

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Karel Segeth

Fourierova analýza dvojrozměrných terénních dat

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 56 (2011), No. 3, 213–227

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/142009>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2011

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

# Fourierova analýza dvojrozměrných terénních dat

*Karel Segeth, Praha*

## 1. Úvod

S rozvojem počítačů, jejich rychlosti a paměťové kapacity se rychle zdokonalovaly způsoby zpracování obrazových dat. Proto se záhy objevila myšlenka znázornit dvojrozměrná naměřená data (terénní data) jako černobílý obraz a zpracovávat je stejnými technikami jako běžné obrázky. Zpracováním přitom budeme rozumět lineární frekvenční a směrovou analýzu dat, tj. potlačení některých frekvencí nebo některých směrových projevů v datech. To jsou standardní operace při obecném zpracování dvojrozměrných signálů.

Pro účely zpracování dat není důležitá barva a černobílé obrazy se v paměti ukládají pomocí 256 stupňů šedi od bílé po černou, a tak se také zpracovávají. Jednoduchými prostředky lze data i výsledek jejich zpracování obarvit „pseudobarvami“, jako třeba na fyzické mapě. Při zpracování skutečných barevných obrazů, kódovaných ve škále RGB, se postupně zpracovávají tři jednotlivé barvy, červená, zelená a modrá.

V tomto článku se pokusíme předvést oba možné způsoby lineární analýzy diskrétních dat, tj. jejich filtraci v prostorové oblasti i ve spektrální oblasti, a ukážeme výhody i nevýhody obou způsobů. Základním matematickým prostředkem tu je diskrétní konvoluce, diskrétní Fourierova transformace a věta o konvoluci, která popisuje vzájemný vztah těchto dvou pojmů. Můžeme tedy celý tento příspěvek pokládat za ukázkou jedné aplikace diskrétní Fourierovy transformace.

Zatímco v úplných počátcích v osmdesátých letech dvacátého století si autoři vytvářeli potřebný software pro svůj počítač sami a zápasili s velikostí paměti, s operační rychlostí i s nevhodnými výstupními zařízeními tehdejších počítačů, dnes je velmi výkonný a všestranný software standardní součástí většiny operačních systémů.

Část výsledků zpracování dat je uvedena v citovaných pracích, řada jiných výsledků byla zveřejněna v dalších publikacích.

Začneme ilustrativním příkladem zpracování magnetických dat. Věnujme se analýze jednorozměrných dat oběma svrchu uvedenými způsoby a rozšíříme výklad na dvojrozměrná data. Zvolili jsme původní příklady, které ukazují také zobrazovací techniky dostupné před několika lety. K příkladům přidáme komentář a nakonec se zmíníme o soudobém standardním softwaru a jeho dostupnosti.

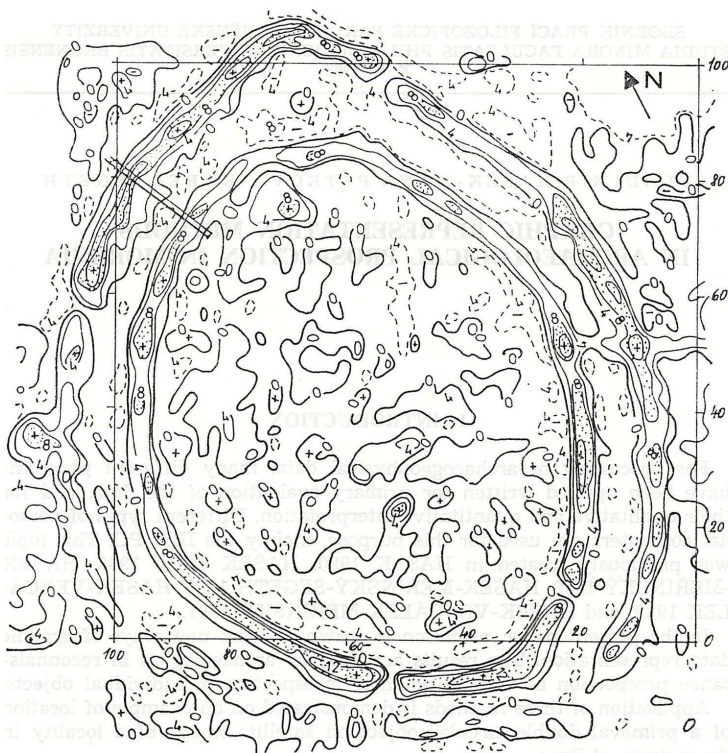
---

Prof. RNDr. KAREL SEGETH, CSc., Matematický ústav AV ČR, v.v.i., Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: [segeth@math.cas.cz](mailto:segeth@math.cas.cz)

## 2. Zpracování magnetických dat

Magnetické metody geofyzikálního průzkumu jsou vhodné pro hledání rud, jejichž ložiska pod zemí deformují magnetické pole na povrchu. Dají se však identifikovat i dávné příkopy za tisíce let zasypané okolní zeminou, protože zemina v zasypaném příkopu má obecně jinou (převážně vyšší) magnetickou susceptibilitu než okolní materiál. Proto se projeví jako anomálie magnetického pole.

