Acta Universitatis Carolinae. Mathematica

Miroslav Profant

Poznámka ke skaláru charakterisujícímu kanálové plochy

Acta Universitatis Carolinae. Mathematica, Vol. 1 (1960), No. 2, 51--60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/142117

1960 ACTA UNIVERSITATIS CAROLINAE — MATHEMATICA NO. 2. PAG. 51—60

POZNÁMKA KE SKALÁRU CHARAKTERISUJÍCÍMU KANÁLOVÉ PLOCHY

ЗАМЕЧАНИЯ К СКАЛАРУ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩЕМУ ПОВЕРХНОСТИ КАНАЛОВ

REMARQUE SUR CERTAIN SCALAIRE DES SURFACES

MIROSLAV PROFANT

Matematicko-fysikální fakulta University Karlovy

Tento článek tematicky navazuje na práci dr. K. HAVLÍČKA „Sur les surfaces enveloppes de spheres" (Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 74 z r. 1949), v které je sestrojen skalár C charakterisující kanálové plochy. Jeho konstrukce se formálně podobá konstrukci skaláru C', který charakterisuje přímkové plochy (V. HLAVATÝ: Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet, vydání z r. 1937, str. 343, v dalším prostě Hlavatý). Tato analogie není nikterak náhodná, nýbrž vyplývá z Lieovy transformace v Kleinově pětirozměrném prostoru, která Plückerovy souřadnice přímky převádí v hexasférické souřadnice koule. Při sestrojení C' zastává důležitou roli gradient

$$K_v = \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial \xi^v}$$

kde K je Gaussova křivost plochy. Ve výše zmíněné analogii mezi C' a C stojí v C na místě K_v jiný vektor Q_v, který však obecně gradientem není. Na plochách, kde Q_v je gradientem, dá se sestrojit příslušný skalár. V této práci je určena třída ploch, pro které je Q_v gradientem.

I. Všechny naše úvahy budou vedeny v trojrozměrném euklidovském prostoru, kde pravoúhlé kartézské souřadnice označíme x^a $(a = 1, 2, 3)$. Rovnici plochy píšeme ve tvaru

$$x^a = x^a(\xi^\lambda), \ (\lambda = 1, 2). \tag{1}$$

Prvý, respektive druhý základní tensor plochy pišme ve tvaru $a_{\lambda\mu}$ resp. $b_{\lambda\mu}$. V dalším se bude vyskytovat ještě třetí symetrický tensor plochy $Q_{\lambda\mu}$

$$Q_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}(k_{\lambda\mu} + k_{\mu\lambda}),$$

$$\text{kde} \quad k_{\lambda\mu} = \frac{1}{A}(a_{1\lambda}\, b_{2\mu} - a_{2\lambda}\, b_{1\mu}) \ \text{a} \ A^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}.$$

Z teorie ploch je známo, že každým nekruhovým bodem plochy procházejí právě dvě reálné k sobě kolmé hlavní křivky, jejichž diferenciální rovnice je

$$Q_{\lambda\mu}\, d\xi^\lambda\, d\xi^\mu = 0.$$

V dalším se kruhovými body plochy, tj. body, kde platí

$$Q^2 = Q_{11} \cdot Q_{22} - Q_{12} = 0,$$

nebudeme zabývat; když bude řeč o bodu plochy (1), bude to znamenat bod, který není kruhový. Poznamenejme ještě, že vždycky je

$$Q^2 < 0.$$

Pomocí $Q_{\lambda\mu}$ můžeme zkonstruovat nový, kontravariantní tensor $P^{\lambda\mu}$ definovaný rovnicemi

$$Q_{\lambda\nu}P^{\lambda\mu} = \delta^\mu_\nu$$

kde δ^μ_ν je známé Kroneckerovo delta. Snadno se ověří následující vztahy:

$$P^{11} = \frac{Q_{22}}{Q^2}, \quad P^{12} = P^{21} = -\frac{Q_{12}}{Q^2}, \quad P^{22} = \frac{Q_{11}}{Q^2}.$$

Po těchto přípravách můžeme přistoupit k hlavnímu objektu našeho zkoumání, ke kanálovým plochám.

