Osvald Demuth; Rudolf Kryl; Antonín Kučera

Об использовании теории функций частично-рекурсивных относительно числовых множеств в конструктивной математике

Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica, Vol. 19 (1978), No. 1, 15--60

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/142411`

Об использовании теории функций частично-рекурсивных относительно числовых множеств в конструктивной математике

O. DEMUTH, R. KRYL, A. KUČERA

Кафедра математической информатики, математико-физический факультет, Карлов университет, Прага*

Статья поступила в редакцию 29 сентября 1976 г.

Статья принадлежит конструктивному направлению в математике, основанному А. А. Марковым и Н. А. Шаниным в 50-ых годах. Ее целью является показание возможности и полезности использования теории функций частичнорекурсивных относительно скачков пустого множества в конструктивной математике, в частности в конструктивном математическом анализе.

В §§ 1—4 введены нужные понятия, являющиеся релятивизациями основных понятий конструктивного математического анализа — прежде всего конструктивных действительных чисел и конструктивных функций действительной переменной, и приведена конструктивная переформулировка основ теории функций частичнорекурсивных относительно числовых множеств. Большую роль в развиваемой теории играют теоремы о сведении и неполном сведении, которые нам в многих случаях позволяют работать с релятивизованными конструктивными действительными числами методами нерелятивизованной теории.

Основные результаты содержатся в § 5. В них разобраны главным образом взаимные отношения введенных типов действительных чисел, расположение этих чисел в арифметической иерархии и свойства их последовательностей. Кроме того изучаются релятивизованные эффективные операторы, отвечающие функциям действительной переменной, вопросы их непрерывности и расширимости на числа расположенные выше в построенной иерархии.

§ 6 содержит основные результаты релятивизованной теории конструктивных метрических пространств. В заключительном седьмом параграфе приведены некоторые результаты о деревьях и сходимости последовательностей равномерно непрерывных конструктивных функций действительной переменной.

An application of the theory of functions partial recursive relative to number sets in constructive mathematics.

The paper belongs to constructive mathematics founded by A. A. Markov and N. A. Šanin in the fifties. Its aim is to show the possibility and usefulness of utilization of the theory of functions partial recursive relative to jumps of empty set in constructive mathematics, in particular in constructive analysis.

In §§ 1—4 the necessary notions, which are relativizations of the basic notions used in

* 118 00 Praha 1, Malostranské nám. 2/25.

constructive analysis (above all constructive real numbers and constructive functions of a real variable) are introduced, and a constructive re-formulation of the fundamentals of the theory of functions partial recursive relative to number sets is given. The theorems about reduction and partial reduction, which make possible to treat relativized constructive real numbers by the methods of the unrelativized theory (of recursive functions) in many cases, are of great importance in the theory developed.

The main results are presented in § 5. They concern above all the relationship between the introduced types of real numbers, the classification of these numbers in an arithmetical hierarchy and properties of their sequences. Further, relativized effective operators corresponding to functions of a real variable, the problems of their continuity and the extendability on numbers lying higher in the constructed hierarchy are studied.

§ 6 contains basic results of the relativized theory of constructive metric spaces. In the final section some results concerning trees and the convergence of sequences of uniformly continuous constructive functions of a real variable are given.

O využití teorie funkcí částečně rekurzivních vzhledem k číselným množinám v konstruktivní matematice.

Článek patří ke konstruktivní matematice založené A. A. Markovem a N. A. Šaninem v padesátých létech. Jeho cílem je ukázat možnost a užitečnost využití teorie funkcí částečně rekurzivních vzhledem ke skokům prázdné množiny v konstruktivní matematice a speciálně v konstruktivní matematické analýze.

V §§ 1—4 jsou zavedeny potřebné pojmy, které jsou relativizacemi základních pojmů konstruktivní matematické analýzy — především konstruktivních reálných čísel a konstruktivních funkcí reálné proměnné, a je uvedena konstruktivní přeformulace základů teorie funkcí částečně rekurzivních vzhledem k numerickým množinám. Velký význam v budované teorii mají věty o redukci a částečné redukci, které v mnohých případech umožňují pracovat s relativizovanými konstruktivními reálnými čísly metodami nerelativizované teorie.

Hlavní výsledky jsou uvedeny v § 5. Týkají se především vzájemných vztahů zavedených typů reálných čísel, klasifikace těchto čísel v aritmetické hierarchii a vlastností jejich posloupností. Dále se studují relativizované efektivní operátory, odpovídající funkcím reálné proměnné, otázky jejich spojitosti a rozšiřitelnosti na čísla ležící v sestrojené hierarchii výše.

§ 6 obsahuje základní výsledky relativizované teorie konstruktivních metrických prostorů. V závěrečném sedmém paragrafu jsou uvedeny některé výsledky, týkající se stromů a konvergence posloupností stejnoměrně spojitých konstruktivních funkcí reálné proměnné.

В настоящей статье, которая принадлежит конструктивному направлению в математике, приведены основные определения и результаты, связанные с использованием теории функций частичнорекурсивных относительно скачков пустого множества в конструктивной математике, в частности в конструктивном математическом анализе.

Конструктивное направление в математике, основанное А. А. Марковым, Н. А. Шаниным и их учениками в 50-х годах, может быть охарактеризовано тем, что а) в качестве объектов изучения выступают конструктивные объекты, например, слова в определенном алфавите, б) используется математическое понятие алгорифма и в) используется особое, учитывающее специфику конструктивных объектов, конструктивное понимание математических суждений(ср. Марков [4], Шанин [3], Кушнер [11]).

В частности, в конструктивной математике вводятся — основанные на теории алгорифмов — понятия конструктивного действительного числа (КДЧ) [4], [5], [11], конструктивного псевдочисла (ПЧ) [5] и конструктивной функции действительной переменной (КФДП) [4]. В развивающемся на этой основе конструктивном математическом анализе получен ряд интересных результатов, свидетельствующих о том, что составной частью возникающей теории является решение вопросов тесно связанных с вычислимостью, которые выходят за рамки классического анализа. С другой стороны видно, что многие идеи, лежащие в основе классического анализа, связаны с интуитивно понимаемой эффективностью и что из ряда классических результатов можно и полезно извлечь их „конструктивную" суть. В этой работе, как мы надеемся, поможет предлагаемое нами включение функций частичнорекурсивных относительно скачков пустого множества в язык конструктивной математики.

При изучении свойств КФДП оказалось, что рассмотрение „поведения" этих функций на псевдочислах приводит к новым и важным результатам [18], [19]. Кроме того использование псевдочисел помогает упростить теорию и сделать формулировки более наглядными. Как заметил Б. А. Кушнер [14], псевдочисла являются „Δ_2-числами". Это по существу значит, что псевдочисла являются действительными числами „конструктивными относительно $\varnothing'$ ".

В ходе дальнейшего развития теории КФДП оказалось необходимым не ограничиться псевдочислами, а ввести „гиперпсевдочисла", что по существу являлось итерацией процесса получения псевдочисел на основании рациональных чисел. При этом выяснилось, что гиперпсевдочисла являются — по своему существу — действительными числами „конструктивными относительно $\varnothing''$ ". Установленная связь псевдочисел и гиперпсевдочисел и арифметической иерархии числовых множеств подсказывает полезность введения и исследования действительных чисел „конструктивных относительно скачков пустого множества", т. е. уместность релятивизации понятия КДЧ.

Следует заметить, что многие результаты для релятивизованных КДЧ, в частности для псевдочисел, являются релятивизациями соответствующих результатов для КДЧ, хотя их прямое доказательство может способствовать развитию новых методов (ср. теорему Г. С. Цейтина о непрерывности для КФДП [6] и теорему Б. А. Кушнера о почти непрерывности псевдооператоров [13]). Одним из наших целей является включение метода релятивизации в конструктивную математику и нам кажется знаменательным тот факт, что это включение можно осуществить исключительно конструктивными средствами. В связи с этим объекты релятивизованной теории будут конструктивными объектами и так мы с ними и будем обращаться.

Как известно из статей по предельной рекурсии [22], [23], для любого НЧ k, $1 \leqq k$, функции частичнорекурсивные относительно $\varnothing^{(k)}$ соответствуют общерекурсивным функциям $k + 1$ аргументов способом, который описан ниже в параграфе 2. Таким образом, их включение в рассмотрение не выводит за рамки конструктивного направления — при условии, что сохранится конструктивное понимание математических суждений.

В литературе встречаются работы, в которых производятся для отдельных арифметических предикатов, связанных с действительными числами, оценки их положения в иерархии Клини (например, Мостовский [21]).

Возможность построения „арифметического анализа" упоминается в упражнении 15–37 книги Роджерса [10].

В статье Шапиро [24] исследуется отношение между положением дедекиндовых сечений в иерархии Клини и представимостью соответствующих действительных чисел в виде разного рода пределов общерекурсивных функций с рациональными значениями.

Настоящая статья содержит

а) конструктивное изложение теории функций частичнорекурсивных относительно числовых множеств и релятивизованной арифметической иерархии,

б) определения и основные результаты, связанные с релятивизованными конструктивными действительными числами, псевдочислами и квазичислами и конструктивными операторами на этих числах,

в) основы теории релятивизованных конструктивных метрических пространств и

г) несколько результатов конструктивной теории деревьев, связанных с а) и б).

§ 1. Слова, предикаты, множества

В следующем мы предполагаем, что всякий алфавит [1] задан списком букв, в котором буквы не повторяются. Пока мы не скажем другое, говоря об алфавите, мы имеем в виду непустой алфавит. Знак Λ обозначает пустое слово, $\overline{\overline{\cdot}}$ — графическое равенство слов, для всяких слов P и T и алфавита $\mathbf{\Gamma}$ — PT соединение слов P и T, $\mathbf{S}_{\mathbf{\Gamma}}$ множество всех слов в алфавите $\mathbf{\Gamma}$, а выражение $P \mho \mathbf{\Gamma}$ значит: P слово в алфавите $\mathbf{\Gamma}$ [1]. Буквы S, T, U, V с индексами или без них служат переменными для слов.

$\simeq$ знак условного равенства. Ставя такой знак между двумя выражениями, мы тем самым будем утверждать, что выражения эти означают одно и то же слово, коль скоро хотя бы одно из них имеет смысл [1].

Натуральными числами (НЧ) мы называем слова в алфавите $\{0, |\}$ вида $0T$, где $T \mho \{|\}$. Множество всех НЧ мы обозначим посредством $\mathbf{N}$. Для сокращенного обозначения НЧ мы будем часто пользоваться символикой десятичной системы счисления: слова $0, 0|, 0||, 0|||, \ldots$ будем обозначать соответственно посредством $0, 1, 2, 3, \ldots$. Буквы k, l, m, n, p, q, s и t (с индексами или без них) служат переменными для НЧ. Для любых слова P и НЧ n мы обозначим

$$P^{\{0\}} \rightleftharpoons \Lambda \quad \text{и} \quad P^{\{n|\}} \rightleftharpoons P^{\{n\}}P\,.$$

Аналогично, целыми числами (ЦЧ) и рациональными числами (РЧ) будут слова в алфавите $\{0, |, -, /\}$, обладающие свойствами, описанными в [5], где также определяются и подробно исследуются отношения порядка и равенства для РЧ и основные операции над рациональными числами. В следующем мы будем часто обозначать рациональные числа, отношения между ними и операции над ними так, как это делается в элементарной математике, т. е., например, -4, $\frac{2}{3}$, $1 = \frac{4}{4}$, $2 \,.\, 3 + \frac{2}{5}$ итд.. Множество всех РЧ мы обозначим посредством $\mathbf{Q}$. Буквы i, j (соотв. a, b, c, d) — с индексами или без них — служат переменными для ЦЧ (соотв. РЧ).

Пусть $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{\Gamma} \rightleftharpoons \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k\}$, непустой алфавит. Тогда мы обозначим

а) $\text{н}_{\mathbf{\Gamma}}(\Lambda) \rightleftharpoons 0$ и для всяких слова P, $P \mho \mathbf{\Gamma}$, и НЧ l, $1 \leqq l \leqq k$, $\text{н}_{\mathbf{\Gamma}}(P\gamma_l) \rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons \text{н}_{\mathbf{\Gamma}}(P) \,.\, k + l$ и

б) для всякого НЧ n посредством $\text{с}_{\mathbf{\Gamma}}(n)$ слово в алфавите $\mathbf{\Gamma}$, для которого верно $\text{н}_{\mathbf{\Gamma}}(\text{с}_{\mathbf{\Gamma}}(n)) = n$.

Мы пользуемся конструктивным пониманием математических суждений, описанным в [3].

Формулу мы назовем нормальной, если она логически эквивалентна своему двойному отрицанию.

Формулу мы назовем числовым предикатом, если все ее свободные переменные являются переменными для НЧ. Числовым множеством мы назовем выражение типа $\{n \mid \text{A}(n)\}$, где A числовой предикат с одной свободной переменной — n. При этом мы для любого слова P определим

$$P \in \{n \mid \text{A}(n)\} \rightleftharpoons P \in \mathbf{N} \,\&\, \text{A}(P)\,.$$

Формулу, единственной свободной переменной которой является переменная для слов, мы назовем словарным предикатом.

Пусть $\mathscr{A}$ свойство, определенное нами для числовых предикатов, $\mathbf{\Gamma}$ алфавит, B словарный предикат с свободной переменной S, $\forall S(\text{B}(S) \supset S \mho \mathbf{\Gamma})$, а n переменная для НЧ, которая не входит в формулу B. Тогда мы скажем, что B обладает свойством $\mathscr{A}$, если числовой предикат $\text{B}(\text{с}_{\mathbf{\Gamma}}(n))$ обладает свойством $\mathscr{A}$.

Словарным множеством мы назовем выражение типа $\bigwedge S(\text{B}(S))$, где B словарный предикат с свободной переменной S. При этом мы для любого слова P определим $P \in \bigwedge S(\text{B}(S)) \rightleftharpoons \text{B}(P)$.

Словарное (соотв. числовое) множество $\mathfrak{M}$ мы назовем нормальным, если для всякого слова P выполнено $P \in \mathfrak{M} \equiv \neg\neg(P \in \mathfrak{M})$. Словарное множество $\mathfrak{M}$ мы назовем множеством в алфавите $\mathbf{\Gamma}$, если для всякого слова P верно $P \in \mathfrak{M} \supset P \mho \mathbf{\Gamma}$.

Пусть B словарный предикат с свободной переменной S, $\mathfrak{M}$ словарное множество, а ϑ переменная для элементов множества $\mathfrak{M}$, которая не входит в формулу B. Тогда мы посредством $\bigwedge\vartheta(\mathrm{B}(\vartheta))$ обозначим словарное множество $\bigwedge S(S \in \mathfrak{M} \mathbin{\&} \mathrm{B}(S))$.

Пусть $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ словарные (соотв. числовые) множества. Тогда мы обозначим:

$\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2$, если для всякого слова P выполнено

$P \in \mathfrak{M}_1 \supset P \in \mathfrak{M}_2$; $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 \rightleftharpoons (\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2 \mathbin{\&} \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{M}_1)$; посредством $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ (соотв. $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$, соотв. $\mathfrak{M}_1 \setminus \mathfrak{M}_2$) – объединение (соотв. пересечение, соотв. разность) множеств $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$. Если $\mathfrak{M}$ числовое множество, то $\setminus \mathfrak{M} \rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons \mathbf{N} \setminus \mathfrak{M}$. $\varnothing$ обозначает пустое множество.

Для любых словарных множеств $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ и слова P мы определим $\mathfrak{C}_p \rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons \bigwedge S(PS \in \mathfrak{M})$,

$$\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 \rightleftharpoons \bigwedge S(\neg\neg\exists TU(TU \doteqdot S \mathbin{\&} T \in \mathfrak{M}_1 \mathbin{\&} U \in \mathfrak{M}_2)\,,$$

$$\mathfrak{M}_1 P \mathfrak{M}_2 \rightleftharpoons \bigwedge S(\neg\neg\exists TU(TPU \doteqdot S \mathbin{\&} T \in \mathfrak{M}_1 \mathbin{\&} U \in \mathfrak{M}_2)\,.$$

Если $\mathfrak{M}$ словарное множество, элементы которого не содержат букву $\Box$, то мы

а) обозначим ${}^{(1)}\mathfrak{M} \rightleftharpoons \mathfrak{M}$ и для всякого НЧ n, $n \geqq 1$, ${}^{(n+1)}\mathfrak{M} \rightleftharpoons {}^{(n)}\mathfrak{M} \Box \mathfrak{M}$; ${}^{\{0\}}\mathfrak{M} \rightleftharpoons \bigwedge S(S \doteqdot \Lambda)$ и для всякого НЧ n ${}^{\{n+1\}}\mathfrak{M} \rightleftharpoons {}^{\{n\}}\mathfrak{M} \Box \mathfrak{M}$ и ${}^{\{\omega\}}\mathfrak{M} \rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons \bigwedge S(\exists m(S \in {}^{\{m\}}\mathfrak{M}))$;

б) элементы множества ${}^{\{\omega\}}\mathfrak{M}$ называем системами элементов множества $\mathfrak{M}$, а элементы множества ${}^{\{\omega\}}\mathbf{N}$ – кортежами.

Для любых словарного множества $\mathfrak{M}$ и алфавита $\mathbf{\Gamma}$ мы посредством $\mathscr{H}_{\mathbf{\Gamma}}(\mathfrak{M})$ обозначим числовое множество $\{n \mid \mathrm{c}_{\mathbf{\Gamma}}(n) \in \mathfrak{M}\}$.

Пусть $\mathscr{A}$ свойство, определенное нами ниже для числовых множеств, а $\mathfrak{M}$ словарное множество в алфавите $\mathbf{\Gamma}$. Тогда мы скажем, что $\mathfrak{M}$ обладает свойством $\mathscr{A}$, если числовое множество $\mathscr{H}_{\mathbf{\Gamma}}(\mathfrak{M})$ обладает свойством $\mathscr{A}$.

Мы заметим, что

а) множествами НЧ мы называем словарные множества, все элементы которых являются натуральными числами,

б) если B числовое множество, то для всякого алфавита $\mathbf{\Gamma}$, $\{0, |\} \subseteq \mathbf{\Gamma}$, множество B рекурсивно изоморфно ([10], стр. 75) множеству $\mathscr{H}_{\mathbf{\Gamma}}(\bigwedge S(S \in \mathrm{B}))$ и

в) для любых алфавитов $\mathbf{\Gamma}_1$ и $\mathbf{\Gamma}_2$ и словарного множества $\mathfrak{M}$, которое является множеством в алфавите $\mathbf{\Gamma}_1$ и множеством в алфавите $\mathbf{\Gamma}_2$, числовые множества $\mathscr{H}_{\mathbf{\Gamma}_1}(\mathfrak{M})$ и $\mathscr{H}_{\mathbf{\Gamma}_2}(\mathfrak{M})$ рекурсивно изоморфны.

Словарным множеством с равенством [9] мы называем пару — словарное множество (которое мы будем называть основой множества с равенством) и словарный предикат, определяющий отношение эквивалентности для элементов этого множества. Для любого $\mathfrak{A}$ — словарного множества с равенством — мы

а) посредством $\text{Ос}(\mathfrak{A})$ обозначим основу $\mathfrak{A}$, а посредством $\underset{\mathfrak{A}}{=}$ соответствующее отношение эквивалентности и для всякого слова P определим $P \in \mathfrak{A} \rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons P \in \text{Ос}(\mathfrak{A})$ и

б) $\mathfrak{A}$ назовем нормальным множеством, если $\text{Ос}(\mathfrak{A})$ — нормальное множество и предикат, задающий $\underset{\mathfrak{A}}{=}$, является нормальным предикатом.

Если $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ словарные множества с равенством и элементы $\text{Ос}(\mathfrak{A}_2)$ не содержат букву $\square$, то мы

а) посредством $\mathfrak{A}_1 \square \mathfrak{A}_2$ обозначим словарное множество с равенством, для которого основой является словарное множество $\text{Ос}(\mathfrak{A}_1) \square \text{Ос}(\mathfrak{A}_2)$ и отношение эквивалентности ($\underset{\mathfrak{A}_1 \square \mathfrak{A}_2}{=}$) определено так, что выполнено

$$\forall U_1 V_1 U_2 V_2 (U_1 \in \mathfrak{A}_1 \,\&\, V_1 \in \mathfrak{A}_1 \,\&\, U_2 \in \mathfrak{A}_2 \,\&\, V_2 \in \mathfrak{A}_2 \supset$$
$$\supset (U_1 \square U_2 \underset{\mathfrak{A}_1 \square \mathfrak{A}_2}{=} V_1 \square V_2 \equiv U_1 \underset{\mathfrak{A}_1}{=} V_1 \,\&\, U_2 \underset{\mathfrak{A}_2}{=} V_2)), \quad \text{и}$$

б) определим ${}^{(1)}\mathfrak{A}_2 \rightleftharpoons \mathfrak{A}_2$ и для всякого НЧ n, $1 \leqq n$, ${}^{(n+1)}\mathfrak{A}_2 \rightleftharpoons {}^{(n)}\mathfrak{A}_2 \square \mathfrak{A}_2$.