Jeden z principů archeologické prospekce spočívá v hledání anomálií v hodnotách magnetického pole naměřeného na zemském povrchu (viz např. heslo Archaeology, Magnetic Methods v [5]). V terénu se v uzlech pravidelné obdélníkové sítě měří diferenciálním magnetometrem vhodná složka vektoru intenzity magnetického pole. Naměřená data pak tvoří matici reálných čísel, která odpovídá geometrii sítě.

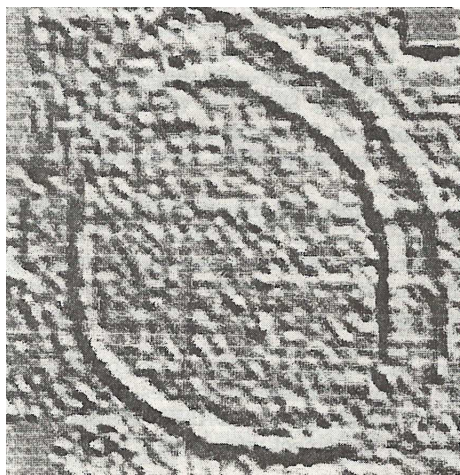


Obr. 1. Lokalita Šumice. Vrstevnice naměřených magnetických dat.

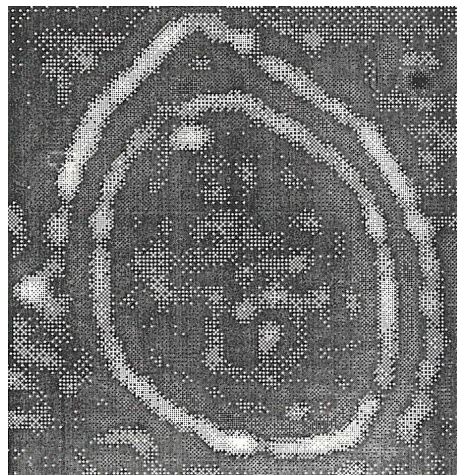
Magnetická data znázorněná vrstevnicemi na obr. 1 byla naměřena v lokalitě Šumice v okrese Znojmo v pravidelné čtvercové síti uzlů měření na rovnoběžných profilech, která pokryla celou lokalitu a v níž byla vzdálenost sousedních uzlů i sousedních profilů 2 m [6]. Již z obr. 1 je vidět, že jde o kruhový objekt tvořený dvěma soustřednými příkopy, jež jsou na několika místech přerušeny vstupy. V levé dolní části obrázku vnější příkop není patrný. Byla publikována hypotéza, že tato část příkopu nikdy nebyla dobudována.

Takových a podobných objektů je na Moravě, v Čechách, na Slovensku, v Rakousku a v Maďarsku celá řada. Nazývají se *rondely* a pocházejí z mladší doby kamenné (neolit, 6–4 tis. let před n. l.). Předpokládá se, že rondely sloužily jako sídla. Průměr rondelu bývá kolem 80 m, někdy i větší. Prvotní metody pro nalezení takových objektů jsou zpravidla odkryv v rámci záchranného archeologického průzkumu nebo letecká fotografie. Teprve pak přicházejí ke slovu magnetické metody [5].

Protože anomálie na obr. 1 má kruhový charakter, nemá smysl provádět její směrovou filtraci. Při zpracování dat byl proto aplikován ve frekvenční oblasti pouze slabý pásmový filtr, aby se odstranily projevy vysokých frekvencí, jež představují šum v naměřených datech, a nejnižší frekvence, jež jsou projevem trendu, který není pro zpracování zajímavý.



Obr. 2. Lokalita Šumice.  
Uměle osvětlený reliéf ohlazených dat.



Obr. 3. Lokalita Šumice.  
Data ohlazená jiným filtrem než na obr. 2.

Na obr. 2 jsou data po filtraci zobrazená jako reliéf technikou *umělého osvětlení* (v našem případě je „zdroj světla“ v pravém horním rohu obrázku). Uvnitř vnitřního příkopu jsou drobné anomálie ohlazené. Obrázek ukazuje i nevýhodu provedené filtrace dat. Protože síť měřicích bodů je příliš řídká, vystupují po filtraci artefakty, odpovídající struktuře sítě a volbě filtru. Na obr. 3 je výsledek podobného zpracování pomocí jiného filtru s dolní propustí (světlá místa znamenají vysoké hodnoty pole). Obrázky jsou vytvořeny na tiskárně při použití klasické techniky zvané *digitální polotónování* [7].

