J. Šimon

Opérations dérivées des treillis orthomodulaires (Part 3)

Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica, Vol. 27 (1986), No. 2, 11--17

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/142569`

Opérations Dérivées des Treillis Orthomodulaires (Part 3)

J. ŠIMON
Faculté pédagogique, Ostrava

Received 19 December, 1985

Dans cet article, l'auteur continue à étudier des propriétés des opérations qui sont dérivées des opérations d'un treillis orthomodulaire.

V tomto článku autor pokračuje ve vyšetřování vlastností operací, odvozených z operací ortomodulárního svazu.

Автор в статье продолжает исследование качеств операций, выведенных из операций ортомодулярной структуры.

Cet article est la suite de [4] et [5]. On y étudiera les propriétés d'autres opérations spéciales, qui sont dérivées des éléments du treillis orthomodulaire libre $\mathscr{T}_2$, ayant deux générateurs.

Soit $(\boldsymbol{T}, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ un treillis orthomodulaire. On définit les opérations par les formules

$$a \oplus b = (a \wedge b) \vee (a \wedge b'), \tag{1}$$

$$a \odot b = (a \vee b) \wedge (a \vee b') \tag{2}$$

pour tous les éléménts $a, b \in \boldsymbol{T}$.

Pour nos réflexions, la relation $\mathscr{C}$ est très importante: on dit que a **commute** avec b et on écrit $a\mathscr{C}b$, si et seulement si (a, b) est un couple d'éléments de $\boldsymbol{T}$ tel que

$$a = (a \wedge b) \vee (a \wedge b'). \tag{3}$$

Les propriétés de la relation $\mathscr{C}$ sont décrites dans [2]:

Lemme 1. Pour tous les éléments $a, b, c \in \boldsymbol{T}$:

(i) $a\mathscr{C}a'$;

(ii) $a \leqq b \Rightarrow a\mathscr{C}b$;

(iii) $a\mathscr{C}b \Rightarrow a\mathscr{C}b'$;

(iv) $a\mathscr{C}c, b\mathscr{C}c \Rightarrow a \wedge b\mathscr{C}c$;

(v) $a\mathscr{C}c, b\mathscr{C}c \Rightarrow a \vee b\mathscr{C}c$;

(vi) $a\mathscr{C}b \Rightarrow b\mathscr{C}a$ ($\mathscr{C}$ est symétrique).

Reppelons encore le théorème de Foulis-Holland: le triplet (a, b, c) d'éléments du treillis orthomodulaire $(\boldsymbol{T}, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ est un triplet distributif, si l'un de ces éléments commute avec les deux restants. (Voir [3].)

Les propriétés élémentaires des opérations (1) et (2) sont données par

Lemme 2. Pour tout élément $a \in \boldsymbol{T}$, les relations suivantes sont vraies:

(i) $a \oplus 0 = a \oplus 1 = a\,, \quad a \odot 0 = a \odot 1 = a\,;$

(ii) $0 \oplus a = 0 \odot a = 0\,, \quad 1 \oplus a = 1 \odot a = 1\,;$

(iii) $a' \oplus a = a' \odot a = a'\,, \quad a \oplus a' = a \odot a' = a\,;$

(iv) $a \oplus a = a \odot a = a\,.$

Théorème 3. Soit $(\boldsymbol{T}, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ un treillis orthomodulaire. Alors

(i) $a \oplus (a \oplus b) = a\,, \quad b \oplus (a \oplus b) = b\,;$

(ii) $(a \oplus b) \oplus a = a \oplus b\,, \quad (a \oplus b) \oplus b = a \oplus b$

pour tous les éléments $a, b \in \boldsymbol{T}$.

Démonstration.