В нашей дальнейшей работе при расширении конструктивного математического анализа на основе арифметической иерархии окажется полезным фиксировать алфавиты Ξ_0 и Ξ, $\Xi_0 \rightleftharpoons \{0, |, -, /, @\}$,*

$$\Xi \rightleftharpoons \{0, |, -, /, @, \square, \triangle, \nabla, \boxplus, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{ш}, \text{щ}\},$$

где буквы начиная с 0 по δ (включительно) служили нам в предыдущих работах, а пара букв ш, щ предназначена для кодирования дополнительных символов при помощи (ш, щ)-звеньев (см. [1], главу I, §§ 5–6). Мы договоримся, что для любого НЧ n, $1 \leqq n$, n-ый введенный нами дополнительный символ будет кодироваться посредством (ш, щ)-звена шщ$^{\{n\}}$ш.

Так, например, в § 5 нам понадобится символ ∞. Он является первым дополнительным символом и мы будем его кодировать посредством шщш. Тогда $-\infty$ будет слово, кодированное посредством $-$шщш. Вместо ∞ мы будем иногда писать $+\infty$.

* По техническим причинам вместо ромба, обычно используемого в литературе по конструктивной математике, в статье употребляется знак @.

§ 2. Конструктивная трактовка теории функций частичнорекурсивных относительно числовых множеств

В нашей дальнейшей работе по конструктивной математике мы хотим пользоваться релятивизацией математического понятия алгорифма. В предыдущих работах мы пользовались понятием нормального алгорифма, введенного А. А. Марковым [1], в качестве математического уточнения интуитивного понятия алгорифма. Ввиду известной эквивалентности нормальных алгорифмов и частичнорекурсивных функций [2] и того, что теория релятивизованных частичнорекурсивных функций является более развитой и подробно изложена в общедоступной книге Роджерса [10], нам кажется более выгодным пользоваться в дальнейшем теорией частичнорекурсивных функций (ЧРФ) при сохранении, употребляемого в конструктивной математике, конструктивного понимания математических суждений [3].

Следует заметить, что в многих работах по теории ЧРФ — в частности в упомянутой книге Роджерса — употребляется классическая логика, что приводит к некоторым трудностям. Общеизвестно, например, что нельзя в ходе конструкции ЧРФ неограниченно пользоваться законом исключенного третьего. Употребление классически понимаемого квантора существования, по нашему мнению, невыгодно тем, что в большинстве случаев важно разобраться в том, если

а) можно получить доказательство существования, содержащее эффективный метод построения соответствующего объекта, — т. е. доказать конструктивную осуществимость, или

б) мы только знаем, что из предположения, что соответствующий объект не существует, получится противоречие.

В рамках конструктивной логики квантор существования служит обозначению конструктивной осуществимости, а его двойное отрицание отвечает случаю б). При этом следует заметить, что „эффективным методом" построения конструктивного объекта является ЧРФ, строящая этот объект или его код.

Уже этот пример указывает на то, что конструктивное понимание математических суждений ближе сути теории ЧРФ чем классическая логика. Благодаря внутренней родственности теории ЧРФ и конструктивного подхода при переходе от классического к конструктивному пониманию меняется лишь формулировка большинства результатов той части теории ЧРФ, которой мы будем пользоваться. В частности, появятся двойные отрицания.

Большинство определений и утверждений, приведенных в этом параграфе, будут конструктивными аналогами определений и результатов известных из [10]; в то же время некоторые из них (теоремы 2.9. и 2.10.) мы в доступной нам литературе не встречали.

В дальнейшем мы пользуемся без ссылок понятиями частичнорекурсивной функции (ЧРФ), общерекурсивной функции (ОРФ), рекурсивно перечислимого — р. п. — (соотв. рекурсивного) числового множества. При этом мы предполагаем, что аргументами и результатами ЧРФ являются элементы множества **N**, введенного в § 1, т. е. определенного вида слова в алфавите $\{0, |\}$. Мы дальше предполагаем, что у нас есть ЧРФ двух переменных, являющаяся универсальной функцией для ЧРФ одной переменной. Мы будем пользоваться порождаемой ею нумерацией частичнорекурсивных функций одной переменной и соответствующей нумерацией рекурсивно перечислимых числовых множеств. При этом φ_m (соотв. W_m) будет ЧРФ (соотв. р. п. числовое множество) с (геделевым) номером m.

Для любых НЧ m и n мы скажем, что выражение $\varphi_m(n)$ осмыслено, и будем писать $!\varphi_m(n)$, если ЧРФ φ_mприменима к НЧ n.

Ввиду упомянутой нами эквивалентности нормальных алгорифмов и ЧРФ мы предположим, что конструктивное понимание математических суждений, введенное Н. А. Шаниным в [3] на основе нормальных алгорифмов, пересказано в терминах теории ЧРФ. Например, для числового предиката $Q(m, n)$ выражение $\forall m \exists n\, Q(m, n)$ обозначает: существует ОРФ f такая, что $\forall m\, Q(m, f(m))$. Мы напомним, что важным положением конструктивного понимания математических суждений является принцип А. А. Маркова ([4]): для любых ЧРФ ψ и НЧ n верно

$$\neg\neg\, !\psi(n) \supset\, !\psi(n)\,.$$

Мы будем пользоваться кодированием n-ок НЧ, введенным в [10], § 5.3, в частности, обозначениями τ, τ^n, π_1, π_2, π_j^n, где $2 \leqq n \,\&\, 1 \leqq j \leqq n$. Таким образом, для НЧ n, $2 \leqq n$, и n-ки НЧ $m_1 \,\square\, m_2 \,\square \ldots \square\, m_n$ натуральное число $\tau^n(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ является кодом этой n-ки. Мы заметим, что приведенное кодирование можно осуществить нормальными алгорифмами в алфавите Ξ.

Как известно, для любых НЧ n, $2 \leqq n$, и ЧРФ n переменных ψ_0 существует НЧ m такое, что

$$\forall p_1 p_2 \ldots p_n (\psi_0(p_1, p_2, \ldots, p_n) \simeq \varphi_m(\tau^n(p_1, p_2, \ldots, p_n)))\,.$$

Для числовых множеств мы будем пользоваться следующими понятиями из [10], §§ 4.3 и 7.1:

1) одно-односводимостью ($\leqq_1$) и одно-одноэквивалентностью ($\equiv_1$),

2) много-односводимостью ($\leqq_m$) и много-одноэквивалентностью ($\equiv_m$) и

3) рекурсивным изоморфизмом.

Мы заметим, что два числовых множества рекурсивно изоморфны тогда и только тогда, когда они одно-одноэквивалентны (Майхилл, [10], стр. 116).

Мы будем пользоваться понятием канонического индекса для конечных множеств НЧ (заданных посредством системы НЧ, т. е. списком), введенным в [10], § 5.6. При этом, следуя Роджерсу, мы через D_m обозначим конечное множество, каноническим индексом которого является НЧ m.

При определении конструктивного аналога понятия функции частичнорекурсивной относительно числового множества мы будем следовать способу, избранному Роджерсом ([10], § 9.2). В частности, мы будем пользоваться понятием регулярного рекурсивно перечислимого множества и общерекурсивной функцией ϱ из теоремы II названного параграфа, которая обладает тем свойством, что для любого НЧm

а) $W_{\varrho(m)}$ – регулярное множество и

б) если W_m регулярное множество, то $W_{\varrho(m)} = W_m$.

Мы подчеркиваем, что употребление двойного отрицания в следующем определении является неизбежным ввиду употребляемого нами конструктивного понимания математических суждений.

Определения. Пусть B числовое множество, а m, k, и n НЧ.

1) Выражение $\langle m\rangle^B$ мы назовем B-частичнорекурсивной функцией (B-ЧРФ) или функцией частичнорекурсивной относительно множества B.

2) Мы говорим, что выражение $\langle m\rangle^B(k)$ осмыслено (B-ЧРФ применима к НЧ k), и пишем $!\langle m\rangle^B(k)$, если

$$\neg\neg\exists lpq(\tau^4(k, l, p, q) \in W_{\varrho(m)} \,\&\, D_p \subseteq B \,\&\, D_q \subseteq \setminus B)\,.$$

3) Если

$$\neg\neg\exists pq(\tau^4(k, n, p, q) \in W_{\varrho(m)} \,\&\, D_p \subseteq B \,\&\, D_q \subseteq \setminus B)\,,$$

то мы говорим, что НЧ n является значением выражения $\langle m\rangle^B(k)$ (результатом применения B-ЧРФ $\langle m\rangle^B$ к НЧ k), причем $\langle m\rangle^B(k)$ является для нас обозначением для НЧ n.

4) Любое НЧ l такое, что

$$\forall t(\langle m\rangle^B(t) \simeq \langle l\rangle^B(t))\,,$$

мы называем геделевым номером B-ЧРФ $\langle m\rangle^B$.

5) Если $\forall t(!\langle m\rangle^B(t))$, то мы $\langle m\rangle^B$ называем B-общерекурсивной функцией (B-ОРФ).

6) Для любых НЧ t и $k_0, k_1, \ldots, k_t$, где $1 \leqq t$, мы обозначим

$$\langle m\rangle^B(k_0, k_1, \ldots, k_t) \rightleftharpoons \langle m\rangle^B(\tau^{t+1}(k_0, k_1, \ldots, k_t))\,.$$

Обозначение. Для любого числового множества B мы посредством Tot^B обозначим числовое множество $\{m \mid \forall l(!\langle m\rangle^B(l))\}$, т. е. множество всех геделевых номеров B-общерекурсивных функций.

Мы заметим, что для всякого числового множества B

а) ввиду свойств ОРФ ϱ для любых НЧ m, n, k и l верно

$$\langle m\rangle^{B}(n) \simeq k \,\&\, \langle m\rangle^{B}(n) \simeq l \supset k \mathrel{\mp} l \quad \text{и}$$

б) числовые предикаты $!\langle t\rangle^{B}(p)$ и $\langle t\rangle^{B}(p) \simeq q$ являются нормальными, т. е. логически эквивалентны своему двойному отрицанию.

Определение. Пусть B_0 и B_1 числовые множества, а для НЧ i, $0 \leqq i \leqq 1$, ψ_i ЧРФ или B_i-ЧРФ. Если выполнено $\forall n(\psi_0(n) \simeq \psi_1(n))$, то мы скажем, что ψ_0 и ψ_1 – равны (равные функции), и будем писать $\psi_0 \sim \psi_1$.

Согласно принципу А. А. Маркова [4] верно следующее.

Теорема 2.1. Для любого рекурсивного числового множества B существуют ОРФ $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$ такие, что

$$\forall m(\langle m\rangle^{B} \sim \varphi_{\varkappa_0(m)} \,\&\, \varphi_m \sim \langle \varkappa_1(m)\rangle^{B}).$$

Как видно, мы посредством $\langle m\rangle^{\varnothing}$ получаем эффективную нумерацию всех ЧРФ. В следующем мы будем, пока не скажем другое, пользоваться этой нумерацией.

Для функций частичнорекурсивных относительно числовых множеств имеет место сильный частично релятивизованный вариант известной $s - m -$ $- n$-теоремы (см. [10], стр. 177). В согласии с этим результатом мы будем в следующем для любых НЧ n и m, $1 \leqq m \,\&\, 1 \leqq n$, посредством s_n^m обозначать ОРФ $m + 1$ переменных такую, что для любых числового множества B и всяких НЧ $p, k_1, k_2, \ldots, k_m, l_1\ l_2, \ldots, l_n$ выполнено

$$\langle p\rangle^{B}(k_1, k_2, \ldots, k_m, l_1, l_2, \ldots, l_n) \simeq \langle s_n^m(p, k_1, k_2, \ldots, k_m)\rangle^{B}(l_1, l_2, \ldots, l_n).$$

Мы напомним что $s - m - n$-теорема – инструмент большой силы с широкой областью применения. Ведь, например, известная теорема о рекурсии является следствием названной теоремы ([10], гл. 11).

В следующем мы будем посредством Sub обозначать ОРФ двух переменных такую что для любых числового множества B и НЧ m, n и p выполнено

$$\langle m\rangle^{B}(\langle n\rangle^{B}(p)) \simeq \langle Sub(m, n)\rangle^{B}(p).$$

Обозначение. Для любых числового множества B и B-ЧРФ ψ мы обозначим

$$\mathrm{dom}(\psi) \rightleftharpoons \{k \mid !\psi(k)\}$$

и

$$\mathrm{range}(\psi) \rightleftharpoons \{n \mid \neg\neg\exists k(\psi(k) \simeq n)\}.$$

$\mathrm{dom}(\psi)$ (соотв. $\mathrm{range}(\psi)$) мы назовем числовой областью определения (соотв. значений) B-ЧРФ ψ.

Определения. Пусть A и B числовые множества, а $Q(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ n-арный (n-местный) числовой предикат.

1) Мы скажем, что предикат Q является B-частичнорекурсивным (частичнорекурсивным относительно B), если осуществимо НЧ m такое, что

$$\forall k_1 k_2 \ldots k_n (Q(k_1, k_2, \ldots, k_n) \equiv\, !\langle m\rangle^{B}(k_1, k_2, \ldots, k_n))\,. \tag{1}$$

Любое НЧ m, обладающее свойством (1), мы назовем геделевым номером предиката Q относительно множества B.

2) Мы скажем, что предикат Q является B-общерекурсивным (общерекурсивным относительно B), если осуществимо НЧ m такое, что

$$m \in \mathrm{Tot}^{B} \;\&\; \forall k_1 k_2 \ldots k_n ((Q(k_1, k_2, \ldots, k_n) \equiv \langle m\rangle^{B}(k_1, k_2, \ldots, k_n) \simeq 0)\;\& \\ \&\,(\neg Q(k_1, k_2, \ldots, k_n) \equiv \langle m\rangle^{B}(k_1, k_2, \ldots, k_n) \simeq 1))\,. \tag{2}$$

Любое НЧ m, обладающее свойством (2), мы назовем характеристическим B-индексом предиката Q.

3) Мы скажем, что числовое множество A, $A \rightleftharpoons \{n \mid P(n)\}$, рекурсивно перечислимо относительно B — B-рекурсивно перечислимо (соотв. рекурсивно относительно B — B-рекурсивно), если числовой предикат $P(n)$ является B-частичнорекурсивным (соотв. B-общерекурсивным).

Любое НЧ m, которое является геделевым номером предиката $P(n)$ относительно множества B, мы назовем геделевым номером множества A относительно множества B. Аналогично, любое НЧ m, которое является характеристическим B-индексом предиката $P(n)$, мы назовем характеристическим B-индексом множества A.

4) а) Если числовое множество A рекурсивно относительно B, то мы обозначим $A \leqq_T B$.

б) Мы обозначим $A \equiv_T B \rightleftharpoons A \leqq_T B \;\&\; B \leqq_T A$.

Замечание 2.1. 1) Если НЧ m является геделевым номером числового множества A относительно B, то выполнено $A = \mathrm{dom}(\langle m\rangle^{B})$.

2) Если числовое множество A рекурсивно перечислимо (соотв. рекурсивно) относительно B, то A является нормальным множеством. Поэтому отношения „A рекурсивно перечислимо относительно B", $A \leqq_T B$ и $A \equiv_T B$ являются рефлексивными только для нормальных множеств.

3) Отношение $A \leqq_T B$ транзитивно, а $A \equiv_T B$ транзитивно и симметрично.

4) Ввиду релятивизованной теоремы Поста ([10], стр. 327) отношение $A \leqq_T B$ выполнено тогда и только тогда, когда множества A и $\setminus A$ B-рекурсивно перечислимы.

5) Для любых числовых множеств A и B из $A \leqq_T B$ следует $\setminus A \leqq_T B$. (Мы заметим, что обратное утверждение верно для нормальных множеств, а в общем случае неверно.)

Определение. Числовое множество A мы назовем начальным сегментом множества $\mathbf{N}$, если выполнено

$$\forall mn(m \in A \,\&\, n < m \supset n \in A) .$$

Теорема 2.2. Существуют общерекурсивные функции f_1, f_2 и g такие, что для любых числового множества B и НЧ m выполнено

$$1) \qquad \mathrm{dom}\,(\langle g(m)\rangle^B) = \mathrm{range}\,(\langle m\rangle^B)$$

и

$$2) \qquad \mathrm{range}\,(\langle f_1(m)\rangle^B) = \mathrm{range}\,(\langle f_2(m)\rangle^B) = \mathrm{dom}\,(\langle m\rangle^B) ,$$

причем

а) если $\neg(\mathrm{dom}\,(\langle m\rangle^B) = \varnothing)$, то $\langle f_1(m)\rangle^B$ B-ОРФ и

б) $\mathrm{dom}\,(\langle f_2(m)\rangle^B)$ является начальным сегментом множества $\mathbf{N}$ и B-ЧРФ $\langle f_2(m)\rangle^B$ перечисляет без повторений множество $\mathrm{dom}\,(\langle m\rangle^B)$.

В теоремах о проекции нам нужно (ввиду конструктивного понимания математических суждений) в отличие от [10], стр. 92 и 177, наместо квантора существования писать его двойное отрицание.

Теорема 2.3. Существуют ОРФ f, g и h такие, что для любых числового множества B и НЧ m

1) для всякого B-общерекурсивного бинарного числового предиката $Q(k, l)$ с характеристическим B-индексом m НЧ $f(m)$ является геделевым номером относительно B B-частичнорекурсивного унарного числового предиката $\neg\neg\exists k\, Q(k, l)$,

2) для всякого B-частичнорекурсивного бинарного числового предиката $Q(k, l)$ с геделевым номером относительно B — m НЧ $g(m)$ является геделевым номером относительно B B-частичнорекурсивного унарного предиката $\neg\neg\exists k\, Q(k, l)$,

3) для любого B-частичнорекурсивного унарного числового предиката $Q(k)$ с геделевым номером относительно B — m НЧ $h(m)$ является характеристическим B-индексом B-общерекурсивного бинарного числового предиката $P(k, l)$ такого, что

$$\forall k(Q(k) \equiv \neg\neg\exists l\, P(k, l)) .$$

В релятивизованной теории ЧРФ можно пользоваться оператором минимизации (μ). Нам в дальнейшем понадобится следующий результат.

Теорема 2.4. Существует ОРФ $minim$ такая, что для любых числового множества B и НЧ m и k верно

$$!\langle minim(m)\rangle^{\mathrm{B}}(k) \equiv \neg\neg\exists l(\langle m\rangle^{\mathrm{B}}(k,l) \simeq 0 \,\&\, \forall p(p < l \supset !\langle m\rangle^{\mathrm{B}}(k,p)))$$

и

$$!\langle minim(m)\rangle^{\mathrm{B}}(k) \supset \langle m\rangle^{\mathrm{B}}(k, \langle minim(m)\rangle^{\mathrm{B}}(k)) \simeq$$
$$\simeq 0 \,\&\, \neg\exists p(p < \langle minim(m)\rangle^{\mathrm{B}}(k) \,\&\, \langle m\rangle^{\mathrm{B}}(k,p) \simeq 0)\,.$$

Обозначение. В дальнейшем мы будем без ссылок пользоваться обозначением, введенным в предыдущей теореме. В большинстве случаев мы для всяких B-ЧРФ ψ с геделевым номером m и бинарного числового предиката $\mathrm{Q}(k,l)$ с характеристическим B-индексом n будем наместо $\langle minim(m)\rangle^{\mathrm{B}}(k)$ писать $\mu l(\psi(k,l) \simeq 0)$, а наместо $\langle minim(n)\rangle^{\mathrm{B}}(k)$ писать

$$\mu l\, \mathrm{Q}(k,l)\,.$$

Определения. Мы для всяких числового множества B и НЧ m и t определим

1) $$\mathrm{W}_m^{\mathrm{B}} \rightleftharpoons \mathrm{dom}\,(\langle m\rangle^{\mathrm{B}})\,,$$

2) $$\mathrm{B}' \rightleftharpoons \{m \mid m \in \mathrm{W}_m^{\mathrm{B}}\}\,, \quad \text{т. е.} \quad \mathrm{B}' = \{m \mid\, !\langle m\rangle^{\mathrm{B}}(m)\}$$

(B' называется скачком множества B) и

3) $$\mathrm{B}^{(0)} \rightleftharpoons \mathrm{B}\,, \quad \mathrm{B}^{(t+1)} \rightleftharpoons (\mathrm{B}^{(t)})'\,.$$

В следующем мы часто будем для любых НЧ m и k

$$\langle m\rangle^{\varnothing^{(k)}} \quad \text{сокращать до} \quad \langle m\rangle^{[k]}\,.$$

Замечание 2.2. Для любого числового множества B скачек множества B (т. е. B') является нормальным B-рекурсивно перечислимым множеством, которое не является B-рекурсивным. Существуют НЧ $jump$ и deg такие, что для любого числового множества B верно

$\mathrm{W}_{jump}^{\mathrm{B}} = \mathrm{B}'$, $deg = f_2(jump)$, где f_2 ОРФ из теоремы 2.2, и, следовательно, $\langle deg\rangle^{\mathrm{B}}$ B-ОРФ, перечисляющая без повторений множество B'.