Plochou kanálovou se rozumí obálka jednoparametrického systému koulí. O kanálových plochách platí následující věty:

1,1. *Plocha je kanálová právě tehdy, má-li za křivky hlavní (aspoň jedné kongruence) kružnice.*

1,2. *Buď* $\frac{1}{R_1R_2} \neq 0$. *Plocha je kanálová právě tehdy, je-li podél hlavních křivek* $\xi^2 = \text{const}$ *(jež jsou kružnicemi) splněna rovnice* $\frac{\partial R_1}{\partial \xi^1} = 0$, *kde skaláry* $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}$ *jsou normální křivosti v hlavních směrech.*

1,3. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby plocha (1) byla plochou kanálovou, na níž hlavní křivky* $\xi^2 = \text{const}$ *(nebo* $\xi^1 = \text{const}$) *jsou kružnicemi, je platnost rovnice*

$$\sum_{a=1}^{3}\left(\frac{\partial x^a}{\partial \xi^1}\frac{\partial^2 X^a}{\partial \xi^1 \partial \xi^1} - \frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^1 \partial \xi^1}\frac{\partial X^a}{\partial \xi^1}\right) = 0,$$

nebo

$$\sum_{a=1}^{3}\left(\frac{\partial x^a}{\partial \xi^2}\frac{\partial^2 X^a}{\partial \xi^2 \partial \xi^2} - \frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^2 \partial \xi^2}\frac{\partial X^a}{\partial \xi^2}\right) = 0,$$

kde X^a $(a = 1, 2, 3)$ *značí směrové kosiny normály plochy.*

Důkazy těchto vět jsou obsaženy ve dříve citované práci K. Havlíčka. V konstrukci skaláru charakterisujícího kanálové plochy se vyskytuje tensor $b_{\nu\lambda\mu}$ vzniklý kovariantní derivací druhého základního tensoru $b_{\lambda\mu}$ vzhledem k metrické konexi.

Věta 1,4. Výrazy

$$v_{\nu\lambda\mu} = \sum_{a=1}^{3}\left(\frac{\partial x^a}{\partial \xi^\nu}\frac{\partial^2 X^a}{\partial \xi^\lambda \partial \xi^\mu} - \frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^\lambda \partial \xi^\mu}\frac{\partial X^a}{\partial \xi^\nu}\right)$$

jsou složky třikrát kovariantního symetrického tensoru, při čemž platí, že

(2) $$v_{\nu\lambda\mu} = -b_{\nu\mu\lambda}$$

(Viz Mathematical Reviews, Vol. 11, No 5, p. 396).

Užitím právě konstruovaného tensoru a tensoru $P^{\lambda\mu}$ dostáváme vektor

$$Q_\nu = v_{\nu\lambda\mu} P^{\lambda\mu}.$$

Tím jsme dostali vektor Q_ν, o jehož významu jsem se zmínil již na začátku. Ke konstrukci skaláru C je zapotřebí ještě tensoru

$$\mu_{\nu\mu\lambda} = b_{\nu\mu\lambda} - \frac{1}{4}(Q_\nu Q_{\mu\lambda} + Q_\mu Q_{\nu\lambda} + Q_\lambda Q_{\nu\mu}).$$

Platí potom věta.

Věta 1,5. Nutná a postačující podmínka pro to, aby plocha byla plochou kanálovou, je splnění rovnice $C = 0$, kde

$$C = \mu_{\nu\lambda\mu}\mu_{\alpha\beta\gamma} P^{\nu\alpha} P^{\lambda\beta} P^{\mu\gamma}.$$

Důkaz této věty je podán v citované práci dr. K. Havlíčka.

II. Určíme plochy, na kterých je Q_ν gradientem. K tomu budeme potřebovat několik pomocných výpočtů a tvrzení. Při všech úvahách budeme uvažovat plochu vztaženou k hlavním parametrům. I v tomto paragrafu podobně jako v minulém vyloučíme ze svých úvah body kruhové (tím je vyloučena i rovina).

