta Univ. Carolinae-Math. et Ph. Vol. *22*, No 1 (1981) p. 3—6.