Для нормальных числовых множеств имеют место и в конструктивном смысле известные из [10] связи между операцией скачка, одно-односводимостью, T-сводимостью ($\leqq_{\mathrm{T}}$) и отношением быть рекурсивно перечислимым относительно.

Теорема 2.5. Существует взаимно однозначная ОРФ f такая, что для любого числового множества B верно

$$\forall k(\neg\neg(k \in \mathrm{B}) \equiv f(k) \in \mathrm{B}')$$

и, следовательно, если B нормальное множество, то $\mathrm{B} \leqq_1 \mathrm{B}'$ посредством f.

Теорема 2.6. Существуют ОРФ g и h такие, что для всяких числовых множеств А и В и НЧ m верно

а) $W_m^B \leqq_1 B'$ посредством ОРФ $\langle g(m)\rangle^{[0]}$ и

б) если $A \leqq_1 B'$ посредством ОРФ $\langle m\rangle^{[0]}$, то $A = W_{h(m)}^B$.

Следствие. Существует ОРФ ψ такая, что для всяких числового множества В и НЧ m натуральное число $\psi(m)$ является характеристическим В'-индексом

а) любого числового предиката В-частичнорекурсивного с геделевым номером (относительно В) m и

б) множества W_m^B.

Теорема 2.7. Существует ОРФ $\varkappa$ такая, что для всяких числовых множеств А и В и НЧ m, которое является характеристическим В-индексом множества А (и, следовательно, верно $A \leqq_T B$), выполнено $A' \leqq_1 B'$ посредством ОРФ $\langle \varkappa(m)\rangle^{[0]}$.

Мы заметим, что $(A' \leqq_1 B' \supset A \leqq_T B)$ верно в конструктивном смысле только тогда, когда А — нормальное множество.

Следующее утверждение свидетельствует о том, что для любых числовых множеств С и В, $C \leqq_T B$, можно по всякой С-ЧРФ построить равную ей В-ЧРФ.

Теорема 2.8. Существует ОРФ двух переменных g такая, что для любых числовых множеств С и В и НЧ m, которое является характеристическим В-индексом множества С (и, следовательно, имеет место $C \leqq_T B$), верно

$$\forall k(\langle g(k, m)\rangle^B \sim \langle k\rangle^C)\,.$$

Обозначение. Посредством up мы обозначим ОРФ двух переменных такую, что для всякого числового множества В выполнено

$$\forall kt((\langle up\,(k, t)\rangle^{B^{(t)}} \sim \langle k\rangle^B)\,\&\, up\,(k, 0) = k)\,.$$

В следующем мы часто будем встречаться с тем, что для числовых множеств С и В, $C \leqq_T B$, мы будем значения определенной С-ЧРФ считать геделевыми номерами В-частичнорекурсивных функций. Следующая теорема о сведении показывает, что мы взамен этой С-ЧРФ можем пользоваться определенной $\varnothing$-общерекурсивной функцией.

Теорема 2.9 (о сведении). Существует ОРФ двух переменных f такая, что для любых числовых множеств В и С, $C \leqq_T B$, всякого характеристического В-индекса множества С — m и НЧ p

1) $\langle f(m, p)\rangle^{\varnothing}$ $\varnothing$-ОРФ,

2) для всякого НЧ k верно

$$\forall q(\langle\langle f(m, p)\rangle^{\varnothing}(k)\rangle^{\mathrm{B}}(q) \simeq \langle\langle p\rangle^{\mathrm{C}}(k)\rangle^{\mathrm{B}}(q))$$

и, следовательно,

а) если $!\langle p\rangle^{\mathrm{C}}(k)$, то $\langle\langle f(m, p)\rangle^{\varnothing}(k)\rangle^{\mathrm{B}} \sim \langle\langle p\rangle^{\mathrm{C}}(k)\rangle^{\mathrm{B}}$, и

б) если $\neg !\langle p\rangle^{\mathrm{C}}(k)$, то $\langle f(m, p)\rangle^{\varnothing}(k)$ геделев номер нигде неопределенной В-ЧРФ.

Другой способ сведения (неполного) показан в следующей теореме.

Теорема 2.10. Существует ОРФ g такая, что для любых числового множества В и НЧ p и q

1) $\langle g(p)\rangle^{\varnothing}$ $\varnothing$-ОРФ и

2) если $!\langle p\rangle^{\mathrm{B}'}(q)$, то

$$\forall l(!\langle\langle p\rangle^{\mathrm{B}'}(q)\rangle^{\mathrm{B}}(l) \supset !\langle\langle g(p)\rangle^{\varnothing}(q)\rangle^{\mathrm{B}}(l))\,\&$$
$$\&\ \neg\neg\exists k\,\forall l(k \leqq l \supset \langle\langle p\rangle^{\mathrm{B}'}(q)\rangle^{\mathrm{B}}(l) \simeq \langle\langle g(p)\rangle^{\varnothing}(q)\rangle^{\mathrm{B}}(l)).$$

Определение. Пусть В числовое множество, ψ В-ЧРФ, а n НЧ. Тогда для любых НЧ $p, k_1, k_2, \ldots, k_n$ обозначим

$$p \lim_q \psi(k_1, k_2, \ldots, k_n, q) \rightleftharpoons \neg\neg\exists m\,\forall l(m \leqq l \supset \psi(k_1, k_2, \ldots, k_n, l) \simeq p).$$

Теорема 2.11. Существует НЧ q_0 такое, что для любых числового множества В и НЧ n, $0 < n$, $\langle q_0\rangle^{\mathrm{B}}$ В-ОРФ такая, что $\forall mkl(\langle m\rangle^{\mathrm{B}^{(n)}}(k) \simeq l \equiv \equiv \neg\neg\exists p(\langle q_0\rangle^{\mathrm{B}}(n, m, k, l, p) \in \setminus \mathrm{B}^{(n)}))$.

При помощи этого результата можно доказать следующее очень полезное утверждение.

Теорема 2.12 (ср. [22] и [23]). 1) Существует ОРФ двух аргументов $\varkappa$ такая, что для любых числового множества В, положительного НЧ n и НЧ m верно

а) $\langle\varkappa(n, m)\rangle^{\mathrm{B}^{(n-1)}}$ $\mathrm{B}^{(n-1)}$-ОРФ,

б) $\forall k(!\langle m\rangle^{\mathrm{B}^{(n)}}(k) \equiv \neg\neg\exists l(l \lim_q \langle\varkappa(n, m)\rangle^{\mathrm{B}^{(n-1)}}(k, q)))$ и

в) $\forall kl(\langle m\rangle^{\mathrm{B}^{(n)}}(k) \simeq l \supset l \lim_q \langle\varkappa(n, m)\rangle^{\mathrm{B}^{(n-1)}}(k, q))$.

2) Существует ОРФ ϑ такая, что для любых числового множества В и НЧ m, если $\langle m\rangle^{\mathrm{B}}$ В-ОРФ, то для всякого НЧ k

а) $!\langle\vartheta(m)\rangle^{\mathrm{B}'}(k) \equiv \neg\neg\exists l(l \lim_q \langle m\rangle^{\mathrm{B}}(k, q))$ и

б) $!\langle\vartheta(m)\rangle^{\mathrm{B}'}(k) \supset (\langle\vartheta(m)\rangle^{\mathrm{B}'}(k) \lim_q \langle m\rangle^{\mathrm{B}}(k, q))$.

Важный способ классификации числовых множеств дает нам так называемая арифметическая иерархия ([10], главы 14 и 15). Ввиду используемого нами конструктивного понимания математических суждений необходимо в определениях $\sum_n$- и $\prod_n$-префиксов заменить все вхождения квантора $\exists$ на $\neg\neg\exists$. Этим путем мы получим конструктивные понятия $\sum_n$- и $\prod_n$-префикса (например, $\sum_3$-префиксом будет $\neg\neg\exists\forall\neg\neg\exists$), $\sum_n$- и $\prod_n$-форем и $\sum_n$- и $\prod_n$-классов числовых множеств (т. е. классов множеств выразимых соответственно в $\sum_n$- и $\prod_n$-формах). Релятивизацией названных понятий мы для всякого числового множества B получим $\sum_n^{\mathrm{B}}$- и $\prod_n^{\mathrm{B}}$-классы. Следует напомнить, что в случае рекурсивного множества B $\sum_n^{\mathrm{B}}$-класс (соотв. $\prod_n^{\mathrm{B}}$-класс) совпадает с $\sum_n$-классом (соотв. $\prod_n$-классом).

В теории релятивизованных частичнорекурсивных функций и в арифметической иерархии очень важны теоремы о нормальной форме. Мы приведем полезный вариант этой теоремы (для ЧРФ).

Теорема 2.13. Существует ОРФ ψ такая, что для любых числового множества B и НЧ n — $\psi(n)$ характеристический B-индекс B-общерекурсивного предиката $\mathrm{T}^{\mathrm{B}}_{n+1}(m, k, l_1, l_2, \ldots, l_{n+1})$ такого, что

$$\forall mk(\langle m\rangle^{\mathrm{B}^{(n)}}(k) \simeq \pi_1(\mu l_1(\forall l_2 \neg\neg\exists l_3 \ldots \mathrm{T}^{\mathrm{B}}_{n+1}(m, k, l_1, l_2, \ldots, l_{n+1})))),$$

где перед $\mathrm{T}^{\mathrm{B}}_{n+1}$ стоит знак отрицания, если n нечетно, причем

$$\forall mkpq(\mathrm{T}^{\mathrm{B}}_1(m, k, p) \,\&\, \mathrm{T}^{\mathrm{B}}_1(m, k, q) \supset p = q).$$

В дальнейшем мы будем без ссылок пользоваться обозначениями из теоремы 2.13.

Следствие. Для любых числового множества B и НЧ k, m и n верно

$$k \in \mathrm{W}_m^{\mathrm{B}^{(n)}} \equiv \neg\neg\exists l_1 \forall l_2 \neg\neg\exists l_3 \ldots \mathrm{T}^{\mathrm{B}}_{n+1}(m, k, l_1, l_2, \ldots, l_{n+1})$$

и, следовательно,

$$k \in \mathrm{B}^{(n+1)} \equiv \neg\neg\exists l_1 \forall l_2 \neg\neg\exists l_3 \ldots \mathrm{T}^{\mathrm{B}}_{n+1}(k, k, l_1, l_2, \ldots, l_{n+1}),$$

где в обоих случаях перед $\mathrm{T}^{\mathrm{B}}_{n+1}$ стоит знак отрицания, если n нечетно.

На основании предыдущей теоремы, замечания 2.1 и теоремы 2.3 мы получим сильную теорему об иерархии.

Теорема 2.14. Для любых числовых множеств A и B и НЧ n верно

1) A принадлежит классу $\sum^{\mathrm{B}}_{n+1}$ тогда и только тогда, когда множество A является $\mathrm{B}^{(n)}$-рекурсивно перечислимым, т. е. существует НЧ m такое, что $\mathrm{A} = \mathrm{W}_m^{\mathrm{B}^{(n)}}$, и

2) A принадлежит обоим классам $\sum^{\mathrm{B}}_{n+1}$ и $\prod^{\mathrm{B}}_{n+1}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{A} \leqq_{\mathrm{T}} \mathrm{B}^{(n)}$.

Приведенные результаты показывают, что для любых числового множества В и НЧ n мы на основании В-общерекурсивного предиката T^{B}_{n+1} получаем нумерации как $B^{(n)}$-ЧРФ так и числовых множеств $\sum^{B}_{n+1}$-класса.

Мы уже показали, что конструктивное понимание квантора существования основано на понятии ЧРФ. Мы введем релятивизованный квантор существования, понимание которого основано аналогичным образом на понятии релятивизованной ЧРФ. Вводимые нами кванторы служат расширению наших выразительных средств.

Для любых числового множества В и числового предиката $P(k)$ выражение $\exists^{B}k\, P(k)$ обозначает: осуществима В-ЧРФ ψ такая, что $!\psi(0)\,\&\,P(\psi(0))$.

Таким образом, если предикат $P(k)$ не содержит переменную m, то

$$\exists^{B}k\, P(k) \equiv \exists m(!\langle m\rangle^{B}(0)\,\&\,P(\langle m\rangle^{B}(0)))$$

и релятивизованный квантор существования переводится на прежний конструктивный квантор существования.

Мы будем выражение „$\exists^{B}$" читать „В-осуществимо" или „осуществимо относительно В".

Для любого НЧ k мы часто будем $\exists^{\varnothing^{(k)}}$ сокращать до $\exists^{[k]}$.

Мы заметим, что приведенное нами определение вместе с принципами конструктивного понимания математических суждений дают нам понимание релятивизованного квантора существования и в более сложных случаях. Например, для любых числового множества В и предиката $P(k, l)$, который не содержит переменные m, n и p, мы постепенно получаем

$$\begin{aligned}\forall k\,\exists^{B}l\,P(k,l) &\equiv \forall k\,\exists m(!\langle m\rangle^{B}(0)\,\&\,P(k,\langle m\rangle^{B}(0))) \equiv\\ &\equiv \exists n\,\forall k(!\langle n\rangle^{\varnothing}(k)\,\&\,!\langle\langle n\rangle^{\varnothing}(k)\rangle^{B}(0)\,\&\,P(k,\langle\langle n\rangle^{\varnothing}(k)\rangle^{B}(0))) \equiv\\ &\equiv \exists p\,\forall k(!\langle p\rangle^{B}(k)\,\&\,P(k,\langle p\rangle^{B}(k))),\end{aligned}$$

где последнее выражение значит: осуществима В-ОРФ f такая, что верно $\forall k\, P(k, f(k))$.

§ 3. М-отображения, М-операторы, М-последовательности

Пусть М нормальное числовое множество, $\mathbf{\Gamma}_1$ и $\mathbf{\Gamma}_2$ (непустые) алфавиты, k НЧ, а f М-частичнорекурсивная функция, $f \sim \langle k\rangle^{M}$.

Тогда мы 1) а) $(\mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2)$-интерпретацией М-ЧРФ f назовем выражение $[\![f]\!]_{\mathbf{\Gamma}_1,\mathbf{\Gamma}_2}$, для всякого слова P в алфавите $\mathbf{\Gamma}_1$ определим

$$[\![f]\!]_{\mathbf{\Gamma}_1,\mathbf{\Gamma}_2}(P) \rightleftharpoons \mathrm{c}_{\mathbf{\Gamma}_2}(f(\mathrm{н}_{\mathbf{\Gamma}_1}(P)))$$

и скажем, что $[\![f]\!]_{\mathbf{\Gamma}_1,\mathbf{\Gamma}_2}$ применима к слову P, и будем писать $![\![f]\!]_{\mathbf{\Gamma}_1,\mathbf{\Gamma}_2}(P)$, если $!f(\mathrm{н}_{\mathbf{\Gamma}_1}(P))$, б) k назовем геделевым номером $(\mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2)$-интерпретации $[\![f]\!]_{\mathbf{\Gamma}_1,\mathbf{\Gamma}_2}$ и

2) а) $(\mathrm{M}, \mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2)$-отображениями мы будем называть $(\mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2)$-интерпретации М-частичнорекурсивных функций и

б) (Ξ, Ξ)-интерпретации мы будем просто называть интерпретациями, (M, Ξ, Ξ)-отображения – М-отображениями и в связи с этим $[\![f]\!]_{\Xi,\Xi}$ сокращать до $[\![f]\!]$.

Пусть $\mathbf{\Gamma}_1$ и $\mathbf{\Gamma}_2$ алфавиты, M_1 и M_2 нормальные числовые множества, $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ нормальные словарные множества, $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ нормальные словарные множества с равенством соответственно в алфавитах $\mathbf{\Gamma}_1$ и $\mathbf{\Gamma}_2$. Тогда мы

1) $(\mathrm{M}_1, \mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2)$-отображение $\mathscr{F}$ назовем

а) $(\mathrm{M}_1, \mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2)$-отображением типа $(\mathfrak{M}_1 \underset{\mathrm{p}}{\rightarrow} \mathfrak{M}_2)$ (соотв. типа $(\mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_2)$), если $\forall S(S \in \mathfrak{M}_1 \mathbin{\&} !\mathscr{F}(S) \supset \mathscr{F}(S) \in \mathfrak{M}_2)$ (соотв. $\forall S(S \in \mathfrak{M}_1 \supset !\mathscr{F}(S) \mathbin{\&} \mathscr{F}(S) \in \mathfrak{M}_2)$),

б) $(\mathrm{M}_1, \mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2)$-оператором типа $(\mathfrak{A}_1 \underset{\mathrm{p}}{\rightarrow} \mathfrak{A}_2)$ (соотв. типа $(\mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_2)$), если $\mathscr{F}$ $(\mathrm{M}_1, \mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2)$-отображение типа $(\mathrm{Oc}(\mathfrak{A}_1) \underset{\mathrm{p}}{\rightarrow} \mathrm{Oc}(\mathfrak{A}_2))$ (соотв. типа $(\mathrm{Oc}(\mathfrak{A}_1) \rightarrow \mathrm{Oc}(\mathfrak{A}_2))$) и выполнено

$$\forall ST(S \in \mathfrak{A}_1 \mathbin{\&} T \in \mathfrak{A}_1 \mathbin{\&} S \underset{\mathfrak{A}_1}{=} T \supset (!\mathscr{F}(S) \equiv !\mathscr{F}(T)) \mathbin{\&} (!\mathscr{F}(S) \supset \mathscr{F}(S) \underset{\mathfrak{A}_2}{=} \mathscr{F}(T))),$$

2) $(\mathrm{M}_1, \mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2)$-оператор $\mathscr{F}_1$ типа $(\mathfrak{A}_1 \underset{\mathrm{p}}{\rightarrow} \mathfrak{A}_2)$ и $(\mathrm{M}_2, \mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2)$-оператор $\mathscr{F}_2$ типа $(\mathfrak{A}_1 \underset{\mathrm{p}}{\rightarrow} \mathfrak{A}_2)$ назовем равными операторами, если выполнено

$$\forall S(S \in \mathfrak{A}_1 \supset (!\mathscr{F}_1(S) \equiv !\mathscr{F}_2(S)) \mathbin{\&} (!\mathscr{F}_1(S) \supset \mathscr{F}_1(S) \underset{\mathfrak{A}_2}{=} \mathscr{F}_2(S))),$$

3) $\mathfrak{A}_1$-областью определения оператора $\mathscr{F}$ типа $(\mathfrak{A}_1 \underset{\mathrm{p}}{\rightarrow} \mathfrak{A}_2)$ назовем словарное множество $\bigwedge S(S \in \mathfrak{A}_1 \mathbin{\&} !\mathscr{F}(S))$,

4) (M_1, Ξ, Ξ)-операторы будем называть M_1-операторами.