Věta 2,1. *V hlavních parametrech* ($a_{12} = b_{12} = 0$) *platí:*

$$(3) \qquad \begin{aligned} Q_1 &= \frac{4\sqrt{a_{11}a_{22}}}{a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}} \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\xi^1 \partial\xi^2} \frac{\partial X^\alpha}{\partial\xi^1} - \frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^1} \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial\xi^1 \partial\xi^2} \right) \\ Q_2 &= \frac{4\sqrt{a_{11}a_{22}}}{a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}} \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\xi^1 \partial\xi^2} \frac{\partial X^\alpha}{\partial\xi^2} - \frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^2} \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial\xi^1 \partial\xi^2} \right) \end{aligned}$$

Důkaz. V hlavních parametrech je $a_{12} = b_{12} = 0$. Tedy

$$P^{11} = P^{22} = Q_{11} = Q_{22} = 0,$$

$$P^{12} = P^{21} = \frac{1}{2\sqrt{a_{11}a_{22}}} \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} \\ a_{22} b_{22} \end{vmatrix}, \quad Q^2 = -\frac{1}{4\, a_{11}a_{22}} \begin{vmatrix} a_{11} a_{22} \\ b_{11} b_{22} \end{vmatrix}^2$$

$$P_{12} = P_{21} = \frac{2\sqrt{a_{11}a_{22}}}{a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}},$$

Protože v hlavních parametrech je vždycky

$$\frac{1}{R_1} = \frac{b_{11}}{a_{11}}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{b_{22}}{a_{22}}$$

a protože předpokládáme $\frac{1}{R_1} \neq \frac{1}{R_2}$ (vyluč. body kruhové), je

$$a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11} \neq 0,$$

a tedy také $Q_{12} \neq 0$, $P^{12} \neq 0$.

Nyní s použitím věty 1,4 vychází

$$Q_1 = b_{1\mu\nu} P^{\mu\nu} = 2\, b_{112} P^{12} =$$

$$= \frac{4\sqrt{a_{11}a_{22}}}{a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}} \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\xi^1\partial\xi^2} \frac{\partial X^\alpha}{\partial\xi^1} - \frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^1} \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial\xi^1\partial\xi^2} \right)$$

a podobně pro Q_2 [čímž jsou vzorce (3) odvozeny].

Věta 2,2. *V hlavních parametrech platí*

$$\frac{\sqrt{a_{11}a_{22}}}{4} Q_1 = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^1} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\xi^1\partial\xi^2} = - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^2} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\xi^1\partial\xi^1}$$

$$\frac{\sqrt{a_{11}a_{22}}}{4} Q_2 = - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^2} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\xi^1\partial\xi^2} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^1} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\xi^2\partial\xi^2}$$

Důkaz. Hlavní parametry jsou charakterisovány podmínkami $a_{12} = 0$, $b_{12} = 0$, jež jsou ekvivalentní s rovnicemi:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^1} \frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^2} = 0, \qquad \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^1} \frac{\partial X^\alpha}{\partial\xi^2} = 0.$$

Derivujeme-li je podle ξ^1, máme

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\xi^1\partial\xi^1} \frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^2} = - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^1} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\xi^1\partial\xi^2} \tag{4}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\xi^1\partial\xi^1} \frac{\partial X^\alpha}{\partial\xi^2} = - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^1} \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial\xi^1\partial\xi^2}$$

a derivujeme-li je podle ξ^2, dostaneme

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\xi^1\partial\xi^2} \frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^2} = - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^1} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\xi^2\partial\xi^2} \tag{5}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\xi^1\partial\xi^2} \frac{\partial X^\alpha}{\partial\xi^2} = - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^1} \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial\xi^2\partial\xi^2}$$