Ad(i): D'après le Lemme 1 $a\mathscr{C}a \wedge b$, $a\mathscr{C}a \wedge b'$, $b\mathscr{C}a \wedge b$, $b\mathscr{C}a \wedge b'$; à cause de cela $a\mathscr{C}a \oplus b$, $b\mathscr{C}a \oplus b$, $a\mathscr{C}(a \oplus b)'$, $b\mathscr{C}(a \oplus b)'$ et l'application du théorème de Foulis-Holland donne:

$$\begin{aligned} a = a \wedge 1 &= a \wedge ((a \oplus b) \vee (a \oplus b)') = \\ &= (a \wedge (a \oplus b)) \vee (a \wedge (a \oplus b)') = a \oplus (a \oplus b)\,, \\ b = b \wedge 1 &= b \wedge ((a \oplus b) \vee (a \oplus b)') = \\ &= (b \wedge (a \oplus b)) \vee (b \wedge (a \oplus b)') = b \oplus (a \oplus b)\,. \end{aligned}$$

Ad(ii):

$$\begin{aligned} a \oplus b &= (a \oplus b) \wedge 1 = (a \oplus b) \wedge (a \vee a') = \\ &= ((a \oplus b) \wedge a) \vee ((a \oplus b) \wedge a') = (a \oplus b) \oplus a\,, \\ a \oplus b &= (a \oplus b) \wedge 1 = (a \oplus b) \wedge (b \vee b') = \\ &= ((a \oplus b) \wedge b) \vee ((a \oplus b) \wedge b') = (a \oplus b) \oplus b\,. \end{aligned}$$

Par dualité, nous obtenons

Corollaire 4. On peut substituer le symbol $\oplus$ dans (i) et (ii) du Théorème 3 au symbol $\odot$.

Théorème 5. Soit $(\boldsymbol{T}, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ un treillis orthomodulaire. Alors

(i) $a' \oplus (a \oplus b)' = a'\,, \quad b' \oplus (a \oplus b)' = b'\,;$

(ii) $(a \oplus b)' \oplus a' = (a \oplus b)'\,, \quad (a \oplus b)' \oplus b' = (a \oplus b)'$

pour tous les éléments $a, b \in T$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} a' \oplus (a \oplus b)' &= (a' \wedge (a' \vee b') \wedge (a' \vee b)) \vee (a' \wedge ((a \wedge b) \vee (a \wedge b'))) = \\ &= a' \vee (a' \wedge ((a \wedge b) \vee (a \wedge b'))) = a'\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b' \oplus (a \oplus b)' &= (b' \wedge (a' \vee b') \wedge (a' \vee b)) \vee (b' \wedge ((a \wedge b) \vee (a \wedge b'))) = \\ &= (b' \wedge (a' \vee b)) \vee (b' \wedge a \wedge b) \vee (b' \wedge a \wedge b') = \\ &= (b' \wedge (a' \vee b)) \vee (a \wedge b') = (b' \vee (a \wedge b')) \wedge 1 = b', \end{aligned}$$

car $b' \mathscr{C} a \wedge b$, $b' \mathscr{C} a \wedge b'$, $b' \mathscr{C} a' \vee b$.

$$\begin{aligned} (a \oplus b)' \oplus b' &= ((a' \vee b') \wedge (a' \vee b) \wedge b') \vee ((a' \vee b') \wedge (a' \vee b) \wedge b) = \\ &= (b' \wedge (a' \vee b)) \vee (b \wedge (a' \vee b')) = \\ &= ((b' \wedge (a' \vee b)) \vee b) \wedge ((b' \wedge (a' \vee b)) \vee a' \vee b') = \\ &= (b' \vee b) \wedge (a' \vee b \vee b) \wedge (a' \vee b') = (a' \vee b') \wedge (a' \vee b) = \\ &= (a \oplus b)', \end{aligned}$$

car $(b' \wedge (a' \vee b)) \mathscr{C} b$, $b \mathscr{C} a' \vee b'$, $b \mathscr{C} b'$, $b \mathscr{C} a' \vee b$;

$$\begin{aligned} (a \oplus b)' \oplus a' &= ((a' \vee b') \wedge (a' \vee b) \wedge a') \vee ((a' \vee b') \wedge (a' \vee b) \wedge a) = \\ &= a' \vee ((a' \vee b') \wedge (a' \vee b) \wedge a) = \\ &= (a' \vee (a' \vee b')) \wedge (a' \vee (a' \vee b)) \wedge (a' \vee a) = \\ &= (a' \vee b') \wedge (a' \vee b) = (a \oplus b)', \end{aligned}$$

car $a' \mathscr{C} a' \vee b'$, $a' \mathscr{C} a' \vee b$, $a' \mathscr{C} a$.