Обозначения. Существует ОРФ f такая, что для всяких нормального числового множества М, непустого алфавита $\mathbf{\Gamma}$, НЧ m и p, где m число букв алфавита $\mathbf{\Gamma}$, и слов P и T в алфавите $\mathbf{\Gamma}$ выполнено

$$\langle p \rangle^{\mathrm{M}}(\mathrm{н}_{\mathbf{\Gamma}}(PT)) \simeq \langle f(m, p, \mathrm{н}_{\mathbf{\Gamma}}(P)) \rangle^{\mathrm{M}}(\mathrm{н}_{\mathbf{\Gamma}}(T)). \tag{3}$$

Мы для всяких нормального числового множества М, непустых алфавитов $\mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2$ и $\mathbf{\Gamma}_3$, слова P, $P \mathbin{\mho} \mathbf{\Gamma}_1$, НЧ m, p и q, где m число букв алфавита $\mathbf{\Gamma}_1$, $(\mathrm{M}, \mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2)$-отображения $\mathscr{E}$, $\mathscr{E} \rightleftharpoons [\![\langle p \rangle^{\mathrm{M}}]\!]_{\mathbf{\Gamma}_1,\mathbf{\Gamma}_2}$,
и $(\mathrm{M}, \mathbf{\Gamma}_2, \mathbf{\Gamma}_3)$-отображения $\mathscr{F}$, $\mathscr{F} \rightleftharpoons [\![\langle q \rangle^{\mathrm{M}}]\!]_{\mathbf{\Gamma}_2,\mathbf{\Gamma}_3}$, обозначим

а) посредством $\tilde{\mathscr{E}}_P$ $(\mathrm{M}, \mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2)$-отображение

$$[\![\langle f(m, p, \mathrm{н}_{\mathbf{\Gamma}_1}(P)) \rangle^{\mathrm{M}}]\!]_{\mathbf{\Gamma}_1,\mathbf{\Gamma}_2}$$

и б) посредством $\mathscr{F} * \mathscr{E}$ $(\mathrm{M}, \mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_3)$-отображение

$$[\![\langle Sub\,(q,\,p)\rangle^{\mathrm{M}}]\!]_{\mathbf{\Gamma}_1,\mathbf{\Gamma}_3}, \quad \text{где} \quad Sub \quad \text{ОРФ из § 2}.$$

Тогда для всякого слова T, $T \mho \mathbf{\Gamma}_1$, ввиду (3) и свойств ОРФ Sub выполнено

$$\tilde{\mathscr{E}}_P(T) \simeq \mathscr{E}(PT) \quad \text{и} \quad \mathscr{F} * \mathscr{E}(T) \simeq \mathscr{F}(\mathscr{E}(T)).$$

Определения. 1) Пусть M нормальное числовое множество, $\mathbf{\Gamma}_1$ и $\mathbf{\Gamma}_2$ алфавиты, $\{0, |\} \subseteq \mathbf{\Gamma}_1$, $\mathfrak{C}$ словарное множество в алфавите $\mathbf{\Gamma}_2$. Тогда мы

а) $(\mathrm{M}, \mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2)$-последовательностями элементов множества $\mathfrak{C}$ называем $(\mathrm{M}, \mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2)$-отображения типа $(\mathbf{N} \to \mathfrak{C})$,

б) $(\mathrm{M}, \mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2)$-последовательностями $(\mathrm{M}, \mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2)$-отображений определенного типа называем $(\mathrm{M}, \mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2)$-отображения $\mathscr{E}$ такие, что для всякого НЧ n — $\tilde{\mathscr{E}}_n$ $(\mathrm{M}, \mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2)$-отображение этого типа.

2) Для любого нормального числового множества M мы (M, Ξ, Ξ)-последовательности называем просто M-последовательностями.

3) Последовательностями словарных множеств определенного типа мы называем словарные множества $\mathfrak{C}$ такие, что

$$\forall S (S \in \mathfrak{C} \supset \exists n T (S \doteq n \,\Box\, T))$$

и для всякого НЧ n — $\tilde{\mathfrak{C}}_{n\Box}$ словарное множество этого типа.

Мы заметим, что ввиду конструктивного понимания математических суждений, если $\mathfrak{C}$ последовательность M-рекурсивно перечислимых (соотв. M-рекурсивных) словарных множеств, то словарное множество $\mathfrak{C}$ является M-рекурсивно перечислимым (соотв. M-рекурсивным).

Замечание. В случае надобности мы будем последовательности обозначать способом, который нам облегчит работу с их членами.

Например, если M нормальное числовое множество, $\mathscr{F}$ M-последовательность слов в алфавите Ξ, $\mathscr{E}$ M-последовательность M-отображений, а $\mathfrak{C}$ последовательность словарных множеств, то мы будем эти последовательности обозначать посредством

$$\{\mathscr{F}(n)\}_n^{\mathrm{M}}, \quad \{\tilde{\mathscr{E}}_n\}_n^{\mathrm{M}} \quad \text{и} \quad \{\tilde{\mathfrak{C}}_{n\Box}\}_n,$$

где мы, следуя определению, под $\mathscr{F}(n)$ понимаем результат применения M-отображения $\mathscr{F}$ к НЧ n.

При этом следует заметить, что, говоря, например, $\{P_n\}_n^{\mathrm{M}}$ M-последовательность слов в алфавите Ξ, мы тем самым утверждаем, что существует M-отображение типа $(\mathbf{N} \to \mathrm{S}_\Xi)$ $\mathscr{F}_0$ такое, что $\forall n(\mathscr{F}_0(n) \doteq P_n)$.

Определения. Для любого НЧ m мы часто будем $\varnothing^{(m)}$-отображения, $\varnothing^{(m)}$-операторы и $\varnothing^{(m)}$-последовательности называть $[m]$-отображениями,

$[m]$-операторами и $[m]$-последовательностями, а наместо

$$[\![\langle k\rangle^{\varnothing(m)}]\!], \quad \{P_n\}_n^{\varnothing(m)} \quad \text{и} \quad \{\mathscr{G}_n\}_n^{\varnothing(m)} \quad \text{писать}$$
$$[\![\langle k\rangle^{[m]}]\!], \quad \{P_n\}_n^{[m]} \quad \text{и} \quad \{\mathscr{G}_n\}_n^{[m]}.$$

Обозначение. Для любого НЧ n мы посредством $\mathbf{R}^{[n]}$ обозначим словарное множество

$$\bigwedge S(S \in \mathbf{N} \,\&\, \forall p(!\langle S\rangle^{[n]}(p))),$$

т. е. множество всех НЧ, являющихся геделевыми номерами $\varnothing^{(n)}$-общерекурсивных функций.

Обозначения. 1) Посредством σ_0 и σ_1 мы обозначим фиксированные $[0]$-отображения такие, что для всякого слова S в алфавите Ξ

а) σ_0 и σ_1 применимы к S и $\sigma_0(S)$ — целое число,

б) если слово S не начинается буквой $\square$, то $\sigma_0(S) \mathrel{\bar{\bar{\cdot}}} -1$ и $\forall i(\sigma_1(S \boxplus i) \mathrel{\bar{\bar{\cdot}}} \Lambda)$ и

в) если для НЧ k верно $S \mathrel{\bar{\bar{\cdot}}} \square P_0 \square P_1 \ldots \square P_k$, где для всякого НЧ i, $0 \leqq i \leqq k$, слово P_i не содержит букву $\square$, то

$$\sigma_0(S) \mathrel{\bar{\bar{\cdot}}} k \,\&\, \forall i((0 \leqq i \leqq \sigma_0(S) \supset \sigma_1(S \boxplus i) \mathrel{\bar{\bar{\cdot}}} P_i) \,\&$$
$$\&\, ((i < 0 \vee \sigma_0(S) < i) \supset \sigma_1(S \boxplus i) \mathrel{\bar{\bar{\cdot}}} \Lambda)).$$

2) Если $\mathfrak{M}$ словарное множество в алфавите Ξ, элементы которого не содержат букву $\square$, а $P \in {}^{\{\omega\}}\mathfrak{M}$, т. е. P — система элементов множества $\mathfrak{M}$, то мы будем — в случае надобности — эту систему обозначать посредством

$$\{\sigma_1(P \boxplus i)\}_{i=0}^{\sigma_0(P)}.$$

В заключение этого параграфа мы обратим внимание на используемую нами терминологию.

Мы напомним, что в конструктивной математике понятия фундаментальности, сходимости, непрерывности, дифференцируемости и т. д. связаны с существованием конструктивных последовательностей (в нашей терминологии $[0]$-последовательностей) НЧ, которые являются регуляторами фундаментальности, сходимости и т. д.. Поэтому, если М нормальное числовое множество и мы, например, скажем, что оператор является М-непрерывным в точке P, то это будет означать, что существует М-последовательность НЧ, которая является регулятором непрерывности этого оператора в названной точке. Если М-последовательность, обладающая описанными свойствами, не может не существовать, то мы скажем, как это привычно, что оператор является квази-М-непрерывным в точке P. Непрерывность в классическом смысле мы будем по-прежнему называть псевдонепрерывностью. Для любого НЧ k мы часто будем $\varnothing^{(k)}$-непрерывность называть просто $[k]$-непрерывностью.

§ 4. Релятивизация конструктивных аналогов вещественных чисел

Мы введем понятия, являющиеся релятивизацией конструктивных действительных чисел (КДЧ), конструктивных псевдочисел (ПЧ), квазичисел (КЧ) и квази-FL-чисел, введенных А. А. Марковым, Н. А. Шаниным, Г. С. Цейтиным и Б. А. Кушнером (см. [11] и [12]).

Обозначение. Посредством $Main$ мы обозначим фиксированное [0]-отображение такое, что для всяких слов S и T в алфавите Ξ, где T не содержит букву @, выполнено

$$Main(T) \simeq T \quad \text{и} \quad Main(S @ T) \simeq S@.$$

Определения. Пусть m НЧ.

а) Слово S мы назовем $[m]$-дуплексом (соотв. $[m]$-L-дуплексом), если существуют НЧ n и k такие, что $S \doteqdot n@^{\{m+1\}}k$, $[\![\langle n\rangle^{[m]}]\!]$ является $[m]$-последовательностью РЧ, а $[\![\langle k\rangle^{[m]}]\!]$ $[m]$-последовательностью НЧ, и для всякого НЧ l (соотв. не может не существовать НЧ s такое, что для всякого НЧ l, $s \leqq l$) выполнено

$$\forall pq([\![\langle k\rangle^{[m]}]\!](l) \leqq p \supset |[\![\langle n\rangle^{[m]}]\!](p) - [\![\langle n\rangle^{[m]}]\!](p+q)| < 2^{-l}).$$

б) Слово S мы назовем $[m]$-конструктивным действительным числом — $[m]$-КДЧ — (соотв. $[m]$-L-числом — $[m]$-LЧ), если S РЧ или существует НЧ n такое, что $n \leqq m$ и S является $[n]$-дуплексом (соотв. $[n]$-L-дуплексом).

Множество всех $[m]$-КДЧ мы обозначим посредством $\mathbf{D}^{[m]}$, а множество всех $[m]$-LЧ посредством $\mathbf{DL}^{[m]}$. Выполнено $\mathbf{D}^{[m]} \subseteq \mathbf{DL}^{[m]}$.

в) Слово S мы назовем $[m]$-квазичислом, если S РЧ или S оканчивается буквой @ и не может не существовать НЧ p такое, что $Sp \in \mathbf{D}^{[m]}$.

Множество всех $[m]$-квазичисел ($[m]$-КЧ) мы обозначим посредством $\boldsymbol{K}^{[m]}$ и заметим, что $\forall T(T \in \mathbf{DL}^{[m]} \supset Main(T) \in \mathbf{K}^{[m]})$.

г) Слово S мы назовем $[m]$-псевдочислом ($[m]$-ПЧ), если S РЧ или существуют НЧ n и k такие, что $n \leqq m \,\&\, S \doteqdot k@^{\{n+1\}}$ и $[\![\langle k\rangle^{[n]}]\!]$ $[n]$-последовательность РЧ, которая псевдофундаментальна, т. е. выполнено

$$\forall l \neg\neg\exists p \forall qs(p \leqq q \supset |[\![\langle k\rangle^{[n]}]\!](q) - [\![\langle k\rangle^{[n]}]\!](q+s)| < 2^{-l}).$$

Множество всех $[m]$-ПЧ мы обозначим посредством $\mathbf{\Pi}^{[m]}$ и заметим, что $\mathbf{K}^{[m]} \subseteq \mathbf{\Pi}^{[m]}$.

д) Слово S мы назовем арифметическим действительным числом (АДЧ), если $\exists n(S \in \mathbf{D}^{[n]})$.

Для всякого НЧ n словарные множества $\mathbf{D}^{[n]}$, $\mathbf{DL}^{[n]}$, $\mathbf{K}^{[n]}$, $\mathbf{\Pi}^{[n]}$ и множество всех АДЧ являются нормальными множествами, $x^{[n]}$, $y^{[n]}$ и $z^{[n]}$ (соотв. $\xi^{[n]}$, $\eta^{[n]}$) с индексами или без них будут переменными для $[n]$-КДЧ (соотв. $[n]$-ПЧ).

Мы заметим, что словарное множество $\mathbf{Q}$ (т. е. множество всех РЧ) является $\varnothing$-рекурсивным.

Обозначения. А) Пусть $[\![\langle p_0\rangle^{[0]}]\!]$ $[0]$-отображение типа $(\mathbf{S}_{\Xi} \to \mathbf{Q})$ и $[\![\langle p_1\rangle^{[0]}]\!]$ $[0]$-отображение типа $(\mathbf{S}_{\Xi} \to \mathbf{N})$ такие, что

$$\forall ak([\![\langle p_0\rangle^{[0]}]\!](a) \doteqdot a \;\&\; [\![\langle p_1\rangle^{[0]}]\!](k) \doteqdot k)\,.$$

Для всякого слова S в алфавите Ξ мы обозначим

1) посредством $\underbracket{S}$

а) $[0]$-последовательность $\{S\}_m^{[0]}$, если $S \in \mathbf{Q}$,

б) $[n]$-отображение $[\![\langle up(p_0, n)\rangle^{[n]}]\!] * [\![\langle k\rangle^{[n]}]\!]$, если $S \doteqdot k@^{\{n+1\}}T$, где слово T не начинается буквой @, а

в) $[0]$-последовательность $\{0\}_m^{[0]}$, если

$$\neg(S \in \mathbf{Q} \vee \exists kT(S \doteqdot k \,@\, T))\,,$$

2) посредством $\overbracket{S}$

а) $[0]$-последовательность НЧ $\{1\}_m^{[0]}$, если $\neg\exists lT(S \doteqdot T \,@\, l)$, а

б) $[n]$-отображение $[\![\langle up(p_1, n)\rangle^{[n]}]\!] * [\![\langle l\rangle^{[n]}]\!]$, если $S \doteqdot T@^{\{n+1\}}l$, где слово T не оканчивается буквой @.

Б) Для всяких слов S_1 и S_2 в алфавите Ξ_0 мы обозначим

$$\begin{aligned}
S_1 = S_2 &\rightleftharpoons (Main\,(S_1) \doteqdot Main\,(S_2) \vee \forall k \neg\neg\exists l\,\forall m(l \leqq m \supset \\
&\qquad \supset\, !\underbracket{S_1}(m) \,\&\, !\underbracket{S_2}(m) \,\&\, |\underbracket{S_1}(m) - \underbracket{S_2}(m)| < 2^{-k}))\,,\\
S_1 < S_2 &\rightleftharpoons \neg\neg\exists kl\,\forall m(l \leqq m \supset\, !\underbracket{S_1}(m) \,\&\, !\underbracket{S_2}(m) \,\&\\
&\qquad \&\, \underbracket{S_2}(m) - \underbracket{S_1}(m) \geqq 2^{-k})\,,\\
S_2 \preccurlyeq S_1 &\rightleftharpoons \neg(S_1 < S_2)\,.
\end{aligned}$$

Мы заметим, что на множестве всех слов в алфавите Ξ_0 $=$ является отношением эквивалентности, $<$ удовлетворяет условиям транзитивности и антирефлексивности и согласовано с $=$, для всяких слов S_1 и S_2 в алфавите Ξ_0 верно $\neg\neg(S_1 = S_2) \equiv S_1 = S_2$,

$$\neg\neg(S_1 < S_2) \equiv S_1 < S_2\,, \qquad S_1 = S_2 \supset S_1 \preccurlyeq S_2 \,\&\, S_2 \preccurlyeq S_1\,,$$

$$S_1 < S_2 \supset S_1 \preccurlyeq S_2 \,\&\, \neg(S_1 = S_2)\,, \quad S_1 = S_2 \equiv Main\,(S_1) = Main\,(S_2) \text{ и}$$

$S_1 < S_2 \equiv Main\,(S_1) < Main\,(S_2)$. Для всякого НЧ n и любого из множеств $\mathbf{D}^{[n]}, \mathbf{DL}^{[n]}, \mathbf{K}^{[n]}$ и $\mathbf{\Pi}^{[n]}$ $=$ является естественным отношением равенства на этом множестве, а $<$ удовлетворяет условиям, требуемым от отношения меньше. То же самое имеет место для объединения названных множеств. Отношение $\preccurlyeq$ мы будем называть мажорированием.

Для всякого НЧ n существуют $\varnothing^{(n)}$-частичнорекурсивные словарные предикаты Uneq_n и Less_n, которые не являются $\varnothing^{(n)}$-общерекурсивными и для которых верно

$$\forall x^{[n]} y^{[n]}((\mathrm{Uneq}_n (x^{[n]} \Box y^{[n]}) \equiv$$
$$\equiv \neg(x^{[n]} = y^{[n]})) \,\&\, (\mathrm{Less}_n (x^{[n]} \Box y^{[n]}) \equiv x^{[n]} < y^{[n]}))$$

(ср. [5]).

В следующем окажется полезным понятие $[n]$-стандартного действительного числа.

Определения. 1) Посредством ι_0 мы обозначим фиксированное НЧ, для которого верно

$$\forall nm(\iota_0 \in \mathbf{R}^{[n]} \,\&\, [\![\langle \iota_0 \rangle^{[n]}]\!](m) \simeq m)\,.$$

2) Пусть n НЧ. Слово S мы назовем $[n]$-стандартным действительным числом ($[n]$-СДЧ), если $S \in \mathbf{D}^{[n]} \,\&\, (S \in \mathbf{Q} \vee \exists T(S \mathrel{\underset{\cdot}{=}} T\iota_0))$.

Множество всех $[n]$-СДЧ мы обозначим посредством $\mathbf{CD}^{[n]}$.

3) Пусть St построенное нами $[0]$-отображение такое, что

$$\forall nTpqa((T \mho \Xi \supset {!St(T)}) \,\&\, St(a) \mathrel{\underset{\cdot}{=}} a \,\&\, St(p@^{\{n+1\}}) \mathrel{\underset{\cdot}{=}} p@^{\{n+1\}} \,\&$$
$$\& \,(T \mathrel{\underset{\cdot}{=}} p@^{\{n+1\}}q \supset \exists t(St(T) \mathrel{\underset{\cdot}{=}} t@^{\{n+1\}}\iota_0 \,\&\, \forall m(\underline{T}(\max_{0 \leqq j \leqq m} \overline{T}(j) + m) \simeq$$
$$\simeq [\![\langle t \rangle^{[n]}]\!](m)))))$$

и, следовательно,

$$\forall nx^{[n]}(St(x^{[n]}) \in \mathbf{CD}^{[n]} \,\&\, St(x^{[n]}) = x^{[n]}) \,\&$$
$$\& \,\forall nT(T \in \mathbf{DL}^{[n]} \supset St(T) \in \mathbf{DL}^{[n]} \,\&\, T = St(T))\,.$$

В случае определения типа оператора мы будем с множествами $\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{D}^{[n]}$, $\mathbf{DL}^{[n]}$, $\mathbf{K}^{[n]}$, $\mathbf{\Pi}^{[n]}$ и $\mathbf{CD}^{[n]}$ обращаться как с множествами с равенством, причем роль равенства играет отношение введенное выше.

В настоящем параграфе мы будем пользоваться следующими вспомогательными понятиями.

Определения. Пусть P слово в алфавите Ξ_0. Тогда мы

а) рангом слова P назовем число вхождений буквы @ в слово P и

б) порядком слова P назовем НЧ m такое, что

$$\begin{aligned} m &= 0\,, && \text{если} \quad P \in \mathbf{Q}\,, \\ m &= 1\,, && \text{если} \quad \exists pqs(P \mathrel{\underset{\cdot}{=}} p@^{\{s+1\}}q)\,, \\ m &= 2\,, && \text{если} \quad \exists ps(P \mathrel{\underset{\cdot}{=}} p@^{\{s+1\}})\,, \quad \text{а} \\ m &= 3 && \text{в остальных случаях}\,, \end{aligned}$$

в) слово P порядка m мы назовем регулярным, если верно

$$(m = 1 \supset \exists ps(P \doteq p@^{\{s+1\}}\iota_0)).$$

Очевидно, существует $[0]$-отображение $\mathscr{E}_1$ перерабатывающее всякое слово в алфавите Ξ_0 в НЧ, являющееся его рангом.