Dosadíme-li to do vzorců získaných větou 2,1 a užijeme-li Rodriguesových formulí, dostaneme

$$Q_1 = \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\xi^1\partial\xi^2} \frac{\partial X^\alpha}{\partial\xi^1} - \frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^1} \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial\xi^1\partial\xi^2} \right) \frac{4\sqrt{a_{11}a_{22}}}{a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}} =$$

$$= \frac{4\sqrt{a_{11}a_{22}}}{a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}} \left(-\frac{1}{R_1} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\xi^1\partial\xi^2} \frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^1} - \frac{1}{R_2} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\xi^1\partial\xi^1} \frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^2} \right) =$$

$$= \frac{4\sqrt{a_{11}a_{22}}}{a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}} \left(\frac{1}{R_1} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \xi^1 \partial \xi^1} - \frac{1}{R_2} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \xi^1 \partial \xi^1} \right) =$$

$$= \frac{4\sqrt{a_{11}a_{22}}}{a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \xi^1 \partial \xi^1} \Big) =$$

$$= \frac{4\sqrt{a_{11}a_{22}}}{a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}} \left(\frac{b_{11}}{a_{11}} - \frac{b_{22}}{a_{22}} \right) \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \xi^1 \partial \xi^1} =$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \xi^1 \partial \xi^1} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^2} = \frac{4}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^1} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} .$$

Podobně

$$Q_2 = \frac{4\sqrt{a_{11}a_{22}}}{a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}} \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} \frac{\partial X^\alpha}{\partial \xi^2} - \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} \right) =$$

$$= \frac{4\sqrt{a_{11}a_{22}}}{a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}} \left(-\frac{1}{R_2} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^2} + \frac{1}{R_1} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^2} \right) =$$

$$= \frac{4\sqrt{a_{11}a_{22}}}{a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}} \left(\frac{b_{11}}{a_{11}} - \frac{b_{22}}{a_{22}} \right) \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^2} =$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^2} = \frac{4}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^1} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \xi^2 \partial \xi^2}$$

Věta 2,3. *V hlavních parametrech je*

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{\partial^3 x^\alpha}{\partial \xi^1 \partial \xi^1 \partial \xi^2} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^3 x^\alpha}{\partial \xi^1 \partial \xi^2 \partial \xi^2} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^1} \right) =$$

$$= -\sum_{\alpha=1}^{3} \left[\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \xi^1 \partial \xi^1} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \xi^2 \partial \xi^2} + \left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} \right)^2 \right].$$

Důkaz. Derivováním rovnic (5) podle ξ^1 obdržíme

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \left[\frac{\partial^3 x^\alpha}{\partial \xi^1 \partial \xi^1 \partial \xi^2} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} \right)^2 \right] = -\sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \xi^1 \partial \xi^1} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \xi^2 \partial \xi^2} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^1} \frac{\partial^3 x^\alpha}{\partial \xi^1 \partial \xi^2 \partial \xi^2} \right)$$

Z toho již snadno plyne požadovaná rovnost.

Pro další výpočty budeme potřebovat vyjádření Christoffelových symbolů druhého druhu pomocí $Q_{\lambda\mu}$.

Definice:

$$\left\{ {\nu \atop \lambda\mu} \right\} = \frac{1}{2} a^{\nu\alpha} \left(\frac{\partial a_{\mu\alpha}}{\partial \xi^\lambda} + \frac{\partial a_{\lambda\alpha}}{\partial \xi^\mu} - \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial \xi^\alpha} \right)$$

Protože $a_{12} = 0$

$$(6) \qquad \left\{ {1 \atop 1\,1} \right\} = -\frac{1}{2A^2} a_{22} \frac{\partial a_{11}}{\partial \xi^1}, \qquad \left\{ {2 \atop 2\,2} \right\} = \frac{1}{2A^2} a_{11} \frac{\partial a_{22}}{\partial \xi^2},$$

$$\left\{ {2 \atop 1\,2} \right\} = \left\{ {2 \atop 2\,1} \right\} = \frac{1}{2A^2} a_{11} \frac{\partial a_{22}}{\partial \xi^1},$$

$$\left\{ {1 \atop 1\,2} \right\} = \left\{ {1 \atop 2\,1} \right\} = \frac{1}{2\,A^2} a_{22} \frac{\partial a_{11}}{\partial \xi^2},$$

$$\left\{ {2 \atop 1\,1} \right\} = -\frac{1}{2\,A^2} a_{11} \frac{\partial a_{11}}{\partial \xi^2}; \quad \left\{ {1 \atop 2\,2} \right\} = -\frac{1}{2\,A^2} a_{22} \frac{\partial a_{22}}{\partial \xi^1}$$