V levé horní části obr. 1 je vyznačena sonda, která byla v průběhu archeologického průzkumu vykopána a potvrdila existenci obou příkopů asi 5 m širokých a 2,2 m hlubokých.

### 3. Lineární filtrace 1D dat

#### Prostorový (časový) filtr

Ukážeme způsoby a vlastnosti nejjednodušší lineární filtrace (s tzv. polohově nezávislou impulsní odezvou) prostorově (časově) omezeného signálu nejprve na jednorozměrném příkladě. Dvojměrný případ popíšeme později (srov. též skripta [2]). Uvažme konečnou posloupnost reálných  $dat\ V = [v_j], j = 0, 1, \dots, M-1$ , měřených v ekvidistantních bodech na přímce nebo v čase a další konečnou posloupnost reálných čísel představujících *prostorový* nebo *časový filtr*  $P = [p_q], q = -Q, \dots, Q$ , kde  $M$  a  $Q, Q < M$  jsou přirozená čísla. Pro další výklad bude účelné, když místo konečné posloupnosti  $V$  budeme uvažovat nekonečnou posloupnost, která vznikne periodickým opakováním původně změřených  $M$  hodnot. Pro praktické účely je třeba postupovat poněkud složitějším způsobem, jak uvidíme později.

Položme tedy  $v_{j+M} = v_j$  pro všechna  $j$  celá a tuto nekonečnou periodickou posloupnost s periodou  $M$  označme pro jednoduchost opět  $V$ . Zavedeme *diskrétní konvoluci*  $\widehat{V} = V * P$  vektorů  $V$  a  $P$  vztahem

$$\widehat{v}_j = \sum_{q=-Q}^Q v_{j-q} p_q. \quad (1)$$

Nekonečnou posloupnost  $\widehat{V}$  budeme nazývat *filtrovaná data*. Snadno se ověří, že  $\widehat{v}_{j+M} = \widehat{v}_j$  pro všechna  $j$  celá. Nekonečná posloupnost  $\widehat{V}$  je tedy periodická s periodou  $M$  a můžeme ji reprezentovat pomocí jejích  $M$  prvků  $\widehat{v}_j, j = 0, 1, \dots, M-1$ .

Jednoduché příklady prostorových filtrů jsou *horní propust* (high-pass filter), která z dat odstraní *trend*, tj. málo se měnící složku dat, a ponechá v nich jejich vysokofrekvenční složku, např.

$$P = \left[-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right],$$

a *dolní propust* (low-pass filter), která odstraní *šum*, tj. vysokofrekvenční složku dat, ale ponechá nízké frekvence, např. klouzavý průměr

$$P = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right].$$

Kombinací horní a dolní propusti můžeme vytvořit *pásmovou propust* (band-pass filter) nebo její opak, *pásmovou zádrž* (band-reject filter). O efektu uvedených propustí se můžeme přesvědčit při jejich aplikaci na posloupnost konstantních dat, třeba  $V = [\dots, 1, 1, \dots, 1, \dots]$ , ve vztahu (1).

#### Diskrétní Fourierova transformace

Než uvedeme, jak se filtrují jednorozměrná data ve spektrální oblasti, ukažme, jak se naměřená data interpolují trigonometrickými polynomy. Mějme tedy data  $V$  naměřená

v  $M$  uzlech, jejichž vzájemná vzdálenost je  $h_x$ , a hledíme spojitou funkci  $v(x)$  takovou, aby

$$v(jh_x) = v_j, \quad j = 0, 1, \dots, M - 1.$$

To je klasická úloha trigonometrické interpolace. Budeme její řešení předpokládat ve tvaru

$$v(x) = \frac{1}{M} \sum_{k=-M/2}^{M/2-1} s_k f_k(x), \quad (2)$$

kde

$$f_k(x) = \cos \frac{2\pi kx}{Mh_x} - i \sin \frac{2\pi kx}{Mh_x} = \exp\left(-\frac{2\pi i kx}{Mh_x}\right), \quad (3)$$

$$k = -M/2, \dots, M/2 - 1,$$

je  $M$  komplexních goniometrických funkcí s největšími možnými periodami,  $f_0 \equiv 1$  a  $s_k$  jsou koeficienty interpolace, které mohou obecně být komplexní i pro reálná data  $V$ .