Посредством f мы обозначим $\varnothing$-ОРФ такую, что для всякого НЧ l $[\![\langle f(l)\rangle^{[0]}]\!]$ $[0]$-отображение типа $(\mathbf{Q} \to \mathbf{Q})$ и выпольнено

$$\forall a(\neg([\![\langle f(l)\rangle^{[0]}]\!](a) = 0) \& |[\![\langle f(l)\rangle^{[0]}]\!](a) - a| < 2^{-l-2}).$$

Ввиду свойств ОРФ up и теоремы о сведении (теорема 2.9) существует $[0]$-отображение $\mathscr{E}_2$ применимое к всякому слову в алфавите Ξ и такое, что для любых слов P_1 и P_2 в алфавите Ξ_0, если r максимум их рангов, а m максимум их порядков, то существуют регулярные слова S_1 и S_2 ранга r и порядка m такие, что

$$\begin{aligned}(\mathscr{E}_2(P_1 \square P_2) \doteq S_1 \square S_2) \& (m = 0 \supset S_1 \doteq P_1 \& S_2 \doteq P_2) \& \\ \& (1 \leqq m \leqq 2 \supset \forall ki(1 \leqq i \leqq 2 \supset \underbracket{S_i}(k) \simeq \\ \simeq [\![\langle f(k)\rangle^{[0]}]\!] (\underbracket{P_i}(1 + k + \max_{0 \leqq j \leqq k+1} \overbracket{P_i}(j)))))).\end{aligned}$$

Основные операции над $[n]$-КДЧ, $[n]$-LЧ, $[n]$-КЧ и $[n]$-ПЧ вводятся способом, который является релятивизацией того, что для случая $n = 0$ подробно описано в статье Н. А. Шанина [5] и в книге [11]. Таким образом, эти операции являются $[n]$-отображениями, а в случае всюду определенных операций даже $[n]$-операторами соответсвующего типа.

Например, в случае бинарной операции $\varkappa$ (сложения, вычитания, умножения, деления) мы поступаем так. Пусть $\mathscr{F}$ соответствующий операции $\varkappa$ $[0]$-оператор типа $({}^{(2)}\mathbf{Q} \to \mathbf{Q})$ (результатом деления нулем будет для нас нуль). Если P_1 и P_2 слова в алфавите Ξ_0, r_1 и r_2 соответственно их ранги, а m_1 и m_2 их порядки, то мы определим

$$r \rightleftharpoons \max(r_1, r_2) \quad \text{и} \quad m \rightleftharpoons \max(m_1, m_2).$$

1) Если $r > n + 1 \vee m = 3$, то мы будем результатом считать 0.

2) Пусть $r \leqq n + 1 \& m \leqq 2$ и пусть слово $S_1 \square S_2$ является результатом применения $[0]$-отображения $\mathscr{E}_2$ к слову $P_1 \square P_2$. Тогда, как мы знаем, r ранг, а m порядок регулярных слов S_1 и S_2.

а) Если $m = 0$ и, следовательно, $r = 0$ и $S_1 \in \boldsymbol{Q} \& S_2 \in \boldsymbol{Q}$, то результатом будет слово $\mathscr{F}(S_1 \square S_2)$, которое является приведенным рациональным числом (см. [5], стр. 40).

б) Если $1 \leqq m$, то $1 \leqq r$ и мы построим НЧ p такое, что

$$\forall n([\![\langle p\rangle^{[r-1]}]\!](n) \simeq \mathscr{F}(\underbracket{S_1}(n) \square \underbracket{S_2}(n))).$$

В случае, что $m = 2$, результатом будет слово $p@^{\{r\}}$.

В случае, что $m = 1$, мы построим НЧ q и $\bar{p}$, для которых выполнено

α) если S_1 и S_2 $[n]$-LЧ и операция $\varkappa$ должна быть применимой к $S_1 \Box S_2$, то $[\![\langle q\rangle^{[r-1]}]\!]$ возрастающая $[r-1]$-последовательность НЧ такая, что

$$(\forall i(1 \leqq i \leqq 2 \supset S_i \in \mathbf{D}^{[r-1]}) \supset p@^{\{r\}}q \in \mathbf{D}^{[r-1]})\ \&$$
$$\&\ (\forall i(1 \leqq i \leqq 2 \supset S_i \in \mathbf{DL}^{[r-1]}) \supset p@^{\{r\}}q \in \mathbf{DL}^{[r-1]}),$$

и

β) $\forall n([\![\langle \bar{p}\rangle^{[r-1]}]\!](n) \simeq [\![\langle p\rangle^{[r-1]}]\!]([\![\langle q\rangle^{[r-1]}]\!](n)))$.

Результатом будет слово $\bar{p}@^{\{r\}}\iota_0$.

Нетрудно усмотреть, что описанное преобразование слов можно осуществить при помощи $[n]$-отображения, геделев номер которого „равномерно“ зависит от n.

Итак, согласно свойствам $[0]$-отображения $\mathscr{E}_1$ и теореме о сведении существуют всюду на $\mathbf{S}_{\Xi_0 \cup \{\Box\}}$ определенные $[0]$-отображения $\mathscr{G}_0, \mathscr{G}_1, \ldots, \mathscr{G}_7$, осуществляющие для всех введенных нами видов чисел соответственно операции абсолютной величины, отрицания, сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в целую степень и возведения абсолютной величины в рациональную степень, причем выполнено

$$\forall Si(S \mho \Xi_0 \supset \mathscr{G}_7(S \Box i) \mathrel{\bar{\mp}} \mathscr{G}_6(\mathscr{G}_0(S) \Box i)).$$

В дальнейшем мы будем для этих отображений пользоваться обозначениями, привычными в элементарной математике, т. е. соответственно

$$|S|, \quad -S, \quad S+T, \quad S-T, \quad S.T, \quad S/T \ \left(\text{или } \frac{S}{T}\right), \quad (S)^T \quad \text{и} \quad |S|^T.$$

На основании введенных нами операций легко построить операции максимум и минимум, которые мы будем соответственно обозначать посредством

$$\max(S, T) \quad \text{и} \quad \min(S, T).$$

Таким образом, в частности, для всякого НЧ n, $|S|$ и $-S$ являются $[0]$-операторами каждого из типов

$$({}^{(i)}\mathbf{Q} \to \mathbf{Q}), \quad ({}^{(i)}\mathbf{D}^{[n]} \to \mathbf{CD}^{[n]}),$$
$$({}^{(i)}\mathbf{K}^{[n]} \to \mathbf{K}^{[n]}), \quad ({}^{(i)}\mathbf{\Pi}^{[n]} \to \mathbf{\Pi}^{[n]}) \quad \text{и} \quad ({}^{(i)}\mathbf{DL}^{[n]} \to \mathbf{DL}^{[n]}) \tag{4}$$

где

$$i = 1, \quad \text{а} \quad S+T, \quad S-T, \quad S.T,$$

$\max(S, T)$ и $\min(S, T)$ — $[0]$-операторами каждого из типов (4), где $i = 2$.

Для любого НЧ n мы построим, исходя от [0]-отображений S/T, S^T и $|S|^T$ и предиката Uneq_n, $[n]$-оператор $S/^{[n]}T$ типа

$$({}^{(2)}\boldsymbol{D}^{[n]} \underset{\mathrm{p}}{\rightarrow} \boldsymbol{D}^{[n]}) \quad \text{и} \quad [n]\text{-операторы} \quad S\uparrow^{[n]}T \quad \text{и} \quad |S|\uparrow_{\mathrm{r}}^{[n]}T$$

типа

$$(\boldsymbol{D}^{[n]} \square \boldsymbol{Q} \underset{\mathrm{p}}{\rightarrow} \boldsymbol{D}^{[n]})$$

такие, что

$$\forall x^{[n]}y^{[n]}((!x^{[n]}/^{[n]}y^{[n]} \equiv \neg(y^{[n]} = 0))\,\&$$
$$\&\,(!x^{[n]}/^{[n]}y^{[n]} \supset x^{[n]}/^{[n]}y^{[n]} \mathrel{\overset{\cdot}{=}} x^{[n]}/y^{[n]}))\,,$$
$$\forall x^{[n]}ia((!x^{[n]}\uparrow^{[n]}a \equiv \exists j(j = a\,\&\,(j \geqq 0 \vee j < 0\,\&\,\neg(x^{[n]} = 0))))\,\&$$
$$\&\,(!x^{[n]}\uparrow^{[n]}i \supset x^{[n]}\uparrow^{[n]}i \mathrel{\overset{\cdot}{=}} (x^{[n]})^{i})\,\&$$
$$\&\,(!|x^{[n]}|\uparrow_{\mathrm{r}}^{[n]}a \equiv (0 \leqq a \vee a < 0\,\&\,\neg(x^{[n]} = 0)))\,\&$$
$$\&\,(!|x^{[n]}|\uparrow_{\mathrm{r}}^{[n]}a \supset |x^{[n]}|\uparrow_{\mathrm{r}}^{[n]}a \mathrel{\overset{\cdot}{=}} |x^{[n]}|^{a})\,.$$

Исходя от определений, легко доказать, что выполнено

$$\forall nkx^{[n]}(|x^{[n]} - \underline{x^{[n]}}(\overline{x^{[n]}}(k))| \lessdot 2^{-k})$$

и, следовательно,

$$\forall nkx^{[n]}\,\exists^{[n]}a(|x^{[n]} - a| < 2^{-k})\,.$$

Определения. Пусть n НЧ. Тогда мы

а) $[n]$-сегментами (соотв. $[n]$-интервалами) называем слова в алфавите Ξ вида $S \bigtriangleup T$ (соотв. $S \bigtriangledown T$), где

$$S \in \mathbf{D}^{[n]}\,\&\,T \in \mathbf{D}^{[n]}\,\&\,S < T\,,$$

б) рациональными сегментами (соотв. интервалами) называем слова в алфавите Ξ вида $S \bigtriangleup T$ (соотв. $S \bigtriangledown T$), где

$$S \in \mathbf{Q}\,\&\,T \in \mathbf{Q}\,\&\,S < T\,,$$

в) определим для любых $[n]$-сегмента $x_1^{[n]} \bigtriangleup x_2^{[n]}$, $[n]$-интервала $y_1^{[n]} \bigtriangledown y_2^{[n]}$ и слова P в алфавите Ξ_0

$$\text{Эл}(x_1^{[n]} \bigtriangleup x_2^{[n]}) \rightleftharpoons x_1^{[n]}\,, \qquad \text{Эп}(x_1^{[n]} \bigtriangleup x_2^{[n]}) \rightleftharpoons x_2^{[n]}\,,$$
$$(x_1^{[n]} \bigtriangleup x_2^{[n]})^0 \rightleftharpoons x_1^{[n]} \bigtriangledown x_2^{[n]}\,, \quad P \in x_1^{[n]} \bigtriangleup x_2^{[n]} \rightleftharpoons (x_1^{[n]} \lessdot P\,\&\,P \lessdot x_2^{[n]})\,,$$
$$\text{Эл}(y_1^{[n]} \bigtriangledown y_2^{[n]}) \rightleftharpoons y_1^{[n]}\,, \qquad \text{Эп}(y_1^{[n]} \bigtriangledown y_2^{[n]}) \rightleftharpoons y_2^{[n]}\,,$$
$$P \in y_1^{[n]} \bigtriangledown y_2^{[n]} \rightleftharpoons (y_1^{[n]} < P\,\&\,P < y_2^{[n]})\,,$$

и

г) для любых слов U и V, которые являются $[n]$-сегментами (соотв. $[n]$-

интервалами), определим

$$|U| \rightleftharpoons (\text{Эп}(U) - \text{Эл}(U))$$

и

$$U = V \rightleftharpoons (\text{Эл}(U) = \text{Эл}(V) \,\&\, \text{Эп}(U) = \text{Эп}(V)).$$

Определения. Пусть n, m и t НЧ. Тогда мы будем

а) $[n]$-операторы типа $(\mathbf{D}^{[m]} \underset{\mathrm{p}}{\to} \mathbf{D}^{[t]})$ называть $[n, m, t]$-конструктивными функциями действительной переменной ($[n, m, t]$-КФДП), $[n]$-операторы типа $(\mathbf{D}^{[m]} \to \mathbf{D}^{[t]})$ всюду определенными $[n, m, t]$-КФДП,

б) всякую $[n, m, t]$-КФДП $\mathscr{F}$ такую, что

$$\forall x^{[m]}(!\mathscr{F}(x^{[m]}) \,\&\, (x^{[m]} \leqslant 0 \supset \mathscr{F}(x^{[m]}) =$$
$$= \mathscr{F}(0)) \,\&\, (1 \leqslant x^{[m]} \supset \mathscr{F}(x^{[m]}) = \mathscr{F}(1))),$$

называть просто $[n, m, t]$-функцией и

в) $[n, m, m]$-КФДП называть $[n; m]$-КФДП, $[n, n, n]$-КФДП называть $[n]$-КФДП, $[n, m, m]$-функции — $[n; m]$-функциями, а $[n, n, n]$-функции — $[n]$-функциями.

Мы заметим, что ввиду известной эквивалентности нормальных алгорифмов и частичнорекурсивных функций (см. [2]) существуют $[0]$-отображения Map типа $(\mathbf{S}_{\Xi} \to \mathbf{N})$ и Alg такие, что

а) для любых нормального алгорифма в алфавите Ξ — $\mathfrak{A}$ — и слова H, которое является его записью ([3], стр. 239), верно

$$\forall S(S \mho \Xi \supset [\![\langle Map(H)\rangle^{\varnothing}]\!](S) \simeq \mathfrak{A}_{\llcorner} S_{\lrcorner}) \quad \text{и}$$

б) для любого НЧ m слово $Alg\,(m)$ является записью нормального алгорифма $\mathfrak{B}$ в стандартном расширении алфавита Ξ такого, что

$$\forall S(S \mho \Xi \supset \mathfrak{B}_{\llcorner} S_{\lrcorner} \simeq [\![\langle m\rangle^{\varnothing}]\!](S)).$$

Согласно сказанному, конструктивные теории можно параллельно развивать в рамках теории нормальных алгорифмов и в рамках теории $\varnothing$-ЧРФ. При этом оба подхода приводят к понятиям и результатам, которые отличаются только способом ,,кодирования" и используемой терминологией. Ввиду этого можно без труда переходить от одних к другим. Описанным способом отвечают друг другу, например, КДЧ и $[0]$-КДЧ, ПЧ и $[0]$-ПЧ, КЧ и $[0]$-КЧ, КФДП и $[0]$-КФДП, (конструктивные) последовательности и $[0]$-последовательности. Этим обстоятельством мы будем — без дальнейших ссылок — пользоваться при терминологических переводах, соответствующих упомянутым переходам.

Релятивизацией доказательства известной теоремы Г. С. Цейтина [6] мы получаем на основании теоремы о сведении следующее.

Теорема 4.1. Существует ОРФ $Regcont$ такая, что для всяких НЧ n, m, t и p, где $n \leqq m \& t \leqq m$ и $\mathscr{F}, \mathscr{F} \rightleftharpoons [\![\langle p\rangle^{[n]}]\!]$, является $[n, m, t]$-КФДП, $[m]$-отображение $\mathscr{E}$, $\mathscr{E} \rightleftharpoons [\![\langle Regcont\,(n, m, t, p)\rangle^{[m]}]\!]$, обладает следующим свойством: для всякого $[m]$-КДЦ $x^{[m]}$ такого, что $!\mathscr{F}(x^{[m]})$, $[m]$-отображение $\tilde{\mathscr{E}}_{x^{[m]}}$ является возрастающей $[m]$-последовательностью НЧ, которая – регулятор непрерывности $\mathscr{F}$ в точке $x^{[m]}$, т. е. выполнено

$$\forall y^{[m]}k(!\mathscr{F}(y^{[m]})\,\&\,|y^{[m]} - x^{[m]}| < 2^{-\mathscr{E}(x^{[m]}k)} \supset$$
$$\supset |\mathscr{F}(y^{[m]}) - \mathscr{F}(x^{[m]})| < 2^{-k}).$$

§ 5. Основные результаты

В настоящем параграфе исследуются основные свойства введенных нами аналогов вещественных чисел, их последовательностей и операторов над ними.

Лемма 5.1. Существует $\varnothing'$-общерекурсивный словарный предикат Eq такой, что Eq $(S \,\square\, T)$ определяет на множестве всех слов в алфавите $\{0, |, -, /, @\}$ отношение эквивалентности и выполнено

$$\forall x^{[0]}y^{[0]}(\mathrm{Eq}\,(x^{[0]} \,\square\, y^{[0]}) \equiv x^{[0]} = y^{[0]}).$$

Доказательство. Предикат Eq строится на основании предиката Uneq_0 и $\varnothing'$-частичнорекурсивного предиката $(S \mho \Xi\,\&\, \neg(S \in \mathbf{D}^{[0]}))$.

На основании этой леммы легко построить следующие операторы.

Пример 5.1. Существует [1]-оператор $\mathscr{F}_0$ типа $(\mathbf{D}^{[0]} \to \mathbf{N})$, для которого верно

$$\forall x^{[0]}y^{[0]}(\mathscr{F}_0(x^{[0]}) \doteqdot \mathscr{F}_0(y^{[0]}) \equiv x^{[0]} = y^{[0]}).$$

Таким образом, $\mathscr{F}_0$ является [1]-оператором типа $(\mathbf{D}^{[0]} \to \mathbf{D}^{[0]})$ (т. е. [1; 0]-КФДП – всюду определенной), который не является псевдонепрерывным ни в одном [0]-КДЧ.

Замечание 5.1. Ввиду свойств [1]-оператора $\mathscr{F}_0$ и того, что существует [0]-последовательность [0]-КЧ $\{\xi_n\}_n^{[0]}$, для которой верно

$$\forall n(\xi_n = 0 \equiv n \in \setminus \varnothing^{(2)}),$$

а) не существует [1]-отображение, перерабатывающее всякое [0]-КЧ в равное ему [0]-КДЧ, и, тем более,

б) не существует [1]-отображение, перерабатывающее всякое [0]-ПЧ η, $\neg\neg\exists x^{[0]}(x^{[0]} = \eta)$, в равное ему [0]-КДЧ.

Пример 5.2. Существует [1]-оператор $\mathscr{G}_0$ типа $(\mathbf{D}^{[0]} \underset{\mathrm{p}}{\to} \mathbf{Q})$ такой, что

$$\forall x^{[0]}((!\mathscr{G}_0(x^{[0]}) \equiv \neg\neg\exists a(x^{[0]} = a)) \& (!\mathscr{G}_0(x^{[0]}) \supset \mathscr{G}_0(x^{[0]}) = x^{[0]})) .$$

Теорема 5.2. Для всякого НЧ n верно $\mathbf{D}^{[n]} \equiv_1 \mathbf{CD}^{[n]}$, т. е. — по определению

$$\mathscr{H}_{\mathbf{z}}(\mathbf{D}^{[n]}) \equiv_1 \mathscr{H}_{\mathbf{z}}(\mathbf{CD}^{[n]}) , \quad \mathbf{D}^{[n]} \equiv_1 \setminus \varnothing^{(n+2)} ,$$

$$\mathbf{\Pi}^{[n]} \equiv_1 \mathbf{D}^{[n+1]} , \quad \mathbf{K}^{[n]} \equiv_1 \varnothing^{(n+3)} , \quad \mathbf{DL}^{[n]} \equiv_{\mathrm{T}} \varnothing^{(n+2)} ,$$

$$\varnothing^{(n+2)} \leqq_1 \mathbf{DL}^{[n]} , \quad \setminus \varnothing^{(n+2)} \leqq_1 \mathbf{DL}^{[n]} \quad \text{и} \quad \mathbf{R}^{[n]} \equiv_1 \setminus \varnothing^{(n+2)} .$$

Замечание 5.2. Ввиду $\mathbf{D}^{[0]} \equiv_1 \setminus \varnothing^{(2)}$ и леммы 5.1 существует [2]-последовательность [0]-КДЧ $\{S_p\}_p^{[2]}$ такая, что

$$\forall x^{[0]} \exists^{[2]} p(x^{[0]} = S_p) \& \forall ap(S_p = a \supset S_p \in \mathbf{Q}) \& \forall pq(S_p = S_q \supset p = q) .$$

Таким образом, для всякого НЧ n, $2 \leqq n$,

а) по любой $\varnothing^{(n)}$-ЧРФ f можно построить $[n; 0]$-КФДП $\mathscr{F}$ такую, что

$$\forall p x^{[0]}((!\mathscr{F}(S_p) \equiv !f(p)) \& (x^{[0]} = S_p \& !f(p) \supset \mathscr{F}(x^{[0]}) \doteq S_{f(p)}))$$

и, наоборот,

б) по любой $[n; 0]$-КФДП $\mathscr{F}$ можно построить $\varnothing^{(n)}$-ЧРФ f такую, что

$$\forall pq(f(p) \simeq q \equiv (!\mathscr{F}(S_p) \& \mathscr{F}(S_p) = S_q)) .$$

Замечание 5.3. Существует [1]-последовательность [0]-КДЧ $\{x_n\}_n^{[1]}$ такая, что $\forall n(\neg\neg\exists a(x_n = a) \equiv n \in \varnothing^{(2)})$.