Uveďme ještě známou větu, že jedině rozvinutelné plochy mají tu vlastnost, že jest na nich

$$K = 0.$$

Užívajíce těchto pomocných tvrzení, můžeme dokázat následující větu, což je cílem tohoto odstavce.

Věta 2,4. *Vektor Q_v je gradientem na rozvinutelných plochách a jen na rozvinutelných plochách (mimo rovinu).*

Důkaz. Podle definice jest vektor Q_v gradientem právě tehdy, je-li

$$(7) \qquad \frac{\partial Q_1}{\partial \xi^2} = \frac{\partial Q_2}{\delta \xi^1};$$

ale podle věty 2,2

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\sum_{a=1}^{3} \frac{\partial x^a}{\partial \xi^1} \frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} \frac{4}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} \right) =$$

$$\sum_{a=1}^{3} \left[\left(\frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} \right)^2 \frac{4}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} + \frac{\partial x^a}{\partial \xi^1} \frac{\partial^3 x^a}{\partial \xi^1 \partial \xi^2 \partial \xi^2} \frac{4}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} + 4 \frac{\partial x^a}{\partial \xi^1} \frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} \frac{\partial (a_{11} a_2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial \xi^2} \right]$$

Podobně

$$\frac{\partial Q_2}{Q \xi^1} = -\sum_{a=1}^{3} \left[\left(\frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} \right)^2 \frac{4}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} + \frac{\partial x^a}{\partial \xi^2} \frac{\partial^3 x^a}{\partial \xi^1 \partial \xi^1 \partial \xi^2} \frac{4}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} + \right.$$

$$\left. + 4 \frac{\partial x^a}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} \frac{\partial (a_{11} a_{22})^{-\frac{1}{2}}}{\partial \xi^1} \right]$$

Zkoumejme tedy, na kterých plochách platí

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \xi^2} - \frac{\partial Q_2}{Q \xi^1} = 0,$$

$$\text{tj.}\ \sum_{a=1}^{3}\left[\left(\frac{\partial^2 x^a}{\partial\xi^1\partial\xi^2}\right)^2\frac{2}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}+\frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}\left(\frac{\partial x^a}{\partial\xi^1}\frac{\partial^3 x^a}{\partial\xi^1\partial\xi^2\partial\xi^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial x^a}{\partial\xi^2}\frac{\partial^3 x^a}{\partial\xi^1\partial\xi^1\partial\xi^2}\right)+\frac{\partial x^a}{\partial\xi^1\partial\xi^2}\left(\frac{\partial x^a}{\partial\xi^1}\frac{\partial(a_{11}a_{22}{}^{-\frac{1}{2}}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial x^a}{\partial\xi^2}\frac{\partial(a_{11}a_{22})^{-\frac{1}{2}}}{\partial\xi^1}\right)\right]=0.$$

Levou stranu rovnice zjednodušíme, užijeme-li věty 2,3.

$$\sum_{a=1}^{3}\left[\left(\frac{\partial^2 x^a}{\partial\xi^1\partial\xi^2}\right)^2-\frac{\partial^2 x^a}{\partial\xi^1\partial\xi^1}\frac{\partial^2 x^a}{\partial\xi^2\partial\xi^2}+\sqrt{a_{11}a_{22}}\frac{\partial^2 x^a}{\partial\xi^1\partial\xi^2}\left(\frac{\partial x^a}{\partial\xi^1}\frac{\partial(a_{11}a_{22})^{-\frac{1}{2}}}{\partial\xi^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial x^a}{\partial\xi^2}\frac{\partial(a_{11}a_{22})^{-\frac{1}{2}}}{\partial\xi^1}\right)\right]=0.$$