A titre de conséquence du Théorème 5, on obtient quatre identités qui expriment la connexité entre les opérations (1) et (2) – une espèce de lois "d'absorption":

Corollaire 6. Soit $(\boldsymbol{T}, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ un treillis orthomodulaire. Alors
(i) $a \odot (a \oplus b) = a$, $a \odot (b \oplus a) = a$;
(ii) $(a \oplus b) \odot a = a \oplus b$, $(b \oplus a) \odot a = b \oplus a$
pour tout couple d'éléments de $\boldsymbol{T}$.

Démonstration.

D'après le Théorème 5 et parce que $(a \odot b)' = a' \oplus b'$, on obtient

$$\begin{aligned} a \odot (a \oplus b) &= ((a \odot (a \oplus b))')' = (a' \oplus (a \oplus b)')' = (a')' = a, \\ a \odot (b \oplus a) &= ((a \odot (b \oplus a))')' = (a' \oplus (b \oplus a)')' = (a')' = a, \\ (a \oplus b) \odot a &= (((a \oplus b) \odot a)')' = ((a \oplus b)' \oplus a')' = \\ &= ((a \oplus b)')' = a \oplus b, \\ (b \oplus a) \odot a &= (((b \oplus a) \odot a)')' = ((b \oplus a)' \oplus a')' = \\ &= ((b \oplus a)')' = b \oplus a. \end{aligned}$$

Naturellement, nous obtenons d'autres quatre identités par dualité:

Corollaire 7. Soient $a, b \in \boldsymbol{T}$. Alors
(i) $a \oplus (a \odot b) = a$, $a \oplus (b \odot a) = a$;
(ii) $(a \odot b) \oplus a = a \odot b$, $(b \odot a) \oplus a = b \odot a$.

Théorème 8. Les conditions suivantes sont équivalentes pour tous les éléments $a, b \in \boldsymbol{T}$:
(i) $a \mathscr{C} b$;
(ii) $a \oplus b = a$;
(iii) $a \odot b = a$.

Démonstration.

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) découle de (1) et (3), l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) découle du principe de dualité. (iii) $\Rightarrow$ (i): Soit $a \odot b = a$; il en découle successivement

$$(a \vee b) \wedge (a \vee b') = a\,,$$
$$(a' \wedge b') \vee (a' \wedge b) = a'\,.$$

La dernière égalité dit que $a' \mathscr{C} b'$ et d'après le Lemme 1 aussi $a \mathscr{C} b$.

Un simple exemple montre qu' aucune des opérations (1), (2) n'est pas, en général, associative: soient x, x', y les éléments du treillis orthomodulaire libre ayant deux générateurs x, y. Alors

$$x \oplus (x' \oplus y) = x \oplus ((x' \wedge y) \vee (x' \wedge y')) = x\,,$$
$$(x \oplus x') \oplus y = x \oplus y = (x \wedge y) \vee (x \wedge y')$$

et analogiquement

$$(x \odot x') \odot y = x \odot y = (x \vee y) \wedge (x \vee y')\,,$$
$$x \odot (x' \odot y) = x\,.$$

Théorème 9. L'égalité

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c \tag{4}$$

est vérifiée pour tout triplet (a, b, c) d'éléments du treillis orthomodulaire $(\boldsymbol{T}, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ tel que $a \mathscr{C} b$ et $a \mathscr{C} c$ ou $c \mathscr{C} a$ et $c \mathscr{C} b$.

Démonstration.