Следовательно,

а) для всякого [1]-отображения $\mathscr{F}$ верно

$$\forall x^{[0]}(\neg\exists a(x^{[0]} = a) \supset !\mathscr{F}(x^{[0]})) \supset \exists^{[1]} a y^{[0]}(y^{[0]} = a \& !\mathscr{F}(y^{[0]})) ;$$

б) ввиду а) и свойств словарного предиката Eq не существует [1]-оператор $\mathscr{G}$ типа $(\mathbf{D}^{[0]} \to \mathbf{D}^{[0]})$, обладающий свойством

$$\forall x^{[0]}(\mathscr{G}(x^{[0]}) = 0 \equiv \neg\exists a(x^{[0]} = a)) ,$$

в частности, не существует [1]-оператор типа $(\mathbf{D}^{[0]} \to \mathbf{D}^{[0]})$ (т. е. всюду определенная [1; 0]-КФДП), являющийся аналогом классической функции Дирихле (соотв. Римана).

Мы заметим, что ввиду замечания 5.2 существуют всюду определенные [2; 0]-КФДП, являющиеся аналогами названных функций.

Ввиду теоремы 2.10 верно следующее утверждение.

Лемма 5.3. 1) Пусть $\{x_n\}_n^{[1]}$ [1]-последовательность [0]-КДЧ. Тогда существует [0]-последовательность [0]-КДЧ $\{y_m\}_m^{[0]}$ такая, что

$$\forall n \neg\neg\exists m(x_n = y_m).$$

2) Пусть $\{k_n\}_n^{[1]}$ [1]-последовательность элементов $\mathbf{R}^{[0]}$. Тогда существует [0]-последовательность элементов $\mathbf{R}^{[0]}$ — $\{l_m\}_m^{[0]}$ такая, что

$$\forall n \neg\neg\exists m(\langle k_n\rangle^{[0]} \sim \langle l_m\rangle^{[0]}).$$

Теорема 5.4. Для любых НЧ m и n, $n \leqq m$, и словарного множества с равенством $\mathfrak{A}$,

а) ввиду теоремы о сведении к всякому $[n]$-оператору типа $(\mathfrak{A} \to \mathbf{D}^{[m]})$ (соотв. $(\mathfrak{A} \to \mathbf{DL}^{[m]})$, соотв. $(\mathfrak{A} \to \mathbf{K}^{[m]})$, соотв. $(\mathfrak{A} \to \mathbf{\Pi}^{[m]})$) существует равный ему [0]-оператор того же типа,

б) ввиду теоремы 2.10 к любому $[m+1]$-оператору типа $(\mathfrak{A} \to \mathbf{DL}^{[m]})$ (соотв. $(\mathfrak{A} \to \mathbf{K}^{[m]})$, соотв. $(\mathfrak{A} \to \mathbf{\Pi}^{[m]})$) существует равный ему $[m]$-оператор того же типа и

в) ввиду релятивизации результата Г. Е. Минца и В. А. Шурыгина (см. [12]) всякий $[n]$-оператор типа $(\mathbf{DL}^{[m]} \underset{\mathrm{p}}{\to} \mathfrak{A})$ (соотв. $(\mathbf{K}^{[m]} \underset{\mathrm{p}}{\to} \mathfrak{A})$, соотв. $(\mathbf{\Pi}^{[m]} \underset{\mathrm{p}}{\to} \mathfrak{A})$) с непустой $\mathbf{DL}^{[m]}$- (соотв. $\mathbf{K}^{[m]}$-, соотв. $\mathbf{\Pi}^{[m]}$-) областью определения является определенным всюду на $\mathbf{DL}^{[m]}$ (соотв. $\mathbf{K}^{[m]}$, соотв. $\mathbf{\Pi}^{[m]}$).

Мы заметим, что для всякого НЧ n и любой $[n]$-последовательности РЧ $\mathscr{F}$ числовой предикат $\mathrm{B}(k, l)$,

$$\mathrm{B}(k, l) \rightleftharpoons \neg\exists pq(l \leqq p \,\&\, |\mathscr{F}(p) - \mathscr{F}(p+q)| \geqq 2^{-k}),$$

является $\varnothing^{(n+1)}$-общерекурсивным и, следовательно, верно

$$\forall k \neg\neg\exists l\, \mathrm{B}(k, l) \supset \forall k\, \exists^{[n+1]} l\, \mathrm{B}(k, l).$$

Ввиду этого, теоремы 2.12, релятивизованной теоремы о полноте псевдочисел, которую для ПЧ сформулировал Б. А. Кушнер, и теоремы о сведении, мы получаем следующее.

Лемма 5.5. Существуют [0]-отображения *Pseud* и *Dupl*, определенные для всех слов в алфавите Ξ и такие, что

1) для всяких НЧ n, p и q существуют НЧ t и s, для которых выполнено

$$Pseud\,(p@^{\{n+2\}}q) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} t@^{\{n+1\}} \,\&$$
$$\& \,(p@^{\{n+2\}}q \in \mathbf{D}^{[n+1]} \supset t@^{\{n+1\}} \in \mathbf{\Pi}^{[n]} \,\&\, p@^{\{n+2\}}q = t@^{\{n+1\}}) \quad \text{и}$$
$$Dupl\,(p@^{\{n+1\}}) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} s@^{\{n+2\}}\iota_0 \,\&$$
$$\& \,(p@^{\{n+1\}} \in \mathbf{\Pi}^{[n]} \supset s@^{\{n+2\}}\iota_0 \in \mathbf{CD}^{[n+1]} \,\&\, p@^{\{n+1\}} = s@^{\{n+2\}}\iota_0) \quad \text{и}$$

2) для всяких НЧ n, p и q и РЧ a верно

$$Pseud\,(p@^{\{n+1\}}) \mp p@^{\{n+1\}} \,\&\, Pseud\,(a) \mp Dupl\,(a) \mp a\,\&$$
$$\&\, Dupl\,(p@^{\{n+1\}}q) \mp p@^{\{n+1\}}q\,.$$

Следовательно, согласно результатам, приведенным выше, и теореме 4.1 для любых НЧ m и n, $m \leqq n$, всякий $[m]$-оператор типа $(\mathbf{D}^{[n+1]} \underset{\mathbf{p}}{\rightarrow} \mathbf{D}^{[n+1]})$ (т. е. $[m;\, n+1]$-КФДП) с непустой $\mathbf{D}^{[n+1]}$-областью определения определен для всех $[n+1]$-КДЧ, а любой $[m]$-оператор типа $(\mathbf{\Pi}^{[n]} \rightarrow \mathbf{\Pi}^{[n]})$ является $[n+1]$-непрерывным.

На основании релятивизации результата Б. А. Кушнера [13] и теоремы 5.4 мы получаем следующее утверждение.

Теорема 5.6. Пусть n и m НЧ, $n \leqq m+1$. Тогда всякий $[n]$-оператор типа $(\mathbf{K}^{[m]} \rightarrow \mathbf{K}^{[m]})$ является $[m+1]$-непрерывным.

Лемма 5.7. Существуют ОРФ ld и qd такие, что для всяких НЧ n и слова S в алфавите Ξ выполнено

$$S \in \mathbf{DL}^{[n]} \supset\, !\llbracket\langle ld(n)\rangle^{[n+1]}\rrbracket(S) \,\&\, \llbracket\langle ld(n)\rangle^{[n+1]}\rrbracket(S) \in \mathbf{CD}^{[n]}\,\&$$
$$\&\, \llbracket\langle ld(n)\rangle^{[n+1]}\rrbracket(S) = S\,,$$
$$S \in \mathbf{K}^{[n]} \supset\, !\llbracket\langle qd(n)\rangle^{[n+2]}\rrbracket(S) \,\&\, \llbracket\langle qd(n)\rangle^{[n+2]}\rrbracket(S) \in \mathbf{CD}^{[n]}\,\&$$
$$\&\, \llbracket\langle qd(n)\rangle^{[n+2]}\rrbracket(S) = S\,.$$

Следствие. Для любого НЧ n

А) для всякого $[n]$-оператора $\mathscr{F}$ типа $(\mathbf{DL}^{[n]} \rightarrow \mathbf{DL}^{[n]})$ существует всюду определенная $[n+1;\, n]$-КФДП $\mathscr{G}$ такая, что

$$\forall x^{[n]}(\mathscr{F}(x^{[n]}) = \mathscr{G}(x^{[n]}))\,, \tag{5}$$

Б) ввиду теоремы 5.4 для всякой всюду определенной $[n+1;\, n]$-КФДП $\mathscr{G}$ существует $[n]$-оператор $\mathscr{F}$ типа $(\mathbf{DL}^{[n]} \rightarrow \mathbf{DL}^{[n]})$ такой, что (5), и

В) для всякого $[n]$-оператора $\mathscr{G}$ типа $(\mathbf{K}^{[n]} \rightarrow \mathbf{K}^{[n]})$ существует всюду определенная $[n+2;\, n]$-КФДП $\mathscr{F}$ такая, что

$$\forall Sx^{[n]}(S \in \mathbf{K}^{[n]} \,\&\, S = x^{[n]} \supset \mathscr{F}(x^{[n]}) = \mathscr{G}(S))\,.$$

Мы заметим, что ввиду теоремы 5.6 для $[1;\,0]$-КФДП $\mathscr{F}_0$ из примера 5.1 не существует $[1]$-оператор $\mathscr{G}$ типа $(\mathbf{K}^{[0]} \rightarrow \mathbf{K}^{[0]})$, для которого выполнено

$$\forall Sx^{[0]}(S \in \mathbf{K}^{[0]} \,\&\, S = x^{[0]} \supset \mathscr{F}_0(x^{[0]}) = \mathscr{G}(S))\,.$$

Замечание 5.4. Всякая псевдоравномерно непрерывная $[0]$-функция является $[1]$-равномерно непрерывной. Ввиду этого и теоремы о сведении существуют ОРФ *op* и *unifcont* такие, что для всякого НЧ p, для которого $[\![\langle p\rangle^{[0]}]\!]$ псевдоравномерно непрерывная [0]-функция,

а) для любого НЧ n

$$[\![\langle op(p)\rangle^{[0]}]\!] \tag{6}$$

является [0]-оператором типов $(\mathbf{D}^{[n]} \to \mathbf{D}^{[n]})$ и $(\mathbf{\Pi}^{[n]} \to \mathbf{\Pi}^{[n]})$, выполнено

$$\forall x^{[0]}([\![\langle p\rangle^{[0]}]\!](x^{[0]}) = [\![\langle op(p)\rangle^{[0]}]\!](x^{[0]}))$$

и, следовательно, (6) является $[0; n]$-функцией,

б) $[\![\langle unifcont\,(p)\rangle^{[1]}]\!]$ возрастающая [1]-последовательность НЧ, которая является регулятором равномерной непрерывности [0]-оператора (6).

В следующем мы для всякого НЧ p такого, что $\mathscr{F}$, $\mathscr{F} \rightleftharpoons [\![\langle p\rangle^{[0]}]\!]$, является псевдоравномерно непрерывной [0]-функцией, посредством $Op\,[\mathscr{F}]$ обозначим (6).

Следует заметить, что всякая [0]-функция, которая не может не быть функцией слабо ограниченной вариации (на $0 \triangle 1$) [8], является псевдоравномерно непрерывной.

Мы введем несколько обозначений и приведем основные результаты, касающиеся $[t]$-последовательностей арифметических действительных чисел. Следует напомнить, что выражения $+\infty$ и $-\infty$ введены в § 1.

Определения. Мы построим следующие словарные предикаты так, чтобы для всякого слова S выполнялось

Seq (S) значит: существуют НЧ n и t такие, что $S \doteqdot n \square t$ и n геделев номер $[t]$-последовательности АДЧ или существуют НЧ n, t и s такие, что $S \doteqdot n \square t \boxplus s$ и n геделев номер $[t]$-последовательности $[s]$-КДЧ;

Pseudofund (S) значит: существуют НЧ n и t такие, что $S \doteqdot n \square t$ и n геделев номер псевдофундаментальной $[t]$-последовательности АДЧ, т. е. верно

$$\mathrm{Seq}\,(n \square t)\,\&\,\forall k \neg\neg\exists l\,\forall pq(l \leqq p \supset$$
$$\supset \left|[\![\langle n\rangle^{[t]}]\!](p) - [\![\langle n\rangle^{[t]}]\!](p+q)\right| < 2^{-k});$$

Lp (S) значит: существуют слово P и НЧ n и t такие, что $S \doteqdot P \boxplus n \square t\,\&\,\mathrm{Seq}\,(n \square t)$ и P АДЧ, которое является в классическом смысле точкой сгущения (точкой псевдосгущения) $[t]$-последовательности АДЧ $[\![\langle n\rangle^{[t]}]\!]$, т. е. выполнено

$$\forall k \neg\neg\exists l(k \leqq l\,\&\left|[\![\langle n\rangle^{[t]}]\!](l) - P\right| < 2^{-k});$$

Lim (S) значит: существуют слово P и НЧ n и t такие, что

$$S \mp P \boxplus n \square t \,\&\, \mathrm{Pseudofund}\,(n \square t) \,\&\, \mathrm{Lp}\,(P \boxplus n \square t)\,,$$

т. е. $[t]$-последовательность АДЧ $[\![\langle n\rangle^{[t]}]\!]$ псевдосходится к АДЧ P;

Lim* (S) значит: существуют слово P и НЧ n и t такие, что $S \mp P \boxplus n \square t \,\&\, \mathrm{Seq}\,(n \square t) \,\&\, (\exists s(P \in \mathbf{D}^{[s]} \,\&\, \mathrm{Lim}\,(S)) \vee P \mp +\infty \,\&\, \forall k \neg\neg \exists l \forall p(l \leqq p \supset [\![\langle n\rangle^{[t]}]\!]\,(p) > k) \vee P \mp -\infty \,\&\, \forall k \neg\neg\exists l \forall p(l \leqq p \supset [\![\langle n\rangle^{[t]}]\!]\,(p) < -k))$;

Regfund (S) значит: существуют НЧ q, s, n и t такие, что $S \mp q \square s \boxplus n \square t \,\&\, \mathrm{Seq}\,(n \square t)$ и $[\![\langle q\rangle^{[s]}]\!]$ $[s]$-последовательность НЧ, которая является регулятором фундаментальности $[t]$-последовательности АДЧ $[\![\langle n\rangle^{[t]}]\!]$, т. е.

$$\forall klp([\![\langle q\rangle^{[s]}]\!]\,(k) \leqq l \supset$$
$$\supset \left|[\![\langle n\rangle^{[t]}]\!]\,(l) - [\![\langle n\rangle^{[t]}]\!]\,(l+p)\right| < 2^{-k})\,;$$

Regconv (S) значит: существуют слово P и НЧ q, s, n и t такие, что $S \mp q \square s \boxplus P \boxplus n \square t \,\&\, \mathrm{Lim}\,(P \boxplus n \square t)$ и $[\![\langle q\rangle^{[s]}]\!]$ $[s]$-последовательность НЧ, являющаяся регулятором сходимости $[t]$-последовательности АДЧ $[\![\langle n\rangle^{[t]}]\!]$ к АДЧ P, т. е.

$$\forall kl([\![\langle q\rangle^{[s]}]\!]\,(k) \leqq l \supset \left|[\![\langle n\rangle^{[t]}]\!]\,(l) - P\right| < 2^{-k})\,;$$

Limsup (S) значит: существуют слово P и НЧ n и t такие, что $S \mp P \boxplus n \square t \,\&\, \mathrm{Seq}\,(n \square t) \,\&\, (P \mp +\infty \vee P \mp -\infty \vee \exists s(P \in \mathbf{D}^{[s]}))$ и P является в классическом смысле верхним пределом $[t]$-последовательности АДЧ $[\![\langle n\rangle^{[t]}]\!]$;

Liminf (S) — определяется аналогично.

Все эти предикаты являются нормальными, т. е. логически эквивалентны своему двойному отрицанию.

Обозначение. Для любых НЧ n и m, $[n]$-последовательности АДЧ $\{S_p\}_p^{[n]}$ и АДЧ T мы обозначим

$$S_p \xrightarrow[p\to\infty]{[m]} T \rightleftharpoons \forall k\, \exists^{[m]} l\, \forall p(l \leqq p \supset |S_p - T| < 2^{-k})\,.$$

Лемма 5.8. Пусть t фиксированное НЧ. Тогда

$$\neg\exists n(S \mp n \,\&\, \mathrm{Seq}\,(n \square t \boxplus t))\,,$$

$$\neg\exists nT(S \mp nT \,\&\, T \in \mathbf{D}^{[t]} \,\&\, \mathrm{Lp}\,(T \boxplus n \square t) \,\&\, \mathrm{Seq}\,(n \square t \boxplus t))\,,$$

$$\neg\exists nq(S \mp nq \,\&\, \mathrm{Seq}\,(n \square t \boxplus t) \,\&\, \mathrm{Regfund}\,(q \square t \boxplus n \square t))\,,$$

$$\neg\exists nqT(S \doteq nqT \,\&\, T \in \mathbf{D}^{[t]} \,\&\, \mathrm{Seq}\,(n \square t \boxplus t) \,\&$$

$$\&\, \mathrm{Regconv}\,(q \square t \boxplus T \boxplus n \square t))\,,$$

$$\neg\exists n(S \doteq n \,\&\, \mathrm{Seq}\,(n \square t \boxplus t) \,\&\, \mathrm{Limsup}\,(+\infty \boxplus n \square t))$$

$\varnothing^{(t+1)}$-частичнорекурсивные словарные предикаты, которые не являются $\varnothing^{(t+1)}$-общерекусивными,

$$\neg\exists n(S \doteq n \,\&\, \mathrm{Seq}\,(n \square t \boxplus t) \,\&\, \mathrm{Pseudofund}\,(n \square t))\,,$$

$$\neg\exists nT(S \doteq nT \,\&\, T \in \mathbf{D}^{[t]} \,\&\, \mathrm{Seq}\,(n \square t \boxplus t) \,\&\, \mathrm{Lim}\,(T \boxplus n \square t))\,,$$

$$\neg\exists n(S \doteq n \,\&\, \mathrm{Seq}\,(n \square t \boxplus t) \,\&\, \mathrm{Lim}^*\,(+\infty \boxplus n \square t))$$

$\varnothing^{(t+2)}$-частичнорекурсивные словарные предикаты, которые не являются $\varnothing^{(t+2)}$-общерекурсивными.

Лемма 5.9. Пусть t НЧ. Тогда выполнено

$$\forall nq(\mathrm{Seq}\,(n \square t \boxplus t) \,\&\, \mathrm{Regfund}\,(q \square t \boxplus n \square t) \supset \exists x^{[t]}\,\mathrm{Lim}\,(x^{[t]} \boxplus n \square t))\,,$$

$$\forall n(\mathrm{Seq}\,(n \square t \boxplus t) \,\&\, \mathrm{Pseudofund}\,(n \square t) \supset$$

$$\supset \exists qx^{[t+1]}(\mathrm{Regfund}\,(q \square t+1 \boxplus n \square t) \,\&\, \mathrm{Lim}\,(x^{[t+1]} \boxplus n \square t)))\,,$$

$$\forall n(\mathrm{Seq}\,(n \square t \boxplus t) \,\&\, \neg\mathrm{Limsup}\,(-\infty \boxplus n \square t) \supset$$

$$\supset \exists^{[t+2]}P((P \in \mathbf{D}^{[t+2]} \vee P \doteq +\infty) \,\&\, \mathrm{Limsup}\,(P \boxplus n \square t)))\,,$$

$$\forall n(\mathrm{Seq}\,(n \square t \boxplus t) \supset \exists^{[t+3]}P((P \in \mathbf{D}^{[t+2]} \vee P \doteq +\infty \vee P \doteq -\infty) \,\&$$

$$\&\, \mathrm{Limsup}\,(P \boxplus n \square t)))\,,$$

$$\forall n(\mathrm{Seq}\,(n \square t \boxplus t) \,\&\, \neg\mathrm{Lim}^*\,(+\infty \boxplus n \square t) \,\&\, \neg\mathrm{Lim}^*\,(-\infty \boxplus n \square t) \supset$$

$$\supset \exists x^{[t+2]}\,\mathrm{Lp}\,(x^{[t+2]} \boxplus n \square t))\,,$$

$$\forall n(\mathrm{Seq}\,(n \square t \boxplus t) \,\&\, \neg\neg\exists m\, \forall k(\llbracket\langle n\rangle^{[t]}\rrbracket\,(k) < m) \supset$$

$$\supset \exists^{[t+1]}m\, \forall k(\llbracket\langle n\rangle^{[t]}\rrbracket\,(k) < m))\,.$$

Пример 5.3. Существует ОРФ g такая, что для всякого НЧ n – $\llbracket\langle g(n)\rangle^{[0]}\rrbracket$ $[0]$-последовательность РЧ и выполнено

$$\mathrm{Limsup}\,(-\infty \boxplus g(n) \square 0) \equiv n \in \setminus\varnothing^{(3)}\,.$$

Замечание 5.5. На основании теоремы о сведении выполнено

$$\forall n(\mathrm{Seq}\,(n \square t) \supset \exists m(\mathrm{Seq}\,(m \square 0) \,\&\, \forall k(\llbracket\langle n\rangle^{[t]}\rrbracket\,(k) = \llbracket\langle m\rangle^{[0]}\rrbracket\,(k)))) \quad \text{и}$$

$$\forall ns(\mathrm{Seq}\,(n \square t \boxplus s) \supset \exists m(\mathrm{Seq}\,(m \square 0 \boxplus \max\,(t, s)) \,\&$$

$$\&\, \forall k(\llbracket\langle n\rangle^{[t]}\rrbracket\,(k) = \llbracket\langle m\rangle^{[0]}\rrbracket\,(k))))\,.$$

Непосредственной релятивизацией результатов Э. Шпекера [20] и Б. А. Кушнера [14] мы получаем следующее утверждение. (Натуральное число *deg* определено в замечании 2.2.)