Úpravou dostaneme

$$\sum_{a=1}^{3}\left\{\left(\frac{\partial^2 x^a}{\partial\xi^1\partial\xi^2}\right)^2-\frac{\partial^2 x^a}{\partial\xi^1\partial\xi^1}\frac{\partial^2 x^a}{\partial\xi^2\partial\xi^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 x^a}{\partial\xi^1\partial\xi^2}\frac{1}{a_{11}a_{22}}\left[\frac{\partial x^a}{\partial\xi^1}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial\xi^2}a_{22}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+a_{11}\frac{\partial a_{22}}{\partial\xi^2}\right)+\frac{\partial x^a}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial\xi^1}a_{22}+a_{11}\frac{\partial a_{22}}{\partial\xi^1}\right)\right]\right\}=0.$$

Použitím Gaussových rovnic (Hlavatý, str. 264)

$$\frac{\partial^2 x^a}{\partial\xi^\mu\partial\xi^\nu}=\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\frac{\partial x^a}{\partial\xi^\alpha}+b_{\mu\nu}X^a$$

obdržíme

$$\sum_{a=1}^{3}\left\{\left[\begin{Bmatrix}\nu\\ 1\,2\end{Bmatrix}\frac{\partial x^a}{\partial\xi^\nu}+b_{12}X^a\right]^2-\left[\begin{Bmatrix}\nu\\ 1\,1\end{Bmatrix}\frac{\partial x^a}{\partial\xi^\nu}+b_{11}X^a\right]\left[\begin{Bmatrix}\mu\\ 2\,2\end{Bmatrix}\frac{\partial x^a}{\partial\xi^\mu}+\right.\right.$$

$$\left.+b_{22}X^a\right]-\left[\begin{Bmatrix}\nu\\ 1\,2\end{Bmatrix}\frac{\partial x^a}{\partial\xi^\nu}+b_{12}X^a\right]\left[\frac{\partial x^a}{\partial\xi^1}\left(\frac{\partial a^{11}}{\partial\xi^2}a_{22}+a_{11}\frac{\partial a_{22}}{\partial\xi^2}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial x^a}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial\xi^1}a_{22}+a_{11}\frac{\partial a_{22}}{\partial\xi^1}\right)\right]\frac{1}{2\,a_{11}a_{22}}\right\}=0.$$

Protože v hlavních parametrech $a_{12}=b_{12}=0$, máme

$$\sum_{a=1}^{3}\left\{\left[\begin{Bmatrix}1\\ 1\,2\end{Bmatrix}\frac{\partial x^a}{\partial\xi^1}+\begin{Bmatrix}2\\ 2\,1\end{Bmatrix}\frac{\partial x^a}{\partial\xi^2}\right]^2-\left[\begin{Bmatrix}1\\ 1\,1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 2\,2\end{Bmatrix}\left(\frac{\partial x^a}{\partial\xi^1}\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.+\begin{Bmatrix}2\\ 1\,1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}2\\ 2\,2\end{Bmatrix}\left(\frac{\partial x^a}{\partial\xi^2}\right)^2+b_{11}\,b_{22}\right]-\left[\begin{Bmatrix}1\\ 1\,2\end{Bmatrix}\left(\frac{\partial x^a}{\partial\xi^1}\right)^2\frac{1}{2\,A^2}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial\xi^2}a_{22}+a_{11}\frac{\partial a_{22}}{\partial\xi^2}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\begin{Bmatrix}2\\ 1\,2\end{Bmatrix}\left(\frac{\partial x^a}{\partial\xi^2}\right)^2\frac{1}{2\,A^2}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial\xi^1}a_{22}+a_{11}\frac{\partial a_{22}}{\partial\xi^1}\right)\right]\right\}=0.$$