Si $a \mathscr{C} b$, $a \mathscr{C} c$, puis aussi $a \mathscr{C} b \oplus c$ (Lemme 1) et d'après le Théorème 8, on obtient

$$a \oplus (b \oplus c) = a = a \oplus b = (a \oplus b) \oplus c\,.$$

Analogiquement, $c \mathscr{C} a$, $c \mathscr{C} b$ implique $c \mathscr{C} a \oplus b$ et

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus b = (a \oplus b) \oplus c\,.$$

Il est intéressant que (4) n'est pas nécessairement vraie dans le cas où $b \mathscr{C} a$ et $b \mathscr{C} c$. A savoir, si x, y, $z = (x' \wedge y') \vee (x' \wedge y)$ sont les éléments du treillis orthomodulaire libre $\mathscr{T}_2$, puis $z \mathscr{C} x$, $z \mathscr{C} y$ mais

$$x \oplus (z \oplus y) = x \oplus z = x\,,$$
$$(x \oplus z) \oplus y = x \oplus y = (x \wedge y) \vee (x \wedge y')\,.$$

Remarquons que la condition du Théorème 9 est suffisante mais qu'elle n'est pas nécessaire. Par exemple, pour $x, y, x' \in \mathscr{T}_2$:

$$y \oplus (x' \oplus x) = y \oplus x' = (x \wedge y) \vee (x' \wedge y) =$$
$$= ((x \wedge y) \vee (x' \wedge y)) \oplus x = (y \oplus x') \oplus x\,,$$

et encore y ne commute ni avec x ni avec x'. Voici une conséquence triviale du théorème précedent:

Corollaire 10. Soient a, b, c les éléménts du treillis orthomodulaire $(\boldsymbol{T}, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ tels que $a\mathscr{C}b$, $a\mathscr{C}c$ ou $c\mathscr{C}a$, $c\mathscr{C}b$. Alors

$$a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c\,.$$

On dit que les éléments a, b, c du treillis orthomodulaire $(\boldsymbol{T}, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ constituent un triplet associatif en égard à l'opération (1) si toutes les égalités suivantes sont vraies:

(A_1): $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$,
$(A_2{:})$ $a \oplus (c \oplus b) = (a \oplus c) \oplus b$,
(A_3): $b \oplus (a \oplus c) = (b \oplus a) \oplus c$,
(A_4): $b \oplus (c \oplus a) = (b \oplus c) \oplus a$,
(A_5): $c \oplus (a \oplus b) = (c \oplus a) \oplus b$,
(A_6): $c \oplus (b \oplus a) = (c \oplus b) \oplus a$.

Notons qu'on peut définir le triplet associatif en égard à (2) par dualité. Conformément à la définition, le triplet (a, b, c) est associatif si et seulement si (x, y, z) est associatif pour tous les éléments x, y, z déterminant le même sous-ensemble que les éléments a, b, c.

Théorème 11. Soit $(\boldsymbol{T}, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ un treillis orthomodulaire ayant la propriété suivante:

(5) $x\mathscr{C}y$ ou $x\mathscr{C}z$ ou $y\mathscr{C}z$ pour tous les triplets (x, y, z) d'élément du treillis $(\boldsymbol{T}, \wedge, \vee, ', 0, 1)$.

Alors les éléments a, b, $c \in \boldsymbol{T}$ constituent un triplet associatif en égard à (1) si et seulement si l'un de ces éléments commute avec les deux restants.

Démonstration.

Soit $a\mathscr{C}b$, $a\mathscr{C}c$ et $b\mathscr{C}c$. D'après le Théorème 8,

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus b = a = a \oplus c = (a \oplus b) \oplus c\,,$$

c'est-à-dire (A_1) est valable. D'après la symétrie des hypothèses faites sur a, b, c on obtient la même conclusion pour les identités $(A_2)-(A_6)$.

Réciproquement, supposons maintenant qu'au mois un des éléments a, b, c ne commute pas avec les deux restants. Nous allons montrer qu'au moins une des égalités $(A_1)-(A_6)$ n'est pas vraie. En utilisant la symétrie des hypothèses on voit qu'il suffit de considérer les deux cas suivants:

1. $a\mathscr{C}b$, $a\mathscr{C}c$ et b ne commute pas avec c.