Лемма 5.10. Существуют НЧ sp и alp такие, что для всякого НЧ n — $\langle sp\rangle^{[n]}$ и $\langle alp\rangle^{[n]}$ $\varnothing^{(n)}$-ОРФ, $[\![\langle sp\rangle^{[n]}]\!]$ и $[\![\langle alp\rangle^{[n]}]\!]$ $[n]$-последовательности РЧ из интервала $0 \bigtriangledown 1$, для которых верно

а) $$\forall m\left([\![\langle sp\rangle^{[n]}]\!]\,(m) \mathrel{\overset{.}{=}} \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{2^{\langle deg\rangle^{[n]}(i)+1}}\right),$$

$$\mathrm{Pseudofund}\,(sp \,\square\, n)\,\&\, \neg\, \exists x^{[n]}\, \mathrm{Lim}\,(x^{[n]} \boxplus sp \,\square\, n)$$

и, следовательно,

$$sp@^{\{n+1\}} \in \mathbf{\Pi}^{[n]}\,\&\, Dupl\,(sp@^{\{n+1\}}) \in \boldsymbol{D}^{[n+1]}\,\&$$
$$\&\ \neg\exists x^{[n]}(x^{[n]} = Dupl\,(sp@^{\{n+1\}}))\,,$$

б) $\neg\exists x^{[n+1]}\,\mathrm{Lp}\,(x^{[n+1]} \boxplus alp \,\square\, n)$, т. е. никакое $[n+1]$-КДЧ не является точкой псевдосгущения $[n]$-последовательности $[\![\langle alp\rangle^{[n]}]\!]$.

На основании этой леммы и замечания 5.4 имеет место следующее утверждение.

Теорема 5.11. 1) Существуют неограниченные $[0]$-функция $\mathscr{F}_0$, и $[1]$-функция $\mathscr{G}_0$ такие, что $\forall x^{[0]}(\mathscr{F}_0(x)^{[0]}) = \mathscr{G}_0(x^{[0]}))$.

2) Пусть n НЧ, а $\mathscr{F}$ $[n]$-функция. Тогда необходимым и достаточным условием для существования $[n+2]$-функции $\mathscr{G}$, обладающей свойством $\forall x^{[n]}(\mathscr{F}(x^{[n]}) = \mathscr{G}(x^{[n]}))$, является псевдоравномерная непрерывность $[n]$-функции $\mathscr{F}$.

Следующие понятия являются релятивизацией понятий, введенных А. А. Марковым.

Определения. Пусть М числовое множество, а n НЧ. Тогда мы скажем, что множество М является

а) $[n]$-финитным множеством, и будем писать $\mathrm{Fin}_n(\mathrm{M})$, если

$$\exists^{[n]}S(S \in {}^{\{\omega\}}\mathbf{N}\,\&\,(\sigma_0(S) = -1\,\&\,\mathrm{M} = \varnothing\, \vee$$
$$\vee\ 0 \leqq \sigma_0(S)\,\&\,\forall m(m \in \mathrm{M} \equiv \exists l(0 \leqq l \leqq \sigma_0(S)\,\&\, m = \sigma_1(S \boxplus l)))))\,,$$

б) инфинитным множеством, если верно $\neg\mathrm{Fin}_0(\mathrm{M})$,

в) неинфинитным множеством, если М не является инфинитным множеством, т. е. верно $\neg\neg\mathrm{Fin}_0(\mathrm{M})$.

Замечание 5.6. 1) Для всяких числового множества M и НЧ n:

а) выполнено $Fin_n(\mathrm{M}) \supset Fin_{n+1}(\mathrm{M}) \,\&\, \neg\neg Fin_0(\mathrm{M})$,

б) если $Fin_n(\mathrm{M})$, то M $\varnothing^{(n)}$-рекурсивное множество и

в) если M неинфинитное $\varnothing^{(n)}$-рекурсивно перечислимое множество, то верно $Fin_{n+1}(\mathrm{M})$.

2) Если для всяких НЧ k и l определить

$$\mathrm{B}(k, l) \rightleftharpoons \neg\neg(l = 0 \,\&\, \neg !\langle\pi_1(k)\rangle^{[\pi_2(k)]}(0) \vee l = 1 \,\&\, !\langle\pi_1(k)\rangle^{[\pi_2(k)]}(0)),$$

то верно

$$\forall k\, Fin_{(\pi_2(k)+1)}(\{l \mid \mathrm{B}(k, l)\}) \tag{7}$$

и

$$\neg\exists q\, \forall k\, Fin_q(\{l \mid \mathrm{B}(k, l)\}),$$

ибо ввиду того, что

$$\forall tq(\mathrm{B}(\tau(t, q), 0) \equiv \neg !\langle t\rangle^{[q]}(0)),$$

$\mathrm{B}(k, l)$ не является $\varnothing^{(q)}$-общерекурсивным предикатом ни для какого НЧ q.

Обозначение. Для любых алфавита $\mathbf{\Gamma}$, словарного множества $\mathfrak{N}$ в алфавите $\mathbf{\Gamma}$ и НЧ n мы обозначим

$$\mathrm{Fin}_n(\mathfrak{N}) \rightleftharpoons \mathrm{Fin}_n(\mathscr{H}_{\mathbf{\Gamma}}(\mathfrak{N})).$$

Лемма 5.12. Существует неубывающая [0]-фундаментальная [0]-последовательность АДЧ из интервала $0 \bigtriangledown 1$, которые не могут не быть равными рациональным числам, такая, что никакое АДЧ не является ее точкой псевдосгущения.

Доказательство. Мы используем числовой предикат B из замечания 5.6. Тогда ввиду (7) и теоремы о сведении существуют ОРФ g и НЧ ϑ_0 такие, что для всяких НЧ k и p

а) $[\![\langle g(k)\rangle^{[\pi_2(k)+1]}]\!]$ $[\pi_2(k) + 1]$-последовательность НЧ, верно

$$\mathrm{B}(k, [\![\langle g(k)\rangle^{[\pi_2(k)+1]}]\!](0)) \,\&$$
$$\&\, \forall m([\![\langle g(k)\rangle^{[\pi_2(k)+1]}]\!](m+1) = [\![\langle g(k)\rangle^{[\pi_2(k)+1]}]\!](0))$$

и, следовательно, $g(k)@^{\{\pi_2(k)+2\}}\iota_0$ — $[\pi_2(k) + 1]$-КДЧ и

б) $$[\![\langle\vartheta_0\rangle^{[0]}]\!](p) = \sum_{t=0}^{p} \frac{1}{2^{t+1}} \cdot (g(t)@^{\{\pi_2(t)+2\}}\iota_0).$$

Тогда [0]-последовательность НЧ $[\![\langle\iota_0\rangle^{[0]}]\!]$ является регулятором фундаментальности [0]-последовательности АДЧ $[\![\langle\vartheta_0\rangle^{[0]}]\!]$. Мы заметим, что $\forall p\, \neg\neg\exists a([\![\langle\vartheta_0\rangle^{[0]}]\!](p) = a)$.

Мы допустим, что q НЧ, а P $[q]$-КДЧ такое, что $\mathrm{Lp}(P \boxplus \vartheta_0 \square 0)$. Но тогда $[\![\langle\vartheta_0\rangle^{[0]}]\!](k) \xrightarrow[k\to\infty]{[0]} P$, АДЧ P не может выть равным никакому диадически рациональному числу и, следовательно, существуют НЧ s_0 и s_1 такие, что $\langle s_0\rangle^{[q]}$ и $\langle s_1\rangle^{[q]}$ $\varnothing^{(q)}$-ОРФ,

$$\forall p(\langle s_0\rangle^{[q]}(p) \leqq 1 \,\&\, [\![\langle s_1\rangle^{[q]}]\!](p) \doteqdot \sum_{t=0}^{p} 2^{-t-1} \cdot \langle s_0\rangle^{[q]}(t)) \quad \text{и} \quad s_1 @^{\{q+1\}} \iota_0 = P\,.$$

Но тогда, очевидно, верно

$$\forall kl(\mathrm{B}(k, l) \equiv \langle s_0\rangle^{[q]}(k) = l)\,. \tag{8}$$

Из (8) следует $\varnothing^{(q)}$-общерекурсивность числового предиката B и мы получили противоречие.

В конструктивном математическом анализе играют важную роль теоремы о покрытии (см. [8]).

Определение. 1) $[n]$-последовательность рациональных сегментов $\{\Phi_k\}_k^{[n}$ мы назовем $[n]$-покрытием, если

а) сегменты этой последовательности не перекрываются и содержатся в сегменте $0 \triangle 1$, $\text{Эл}(\Phi_0) = 0 \,\&\, \text{Эп}(\Phi_1) = 1$ и

б) $$\forall x^{[n]}(0 < x^{[n]} < 1 \supset \exists^{[n]}kl(\text{Эп}(\Phi_k) = \text{Эл}(\Phi_l)\,\&$$
$$\&\, \text{Эл}(\Phi_k) < x^{[n]} < \text{Эп}(\Phi_l)))\,.$$

2) $[n]$-покрытие $\{\Phi_k\}_k^{[n]}$ мы назовем регулярным, если $[n]$-последовательность РЧ $\{\sum_{k=0}^{l}|\Phi_k|\}_l^{[n]}$ псевдосходится к 1 (и, следовательно, выполнено $(\sum_{k=0}^{l}|\Phi_k|) \xrightarrow[l\to\infty]{[n]} 1)$.

Мы заметим, что для всякого $[n]$-покрытия $\{\Phi_k\}_k^{[n]}$ $[0]$-осуществимо $[n+1]$-КДЧ $x^{[n+1]}$ такое, что

$$0 < x^{[n+1]} < 1 \,\&\, \neg\exists k(x^{[n+1]} \in \Phi_k)\,.$$

Релятивизуя теорему 2 из [17] и теорему 4.1 из [7], мы на основании „равномерности" этого процесса получаем следующее утверждение.

Теорема 5.13. Существуют ОРФ *totcov* и *cov* и НЧ *regcov* такие, что для всяких НЧ n и m

1) а) $[\![\langle totcov\,(m)\rangle^{[n]}]\!]$ $[n]$-последовательность рациональных сегментов,

б) $\forall l(\sum_{s=0}^{l}|[\![\langle totcov\,(m)\rangle^{[n]}]\!](s)| < 2^{-m})$,

в) $\forall x^{[n]}\, \exists^{[n]}s(x^{[n]} \in ([\![\langle totcov\,(m)\rangle^{[n]}]\!](s))^0)$, г) если $\{\{a_i^l \triangle b_i^l\}_{i=0}^{\tau_l}\}_l^{[n]}$ $[n]$-последовательность систем неперекрывающихся рациональных сегментов такая, что $(\sum_{i=0}^{\tau_l} |a_i^l \triangle b_i^l|) \xrightarrow[l\to\infty]{[n]} 0$, то $[n]$-осуществимы НЧ l_0 и система НЧ $\{s_i\}_{i=0}^{\tau_{l_0}}$ такие, что

$$\forall i(0 \leqq i \leqq \tau_{l_0} \supset [\![\langle totcov\,(m)\rangle^{[n]}]\!]\,(s_i) = a_i^{l_0} \triangle b_i^{l_0}),$$

д) если $\{\mathfrak{M}_t\}_t$ последовательность $\varnothing^{(n)}$-рекурсивно перечислимых множеств (соотв. неинфинитных $\varnothing^{(n)}$-рекурсивно перечислимых множеств) рациональных сегментов такая, что $\forall tl(\sum_{\substack{0 \leqq k \leqq l \\ c_{\Xi}(k) \in \mathfrak{M}_t}} |c_{\Xi}(k)| < 2^{-t})$, то $[n]$-осуществимы НЧ t_0 и $\varnothing^{(n)}$-рекурсивно перечислимое (соотв. неинфинитное $\varnothing^{(n)}$-рекурсивно перечислимое) множество НЧ $\mathfrak{N}$ такие, что

$$\forall a(\neg\neg\exists p(p \in \mathfrak{N} \,\&\, a \in [\![\langle totcov\,(m)\rangle^{[n]}]\!]\,(p)) \equiv$$
$$\equiv \neg\neg\exists k(c_{\Xi}(k) \in \mathfrak{M}_{t_0} \,\&\, a \in c_{\Xi}(k)))$$

и

е) $\forall k\, \exists^{[n]} s([\![\langle totcov\,(m+1)\rangle^{[n]}]\!]\,(k) \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} [\![\langle totcov\,(m)\rangle^{[n]}]\!]\,(s))$,

2) $[\![\langle cov\,(m)\rangle^{[n]}]\!]$ $[n]$-покрытие, для которого выполнено

$$\forall k(\sum_{l=0}^{k} |[\![\langle cov\,(m)\rangle^{[n]}]\!]\,(l)| < 2^{-m}) \,\&$$
$$\&\, \forall s\, \exists^{[n]} k([\![\langle totcov\,(m)\rangle^{[n]}]\!]\,(s) \cap 0\triangle 1 \subseteq \bigcup_{l=0}^{k} [\![\langle cov\,(m)\rangle^{[n]}]\!]\,(l))$$

и

3) $[\![\langle regcov\rangle^{[n]}]\!]$ регулярное $[n]$-покрытие.

§ 6. Релятивизованные конструктивные метрические пространства

Понятия конструктивного метрического пространства и сепарабельного (соотв. полного) конструктивного метрического пространства ввел Н. А. Шанин в [5].

Мы приведем несколько определений, являющихся релятивизацией определений из [11].

Пусть n и t НЧ, $t \leqq n$, а Γ алфавит, $\Xi \subseteq \Gamma$. $[n]$-метрическим пространством (в алфавите Γ) мы назовем пару $(\mathfrak{M}, \varrho)$, где $\mathfrak{M}$ словарное множество в алфавите Γ, элементы которого не содержат букву $\boxplus$, а ϱ $(\varnothing^{(t)}, \Gamma, \Xi)$-отображение типа

$(\mathfrak{M} \boxplus \mathfrak{M} \to D^{[n]})$ такое, что для всяких слов S, T и U из $\mathfrak{M}$ выполнено $\varrho(S \boxplus S) = 0$ и

$$\varrho(S \boxplus T) \lessdot \varrho(U \boxplus S) + \varrho(U \boxplus T).$$

Пусть m, n и s НЧ, $n \leqq m$, Γ алфавит, $\Xi \subseteq \Gamma$, а $\mathscr{A}$, $\mathscr{A} \rightleftharpoons (\mathfrak{M}, \varrho)$, $[n]$-метрическое пространство в алфавите Γ.

а) ϱ мы назовем метрикой в $\mathscr{A}$ и для всяких слов S и T определим $S \in \mathscr{A} \rightleftharpoons \rightleftharpoons S \in \mathfrak{M}$ и

$$S \underset{\mathscr{A}}{=} T \rightleftharpoons (S \in \mathscr{A} \;\&\; T \in \mathscr{A} \;\&\; \varrho(S \boxplus T) = 0)\,.$$

Тогда $\underset{\mathscr{A}}{=}$ является отношением равенства на множестве $\mathfrak{M}$, которое, как видно из определения, согласовано с метрикой ϱ.

В следующем мы, определяя тип оператора, будем с метрическим пространством обращаться как с множеством с равенством.

б) Мы скажем, что пространство $\mathscr{A}$ является $[s]$-сепарабельным, если существует $(\varnothing^{(s)}, \Xi, \Gamma)$-последовательность $\mathscr{F}$ элементов пространства $\mathscr{A}$ такая, что

$$\forall k S (S \in \mathfrak{A} \supset \exists^{[s]} l (\varrho(S \boxplus \mathscr{F}(l)) < 2^{-k}))\,.$$

Мы заметим, что всякое $[s]$-сепарабельное пространство является $[s+1]$-сепарабельным.

в) Мы для любых НЧ k, l и t и слова P обозначим $\mathrm{Seq}_{\mathscr{A}}(k \square s)$, если

$$[\![\langle k \rangle^{[s]}]\!]_{\Xi,\Gamma} \tag{9}$$

$(\varnothing^{(s)}, \Xi, \Gamma)$-последовательность элементов пространства $\mathscr{A}$,

$\mathrm{Regfund}_{\mathscr{A}}(l \square t \boxplus k \square s)$, если верно $\mathrm{Seq}_{\mathscr{A}}(k \square s)$ и $[\![\langle l \rangle^{[t]}]\!]$ $[t]$-последовательность НЧ, являющаяся регулятором фундаментальности в $\mathscr{A}$ последовательности (9);

$\mathrm{Lim}_{\mathscr{A}}(P \boxplus k \square s)$, если верно $\mathrm{Seq}_{\mathscr{A}}(k \square s) \;\&\; P \in \mathscr{A}$ и (9) псевдосходится в $\mathscr{A}$ к P.

г) Мы назовем $\mathscr{A}$ слабо $[s]$-полным пространством, если существует $(\varnothing^{(s)}, \Xi, \Gamma)$-отображение $\mathscr{G}$ такое, что для всяких НЧ k и l таких, что

$$\mathrm{Regfund}_{\mathscr{A}}(l \square s \boxplus k \square s) \tag{10}$$

и

$$\neg\neg \exists S\, \mathrm{Lim}_{\mathscr{A}}(S \boxplus k \square s)\,, \tag{11}$$

верно

$$!\mathscr{G}(kl) \;\&\; \mathrm{Lim}_{\mathscr{A}}(\mathscr{G}(kl) \boxplus k \square s)\,.$$

д) Мы назовем $\mathscr{A}$ $[s]$-полным пространством, если $\mathscr{A}$ является слабо $[s]$-полным и для всяких НЧ k и l таких, что (10), верно (11).

е) $[m]$-пополнением пространства $\mathscr{A}$ мы назовем пару $(\mathfrak{N}_m, \varrho_m)$, где

$$\mathfrak{N}_m \rightleftharpoons \bigwedge S (\exists k l (S \doteqdot k m l \;\&\; \mathrm{Regfund}_{\mathscr{A}}(l \square m \boxplus k \square m)))\,,$$

а ϱ_m $[m]$-отображение типа $(\mathfrak{N}_m \boxplus \mathfrak{N}_m \to \mathbf{D}^{[m]})$, для которого для всяких

$k_1 m l_1 \in \mathfrak{N}_m$ и $k_2 m l_2 \in \mathfrak{N}_m$ верно

$$\varrho([\![\langle k_1\rangle^{[m]}]\!]_{\Xi,\Gamma}(p) \boxplus [\![\langle k_2\rangle^{[m]}]\!]_{\Xi,\Gamma}(p)) \xrightarrow[p\to\infty]{[m]} \varrho_m(k_1 m l_1 \boxplus k_2 m l_2).$$

Тогда, очевидно, $(\mathfrak{N}_m, \varrho_m)$ $[m]$-полное $[m]$-метрическое пространство в ал-фавите Ξ.

Стандартным $[m]$-пополнением пространства $\mathscr{A}$ мы назовем $[m]$-полное $[m]$-метрическое пространство $(\mathfrak{L}_m, \varrho_m)$, где

$$\mathfrak{L}_m \rightleftharpoons \bigwedge S(\exists k(S \mathrel{\bar{\mp}} km\iota_0 \mathbin{\&} km\iota_0 \in \mathfrak{N}_m))$$

(ι_0 НЧ из § 4).