Dosazením za Christoffelovy symboly z (6) získáme

$$\frac{1}{4a_{11}^2 a_{22}^2} \sum_{a=1}^{3} \left(a_{22} \frac{\partial a_{11}}{\partial \xi^2} \frac{\partial x^a}{\partial \xi^1} + a_{11} \frac{\partial a_{22}}{\partial \xi^1} \frac{\partial x^a}{\partial \xi^2} \right)^2 -$$

$$- \frac{1}{4\, a_{11}^2 a_{22}^2} \left(a_{22}^2 a_{11} \frac{\partial a_{11}}{\partial \xi^1} \frac{\partial a_{22}}{\partial \xi^1} - a_{11}^2 a_{22} \frac{\partial a_{11}}{\partial \xi^2} \frac{\partial a_{22}}{\partial \xi^2} + b_{11} b_{22} \right) -$$

$$- \frac{1}{4a_{11}^2 a_{22}^2} \left[a_{22} \frac{\partial a_{11}}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial \xi^2} a_{22} + a_{11} \frac{\partial a_{22}}{\partial \xi^2} \right) a_{11} + \right.$$

$$\left. + a_{11} \frac{\partial a_{22}}{\partial \xi^1} \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial \xi^1} a_{22} + a_{11} \frac{\partial a_{22}}{\partial \xi^1} \right) a_{22} \right] =$$

$$= \frac{1}{4a_{11}^2 a_{22}^2} \left[a_{11} a_{22}^2 \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial \xi^2} \right)^2 + a_{22} a_{11}^2 \left(\frac{\partial a_{22}}{\partial \xi^1} \right)^2 - a_{22}^2 a_{11} \frac{\partial a_{11}}{\partial \xi^1} \frac{\partial a_{22}}{\partial \xi^1} - \right.$$

$$+ a_{11}^2 a_{22} \frac{\partial a_{11}}{\partial \xi^2} \frac{\partial a_{22}}{\partial \xi^2} - b_{11} b_{22} - a_{11} a_{22}^2 \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial \xi^2} \right)^2 - a_{11}^2 a_{22} \frac{\partial a_{11}}{\partial \xi^2} \frac{\partial a_{22}}{\partial \xi^2} +$$

$$\left. + a_{22}^2 a_{11} \frac{\partial a_{11}}{\partial \xi^1} \frac{\partial a_{22}}{\partial \xi^1} - a_{11}^2 a_{22} \left(\frac{\partial a_{22}}{\partial \xi^1} \right)^2 \right] = - b_{11} b_{22}.$$

Tudíž Q_v je gradientem právě tehdy, je-li $b_{11} b_{22} = 0$.

Protože je $\quad K = \dfrac{b_{11} b_{22}}{a_{11} a_{22}}$

($a_{11} a_{22} \neq 0$), musí být také $K = 0$.

Z předcházejícího pak již snadno plyne věta 2,4, neboť rovnice $K = 0$ i rovnice (7) jsou nezávislé na systému parametrů (viz Hlavatý, str. 97 až 98).

III. Složky vektoru Q_v lze snadno vyjádřit pomocí invariantů dané rozvinutelné plochy.

Buď dána rozvinutelná plocha

$$r^a (\xi^\lambda) = s^a (\xi^1) + (\xi^2 - \xi^1) \frac{ds^a}{d\xi^1}$$

kde ξ^1 je oblouk křivky $s^a = s^a (\xi^1)$ (hrany vratu).