Il résulte du Théorème 8

$$c \oplus (a \oplus b) = c \oplus a = c\,,$$
$$(c \oplus a) \oplus b = c \oplus b\,.$$

On voit que (A_5) n'est pas vraie. En effect, l'égalité $c = c \oplus b$ donne $b\mathscr{C}c$ ce qui contredit l'hypothèse b ne commute pas avec c.

2. $a\mathscr{C}b$, a ne commute pas avec c et b ne commute pas avec c. Supposons que (A_1) et (A_3) sont vraies. Alors

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus c\,,$$
$$b \oplus (a \oplus c) = b \oplus c\,.$$

Maintenant

$$b \oplus c = b \oplus (a \oplus (b \oplus c))\,;$$

parce que $b\mathscr{C}a$ et d'après le Théorème 3 $b \oplus (b \oplus c) = b$, c'est-à-dire $b\mathscr{C}(b \oplus c)$, nous obtenons d'après le Théorème 9

$$b \oplus c = (b \oplus a) \oplus (b \oplus c) = b \oplus (b \oplus c) = b\,.$$

La dernière égalité dit que b commute avec c. La démonstration du Théorème 11 est ainsi achevée.

Le principe de dualité permet de formuler l'assertion suivante:

Corollaire 12. Soit $(\boldsymbol{T}, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ un treillis orthomodulaire ayant la propriété (5).

Alors les éléments a, b, c du treillis $(\boldsymbol{T}, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ constituent un triplet associatif en égard à (2) si et seulement si l'un de ces éléments commute avec les deux restants.

Remarque 13. Un exemple d'un treillis dans lequel la condition (5) est satisfaite est donné par le treillis orthomodulaire libre $\mathscr{T}_2$.

Théorème 14. L'égalité

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus c) \oplus b \tag{6}$$

est vérifiée pour tout triplet (a, b, c) d'éléments du treillis orthomodulaire $(\boldsymbol{T}, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ si et seulement si $(\boldsymbol{T}, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ est booléien.

Démonstration.

Soit $(\boldsymbol{T}, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ un treillis booléien. Alors, d'après le Théorème 8

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus b = a\,,$$
$$(a \oplus c) \oplus b = a \oplus b = a\,,$$

car $b\mathscr{C}c$, $a\mathscr{C}b$, $a\mathscr{C}c$ et (6) est satisfaite pous tout triplet (a, b, c) d'éléments du treillis $(\boldsymbol{T}, \wedge, \vee, ', 0, 1)$.

Réciproquement, soit (6) est satisfaite pour tout triplet (a, b, c) du treillis orthomodulaire $(\boldsymbol{T}, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ et soient x, y des éléments quelconques de $\boldsymbol{T}$. En vertu de (6) et du Théorème 3, on obtient

$$x \oplus y = (x \oplus y) \oplus x = x \oplus (x \oplus y) = x\,.$$

De l'égalité $x \oplus y = x$ (voir Th. 8) on déduit $x\mathscr{C}y$. Donc, le treillis $(\boldsymbol{T}, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ est booléin.

Références

[1] BIRKHOFF, G.: Lattice Theory. 3éme éd., New York, Publ. AMS 1967.

[2] HOLLAND, S. S.: Distributivity and perspectivity in orthomodular lattice. Trans. Amer. Soc., 108 (1963), 66—87.

[3] HOLLAND, S. S.: Current interest in orthomodular lattices. Trends in lattice theory. Ed. J. C. Abbott, Van Nostrand, Princeton, N. Y. 1969.

[4] ŠIMON, J.: Opérations dérivées des treillis orthomodulaires (Part 1). Acta Univ. Carolin.-Math. Phys. 22, No. 2 (1981), 7—14.

[5] ŠIMON, J.: Opérations dérivées des treillis orthomodulaires (Part 2). Acta Univ. Carolin.-Math. Phys. 23, No. 1 (1982), 29—36.