Очевидно, существуют $(\varnothing, \Gamma, \Xi)$-операторы $\mathscr{J}_m$ типа

$$(\mathscr{A} \to (\mathfrak{L}_m, \varrho_m)) \quad \text{и} \quad \mathscr{E}_m \quad \text{типа} \quad ((\mathfrak{N}_m, \varrho_m) \to (\mathfrak{L}_m, \varrho_m))$$

такие, что

$$\forall Sk(S \in \mathscr{A} \mathbin{\&} \mathscr{J}_m(S) \mathrel{\bar{\mp}} km\iota_0 \supset \forall t([\![\langle k\rangle^{[m]}]\!]_{\Xi,\Gamma}(t) \mathrel{\bar{\mp}} S)) \quad \text{и}$$
$$\forall S(S \in \mathfrak{N}_m \supset \varrho_m(S \boxplus \mathscr{E}_m(S)) = 0).$$

Если $\mathscr{A}$ является $[s]$-сепарабельным пространством, то $(\mathfrak{L}_m, \varrho_m)$ и $(\mathfrak{N}_m, \varrho_m)$ являются $[\max(m, s)]$-сепарабельными пространствами.

ж) Если $m < s$ и $(\mathfrak{N}_m, \varrho_m)$ и $(\mathfrak{N}_s, \varrho_s)$ соответствено $[m]$- и $[s]$-пополнение пространства $\mathscr{A}$, то существуют $[0]$-отображение $\mathscr{J}_{m,s}$ типа $(\mathfrak{N}_m \to \mathfrak{L}_s)$ и $[0]$-отображение $\mathscr{F}$ такие, что

$$\forall klp(kml \in \mathfrak{N}_m \mathbin{\&} \mathscr{E}_m(kml) \mathrel{\bar{\mp}} pm\iota_0 \supset$$
$$\supset \mathscr{J}_{m,s}(kml) \mathrel{\bar{\mp}} up(p, s-m)\, s\iota_0) \quad \text{и},$$

если k НЧ такое, что $[\![\langle k\rangle^{[m]}]\!]$ $[m]$-последовательность элементов пространства $(\mathfrak{N}_m, \varrho_m)$, псевдофундаментальная в $(\mathfrak{N}_m, \varrho_m)$, то выполнено $!\mathscr{F}(k) \mathbin{\&} \mathscr{F}(k) \in \mathfrak{L}_s$ и $[m]$-последовательность

$\mathscr{J}_{m,s} * [\![\langle k\rangle^{[m]}]\!]$ $[s]$-сходится в пространстве $(\mathfrak{L}_s, \varrho_s)$ к $\mathscr{F}(k)$.

Релятивизацией известной теоремы Г.С. Цейтина [6] в формулировке В. П. Оревкова мы получаем следующее утверждение.

Теорема 6.1. Пусть n и m НЧ, $n \leqq m$, $\mathscr{A}_1$ слабо $[m]$-полное $[m]$-сепара-бельное $[m]$-метрическое пространство в алфавите Γ_1, $\mathscr{A}_2$ $[n]$-метрическое пространство в алфавите Γ_2, а $\mathscr{F}$ $(\varnothing^{(m)}, \Gamma_1, \Gamma_2)$-оператор типа $(\mathscr{A}_1 \underset{p}{\to} \mathscr{A}_2)$. Тогда оператор $\mathscr{F}$ является $[m]$-непрерывным в каждой точке пространства $\mathscr{A}_1$, к которой он применим.

Замечание. Пусть $[\![\langle p_0\rangle^{[0]}]\!]$ $[0]$-отображение такое, что

$$\forall ST(S \mho \Xi \mathbin{\&} T \mho \Xi \supset [\![\langle p_0\rangle^{[0]}]\!](S \boxplus T) \simeq |S - T|),$$

а для всякого НЧ m, $\varrho_m \rightleftharpoons [\![\langle up(p_0, m)\rangle^{[m]}]\!]$, где up ОРФ из § 2.

Тогда для всяких НЧ m и n, $n \leqq m$, $(\mathbf{D}^{[m]}, \varrho_n)$ является $[m]$-полным $[m]$-сепарабельным $[m]$-метрическим пространством в алфавите Ξ, которое не является слабо $[m+1]$-полным и является „изометрически изоморфным" $[m]$-пополнению $[0]$-сепарабельного $[0]$-метрического пространства $(\mathbf{Q}, \varrho_0)$. При этом равенство $=$, введенное в § 4, согласовано с метрикой ϱ_n.

§ 7. Деревья. Сходимость последовательностей равномерно непрерывных функций

Определения. 1) Нормальное словарное множество $\mathfrak{M}$ мы назовем деревом, если выполнено

$$\forall Sm((S \in \mathfrak{M} \supset S \in {}^{\{\omega\}}\mathbf{N} \mathbin{\&} \Lambda \in \mathfrak{M}) \mathbin{\&} (S \,\square\, m \in \mathfrak{M} \supset S \in \mathfrak{M}))\,.$$

2) Пусть $\mathfrak{M}$ дерево, а n НЧ.

а) $\varnothing^{(n)}$-ОРФ f мы назовем $[n]$-путем в дереве $\mathfrak{M}$, если верно

$$\forall k(\square f(0)\,\square f(1)\ldots\square f(k) \in \mathfrak{M})\,, \quad \text{и}$$

б) мы скажем, что дерево $\mathfrak{M}$ обладает $[n]$-путем, если существует $\varnothing^{(n)}$-ОРФ, являющаяся $[n]$-путем в этом дереве.

Замечание 7.1. Пусть $\mathscr{F}$ $[0]$-отображение типа $({}^{\{\omega\}}\mathbf{N} \to {}^{\{\omega\}}\mathbf{N})$ такое, что для всякого кортежа S верно

$$(\sigma_0(S) = -1 \supset \sigma_0(\mathscr{F}(S)) = -1) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} (0 \leqq \sigma_0(S) \supset \mathscr{F}(S) \doteqdot \square\pi_1(\sigma_1(S \boxplus 0))\,\square\,\pi_1(\sigma_1(S \boxplus 1))\ldots$$
$$\ldots\square\,\pi_1(\sigma_1(S \boxplus \sigma_0(S))))\,.$$

Пусть n и t НЧ, а $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \rightleftharpoons \bigwedge S(![\![\langle t\rangle^{[n]}]\!](S))$, дерево. Мы для всякого слова S определим

$$\mathrm{B}(S) \rightleftharpoons (S \in {}^{\{\omega\}}\mathbf{N} \mathbin{\&} (S \doteqdot \Lambda \vee 0 \leqq \sigma_0(S) \mathbin{\&} \forall i(0 \leqq i \leqq \sigma_0(S) \supset$$
$$\supset \mathrm{T}_1^{\varnothing^{(n)}}(t, \mathrm{н}_{\Xi}(\mathscr{F}(\square\sigma_1(S \boxplus 0)\,\square\,\sigma_1(S \boxplus 1)\ldots\square\sigma_1(S \boxplus i))), \pi_2(\sigma_1(S \boxplus i))))))\,.$$

Тогда $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \rightleftharpoons \bigwedge S(\mathrm{B}(S))$, $\varnothing^{(n)}$-рекурсивное дерево,

$$\forall S(S \in {}^{\{\omega\}}\mathbf{N} \mathbin{\&} \sigma_0(S) \geqq 0 \mathbin{\&} S \in \mathfrak{N} \supset \mathscr{F}(S) \in \mathfrak{M})$$

и существует $[n]$-оператор $\mathscr{G}$ типа $({}^{\{\omega\}}\mathbf{N} \underset{\mathrm{p}}{\to} {}^{\{\omega\}}\mathbf{N})$ такой, что

$$\forall S(S \in {}^{\{\omega\}}\mathbf{N} \supset ((S \in \mathfrak{M} \equiv\, !\mathscr{G}(S)) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} (S \in \mathfrak{M} \supset \mathscr{G}(S) \in \mathfrak{N} \mathbin{\&} \mathscr{F}(\mathscr{G}(S)) \doteqdot S)))\,.$$

Пусть k НЧ. Если $\varnothing^{(k)}$-ОРФ ψ является $[k]$-путем в дереве $\mathfrak{N}$, то $\varnothing^{(k)}$-ОРФ $\lambda m[\pi_1(\psi(m))]$ является $[k]$-путем в дереве $\mathfrak{M}$. Для всякой $\varnothing^{(k)}$-ОРФ ψ_0, которая является $[k]$-путем в дереве $\mathfrak{M}$, существует $\varnothing^{(\max(n,k))}$-ОРФ ψ_1, для которой верно

$$\forall m(\psi_1(m) = \sigma_1(\mathscr{G}(\Box\psi_0(0) \Box \psi_1(1) \ldots \Box\psi_0(m)) \boxplus m))$$

и, следовательно, ψ_1 является $[\max(n, k)]$-путем в дереве $\mathfrak{N}$.

Теорема 7.1. Пусть n НЧ, а $\mathfrak{M}$ $\varnothing^{(n+1)}$-рекурсивное дерево. Тогда существует $\varnothing^{(n)}$-рекурсивно перечислимое дерево $\mathfrak{N}$ такое, что для любых НЧ t и $\varnothing^{(t)}$-ОРФ φ верно: φ является $[t]$-путем в дереве $\mathfrak{M}$ в том и только том случае, если φ является $[t]$-путем в дереве $\mathfrak{N}$.

Доказательство. Согласно теореме 2.12 существует $\varnothing^{(n)}$-ОРФ g такая, что для всякого слова S в алфавите Ξ верно

$$S \in \mathfrak{M} \equiv (0 \lim_k g(\text{н}_\Xi(S), k)) \quad \text{и}$$

$$\neg(S \in \mathfrak{M}) \equiv (1 \lim_k g(\text{н}_\Xi(S), k)) .$$

Мы для всякого слова S определим

$$\text{B}(S) \rightleftharpoons (S \in {}^{\{\omega\}}\mathbf{N} \mathbin{\&} (\sigma_0(S) = -1 \vee 0 \leqq \sigma_0(S) \mathbin{\&} \forall i(0 \leqq i \leqq \sigma_0(S) \supset$$

$$\supset \neg\neg\exists l\, \forall m(l \leqq m \leqq l + \sigma_0(S) + \sum_{j=0}^{\sigma_0(S)} \sigma_1(S \boxplus j) \supset$$

$$\supset g(\text{н}_\Xi(\Box\sigma_1(S \boxplus 0) \Box \sigma_1(S \boxplus 1) \ldots \Box\sigma_1(S \boxplus i)), m) = 0)))) .$$

Тогда $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \rightleftharpoons \bigwedge S(\text{B}(S))$, дерево, обладающее требуемыми свойствами.

На основании замечания 7.1, теоремы 7.1 и теоремы о сведении мы получаем следующее утверждение.

Теорема 7.2. Существуют ОРФ f_0, f_1 и f_2 такие, что для всяких НЧ n и k, где $\langle k\rangle^{[n+1]}$ $\varnothing^{(n+1)}$-ОРФ, выполнено

а) $\langle f_0(n, k)\rangle^{[0]}$ и $\langle f_1(n)\rangle^{[0]}$ $\varnothing$-ОРФ и $\langle f_2(n, k)\rangle^{[n+1]}$ $\varnothing^{(n+1)}$-ОРФ,

б) словарное множество

$$\bigwedge S([\![\langle f_0(n, k)\rangle^{[0]}]\!](S) \mathrel{\dot{=}} \Lambda) \tag{12}$$

является $\varnothing$-рекурсивным деревом и $\langle f_2(n, k)\rangle^{[n+1]}$ является $[n+1]$-путем в дереве (12),

в) $\forall m(\langle k\rangle^{[n+1]}(m) = \langle f_1(n)\rangle^{[0]}(\langle f_2(n, k)\rangle^{[n+1]}(m)))$ и для всяких НЧ t и и $\varnothing^{(t)}$-ОРФ φ, которая является $[t]$-путем в дереве (12), верно

$$\forall m(\varphi(m) = \langle f_2(n, k)\rangle^{[n+1]}(m))$$

и, следовательно,

г) если верно

$$\neg\exists l(\langle k\rangle^{[n+1]} \sim \langle l\rangle^{[n]}) ,$$

то для НЧ t, $t \leqq n$, дерево (12) не обладает никаким $[t]$-путем.

На основании релятивизации теоремы 1 из [15] и замечания 5.6 мы получаем следующее утверждение.

Теорема 7.3. Пусть $\mathfrak{M}$ инфинитное дерево, а n НЧ. Тогда

а) если для всякого НЧ m словарное множество

$$\Lambda S(S \in \mathfrak{M} \,\&\, \sigma_0(S) = m) \tag{13}$$

является $[n]$-финитным, то дерево $\mathfrak{M}$ обладает $[n+1]$-путем и

б) если для всякого НЧ m словарное множество (13) является неинфинитным и $\varnothing^{(n)}$-рекурсивно перечислимым, то дерево $\mathfrak{M}$ обладает $[n+2]$-путем.

Замечание 7.2. В [10], стр. 536, построено инфинитное рекурсивное дерево, которое не обладает $[n]$-путем ни для какого НЧ n.

Мы приведем релятивизации понятий ${}^{(1)}S_\sigma$-множества и почти всюду, введенных в [16].

Определения. 1) Пусть n и m НЧ, а P $[m]$-КДЧ.

а) $[n]$-последовательность неперекрывающихся $[n]$-сегментов $\{v_p \triangle w_p\}_p^{[n]}$ мы назовем $S_\sigma^{[n]}$-множеством, а $[n]$-КДЧ $z^{[n]}$ мерой этого $S_\sigma^{[n]}$-множества, если $[n]$-последовательность $[n]$-КДЧ $\{\sum\limits_{p=0}^{l} |v_p \triangle w_p|\}_l^{[n]}$ $[n]$-сходится к $z^{[n]}$.

б) Если $\mathscr{H}$ $S_\sigma^{[n]}$-множество, то мы посредством $P \in \mathscr{H}$ обозначим: не может не существовать член $[n]$-последовательности $\mathscr{H}$, содержащий $[m]$-КДЧ P.

2) Пусть n НЧ, T $[n]$-сегмент, а $\mathscr{C}$ свойство $[n]$-КДЧ. Мы скажем, что свойство $\mathscr{C}$ выполнено для почти всех $[n]$-КДЧ (соотв. для почти всех $[n]$-КДЧ из сегмента T), если существует $[n]$-последовательность $S_\sigma^{[n]}$-множеств $\{\mathscr{H}_k\}_k^{[n]}$ такая, что для любого НЧ k а) мера $\mathscr{H}_k$ меньше чем 2^{-k} и

б) для всякого $[n]$-КДЧ $x^{[n]}$ (соотв. $x^{[n]}$ из сегмента T) верно

$$\neg(x^{[n]} \in \mathscr{H}_k) \supset \mathscr{C}(x^{[n]})\,.$$

Мы приведем несколько результатов, касающихся сходимости $[0]$-последовательностей $[0]$-равномерно непрерывных $[0]$-функций. Мы будем при этом пользоваться следующими обозначениями.

Если $\{\mathscr{F}_n\}_n^{[0]}$ $[0]$-последовательность $[0]$-равномерно непрерывных $[0]$-функций, а m НЧ, то мы обозначим

а) $\mathbf{B}_m(\{\mathscr{F}_n\}_n^{[0]}) \rightleftharpoons \forall x^{[m]}(Op[\mathscr{F}_n](x^{[m]}) \xrightarrow[n\to\infty]{[m]} 0)$,

б) посредством $\mathbf{C}_m(\{\mathscr{F}_n\}_n^{[0]})$ (соотв. $\mathbf{E}_m(\{\mathscr{F}_n\}_n^{[0]})$): для всех (соотв. почти всех) $[m]$-КДЧ $x^{[m]}$ $[0]$-последовательность $[m]$-КДЧ $\{Op[\mathscr{F}_n](x^{[m]})\}_n^{[0]}$ псевдосходится к нулю.

Верны следующие утверждения.

1) Существует невозрастающая [0]-последовательность [0]-равномерно непрерывных [0]-функций $\{\mathscr{G}_n\}_n^{[0]}$ такая, что $\mathbf{B}_0(\{\mathscr{G}_n\}_n^{[0]})\ \&\ \neg\mathbf{E}_1(\{\mathscr{G}_n\}_n^{[0]})$ и, следовательно, сходимость $\{\mathscr{G}_n\}_n^{[0]}$ не является псевдоравномерной.

2) Если $\{\mathscr{F}_n\}_n^{[0]}$ невозрастающая [0]-последовательность [0]-равномерно непрерывных [0]-функций такая, что $\mathbf{C}_1(\{\mathscr{F}_n\}_n^{[0]})$, то $\{\mathscr{F}_n\}_n^{[0]}$ сходится [0]-равномерно.

3) Существует [0]-последовательность [0]-равномерно непрерывных [0]-функций $\{\mathscr{G}_n\}_n^{[0]}$ такая, что $\mathbf{B}_0(\{\mathscr{G}_n\}_n^{[0]})\ \&\ \mathbf{B}_1(\{\mathscr{G}_n\}_n^{[0]})\ \&\ \neg\mathbf{E}_2(\{\mathscr{G}_n\}_n^{[0]})$ и, следовательно, сходимость $\{\mathscr{G}_n\}_n^{[0]}$ не является псевдоравномерной.

4) Если $\{\mathscr{F}_n\}_n^{[0]}$ [0]-последовательность [0]-равномерно непрерывных [0]-функций такая, что $\mathbf{B}_2(\{\mathscr{F}_n\}_n^{[0]})$, то сходимость $\{\mathscr{F}_n\}_n^{[0]}$ является [1]-равномерной (но может не быть [0]-равномерной).

На основании теоремы 7.2 можно построить следующий пример.

Пример 7.1. Пусть k НЧ. Тогда существуют [0]-последовательность [0]-равномерно непрерывных [0]-функций $\{\mathscr{F}_n\}_n^{[0]}$ и $[k+1]$-КДЧ $y^{[k+1]}$ такие, что

$$\begin{gathered}\forall x^{[k]}(\forall n(0 \leqq Op[\mathscr{F}_n](x^{[k]}) \leqq 1)\ \& \\ \&\ \neg\neg\exists l\, \forall m(l \leqq m \supset Op[\mathscr{F}_m](x^{[k]}) = 0)\ \& \\ \&\ \forall l\ \neg\neg\exists m(l < m\ \&\ Op[\mathscr{F}_m](y^{[k+1]}) = 1)) .\end{gathered}$$

Литература

[1] Марков А. А.: Теория алгорифмов, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова 42 (1954).

[2] Детловс В. К.: Эквивалентность нормальных алгорифмов и рекурсивных функций, Турды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова 52 (1958), 75—139.

[3] Шанин Н. А.: О конструктивном понимании математических суждений, там же, 226 до 311.

[4] Марков А. А.: О конструктивной математике, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова 67 (1962), 8—14.

[5] Шанин Н. А.: Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства, там же, 15—294.

[6] Цейтин Г. С.: Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах, там же, 295—361.

[7] Заславский И. Д.: Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций, там же, 385—457.

[8] Заславский И. Д. и Цейтин Г. С.: О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойствах конструктивных функций, там же, 458—502.

[9] Шурыгин В. А.: Конструктивные множества с равенством и их отображения, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова 113 (1970), 173—259.

[10] Роджерс Х.: Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, „Мир", Москва, 1972.

[11] Кушнер Б. А.: Лекции по конструктивному математическому анализу, „Наука", Москва, 1973.

[12] Кушнер Б. А.: Некоторые свойства квазичисел и операторов из квазичисел в квазичисла, ДАН СССР 171 (1967), 275—277.

[13] Кушнер Б. А.: Теоремы непрерывности для некоторых типов вычислимых операторов, ДАН СССР 208 (1973), 1031—1034.

[14] Кушнер Б. А.: Об одном типе вычислимых действительных функций, ДАН СССР 215 (1974), 259—262.

[15] Кушнер Б. А.: Конструктивная версия теоремы Кенига; функции, вычислимые по Маркову, Гжегорчику и Лакомбу, Теория алгорифмов и математическая логика, ВЦ АН СССР, 1974, 87—111.

[16] Демут О.: Пространства L_r и S в конструктивной математике, Coment. Math. Univ. Carolinae 10 (1969), 261—284.

[17] Демут О.: О конструктивных псевдочислах, там же, 16 (1975), 315—331.

[18] Демут О.: О дифференцируемости конструктивных функций слабо ограниченной вариации на псевдочислах, там же, 16 (1975), 583—599.

[19] Демут О.: О конструктивном аналоге теоремы Данжуа-Янга о производных числах, там же, 17 (1976), 111—126.

[20] Specker E.: Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis, J. Symbolic Logic 14 (1949), 145—158.

[21] Mostowski A.: Examples of sets definable by means of two and three quantifiers, Fundamenta Mathematicae 42 (1955), 259—270.

[22] Gold E. M.: Limiting recursion, J. Symbolic Logic 30 (1965), 28—48.

[23] Putnam H.: Trial and error predicates and the solution to a problem of Mostowski, J. Symbolic Logic 30 (1965), 49—57.

[24] Shapiro N. Z.: Real numbers and functions in the Kleene hierarchy and limits of recursive, rational functions, J. Symbolic Logic 34 (1969), 207—214.