Parametry ξ^1, ξ^2 jsou na této ploše parametry hlavní. Lze tedy použít vzorců z věty 2,2, odkud vychází

$$Q_1 = \frac{4}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial r^a}{\partial \xi^1} \frac{\partial^2 r^a}{\partial \xi^1 \partial \xi^2}, \quad Q_2 = - \frac{4}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial r^a}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 r^a}{\partial \xi^1 \partial \xi^2}.$$

Protože

$$\frac{\partial r^a}{\partial \xi^1} = (\xi^2 - \xi^1) \frac{d^2 s^a}{(d\xi^1)^2}; \qquad a_{11} = (\xi^2 - \xi^1)^2 \sum \frac{d^2 s^a}{(d\xi^1)^2} \frac{d^2 s^a}{(d\xi^1)^2}$$

$$\frac{\partial r^a}{\partial \xi^2} = \frac{ds^a}{d\xi^1}; \qquad a_{22} = 1, a_{22} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 r^a}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} = \frac{d^2 s^a}{(d\xi^1)^2},$$

jest

$$Q_1 = 4 \operatorname{sgn} (\xi^2 - \xi^1) k_1$$

$$Q_2 = 0,$$

kde

$$k_1 = \sqrt{\sum_{a=1}^{3} \frac{d^2 s^a}{(d\xi^1)^2} \frac{d^2 s^a}{(d\xi^1)^2}}$$

je první křivost (flexe) hrany vratu.

РЕЗЮМЕ

Эта статья тематически связана с трудом Д-ра К. Гавличка в которой сконструирован скалар С, характеризующий каналовые поверхности. Его конструкция аналогична постройке скалара С′, который определяет линейчатые поверхности.

Эта аналогия не случайна, наоборот она является следствем трансформации или Кляйнова пространства пяти измерений, которое прибавляет к лумейным координатам Плюкера гексасферические координаты шара. При конструировании скалара С′ играет весьма важную роль градиент $K_\nu = \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial \xi^\nu}$, (причем K — гаусовая кривизна поверхности).

В выше упомянутой аналогии между См и С′ находится на месте K_ν какой — то вектор Q_ν, о котором неизвестно на каких поверхностях является градиентом.

На поверхностях, на которых является Q_ν градиентом, можно построить скалар Q так, что

$$Q_\nu = \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial \xi^\nu}.$$

Во втором параграфе этой работы теоремой 2,4 определен класс поверхностей, на которых Q_ν является градиентом. Теорема 2,4 доказывает, что это развертывающаяся поверсность. Доказательство производится при помощи нескольких лемм, в которых в качестве параметрических кривых вязты линии кривизны.

На концу в третьем параграфе, на поверхности, образованной касательними к пространственной кривой выражен градиент Q_ν помощи ин вариантов этой поверхности.

RÉSUMÉE

Cet article prend thématiquement pour le point de départ le travail de K. Havlíček (Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 74 z r. 1949), dans lequel on a construit un scalaire C, déterminant les surfaces qui enveloppent une famille de sphères dépendant d'un paramètre. Sa construction est

analogue à la construction du scalaire C', qui détermine les surfaces réglèes (V. Hlavatý: Diferenciální geometrie křivek a ploch). Cette analogie n'est pas en aucune façon occasionelle, mais elle résulte de la transformation de Lie dans l'espace de Klein à cinq dimensions, par laquelle on transforme les coordonnées de droites de Plücker en coordonnées hexasphériques de la sphère. En construisant le scalaire C', c'est le gradient $K_\nu = \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial \xi^\nu}$, qui y joue un role important (K signifie la courbure totale de la surface de Gauss). Dans l'analogie audessus mentionnée, il y en a entre C' et C au lieu de K_ν un certain vecteur Q_ν, duquel on ne sait pas sur quelles surfaces il forme le gradient. Sur les surfaces avec le gradient Q_ν on peut construire le scalaire Q de la sorte que $Q_\nu = \frac{\partial Q}{\partial \xi^\nu}$. Dans le deuxième paragraphe de ce travail on détermine par le théoréme 2,4 la catégorie des surfaces sur lesquelles le Q_ν forme le gradient. Le théorème 2,4 dit que ce ne sont que les sufaces développables sur lesquelles le Q_ν forme le gradient. La démonstration a été faite à l'aide de quelques affirmations auxiliaires, en y rapportant la surface aux lignes de courbure. Puis, dans le troisième paragraphe on a exprimé le gradient Q_ν sur la surface des tangentes de la courbe spaciale à l'aide des invariants de cette surface.