Snadno se odvodí (viz např. [8]), že

$$s_k = \sum_{j=0}^{M-1} v_j \exp \frac{2\pi i j k}{M}, \quad k = -M/2, \dots, M/2 - 1, \quad (4)$$

a že s těmito koeficienty bude vzorec (2) skutečně interpolovat data  $V$ , tj. že

$$v_j = \frac{1}{M} \sum_{k=-M/2}^{M/2-1} s_k \exp\left(-\frac{2\pi i j k}{M}\right), \quad j = 0, 1, \dots, M - 1. \quad (5)$$

Ze vzorců (4) a (5) dostaneme, že data  $V$  jsou reálná (tj.  $v_j = \bar{v}_j$ ), právě když platí

$$s_k = \bar{s}_{-k}. \quad (6)$$

Protože z vlastností exponenciály ryze imaginárního argumentu plyne  $s_{k+M} = s_k$  a

$$\exp\left(-\frac{2\pi i j(k+M)}{M}\right) = \exp\left(-\frac{2\pi i j k}{M}\right),$$

lze po posunutí sčítacího indexu psát interpolaci (5) ve tvaru

$$v_j = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} s_k \exp\left(-\frac{2\pi i j k}{M}\right), \quad j = 0, 1, \dots, M - 1. \quad (7)$$

Nekonečnou periodickou posloupnost komplexních čísel  $S = [s_k]$  s periodou  $M$  nazveme *Fourierovo spektrum* dat  $V$ . Vztah

$$s_k = \sum_{j=0}^{M-1} v_j \exp \frac{2\pi i j k}{M}, \quad k = 0, 1, \dots, M - 1, \quad (8)$$

který plyne ze (4) a převádí data  $V$  na spektrum  $S$ , se nazývá *diskrétní Fourierova transformace*. Vztah (7), který převádí spektrum  $S$  na data  $V$ , se nazývá *inverzní diskrétní Fourierova transformace*. Diskrétní Fourierova transformace je určitou analogií spojitě Fourierovy transformace.

Připomeňme, že diskrétní Fourierova transformace, která převádí data  $V$  na spektrum  $S$ , je dána vzorcem (8), zatímco inverzní diskrétní Fourierovu transformaci, která zobrazuje spektrum  $S$  na data  $V$ , představuje vzorec (7). Pro vzájemné vztahy mezi daty a spektrem stačí uvažovat jen reprezentaci periodických posloupností  $V$  a  $S$  pomocí jejich  $M$  prvků.

Označme  $w = \exp(2\pi i/M)$  ryze imaginární číslo ( $M$ -tou primitivní odmocninou z 1) a  $E = [e_{jk}]$ , kde  $e_{jk} = e_{kj} = \exp(2\pi ijk/M) = w^{jk}$ , symetrickou čtvercovou maticí řádu  $M$ . Výpočtem se snadno ověří, že matice  $E^{-1}$  inverzní k  $E$  má prvky  $\exp(-2\pi ijk/M)/M = w^{-jk}/M$ .

Pomocí tohoto označení můžeme vztahy (8) a (7) přepsat jako násobení vektoru maticí,

$$S = EV, \quad V = E^{-1}S.$$

Známe-li prvky matice  $E$ , potřebujeme pro výpočet jednoho takového násobení vektoru maticí, tj. pro výpočet spektra z dat nebo obráceně, řádově  $M^2$  operací sčítání a násobení.

Vzorce (8) a (7) přepíšme jako

$$s_k = \sum_{j=0}^{M-1} w^{jk} v_j, \quad k = 0, 1, \dots, M-1,$$

$$v_j = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} w^{-jk} s_k, \quad j = 0, 1, \dots, M-1.$$

Přejdeme-li v posledním vztahu k číslům komplexně sdruženým, dostaneme

$$\bar{v}_j = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} w^{jk} \bar{s}_k, \quad j = 0, 1, \dots, M-1.$$

Najdeme-li tedy výhodný algoritmus pro výpočet diskrétní transformace, můžeme počítat inverzní diskrétní transformaci stejným algoritmem. Do algoritmu vložíme čísla komplexně sdružená k prvkům spektra a jako výsledek dostaneme, po vydělení  $M$ , čísla komplexně sdružená k prvkům dat.

## Rychlá Fourierova transformace

Algoritmus pro výpočet diskrétní Fourierovy transformace, který potřebuje řádově méně operací než  $M^2$ , je založen na následujícím tvrzení.

**Danielsonovo-Lanczosovo lemma.** *Budiž  $M$  sudé. Pak*

$$s_k = s_k^0 + w^k s_k^1, \quad k = 0, 1, \dots, M-1, \quad (9)$$

kde

$$s_k^0 = \sum_{j=0}^{M/2-1} v_{2j} \exp \frac{2\pi ijk}{M/2},$$

$$s_k^1 = \sum_{j=0}^{M/2-1} v_{2j+1} \exp \frac{2\pi ijk}{M/2}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1.$$

Tvrzení lemmatu umožňuje převést výpočet diskrétní Fourierovy transformace vektoru  $V$  o  $M$  složkách (transformaci *délky*  $M$ ) na výpočet transformace vektoru o  $M/2$  složkách  $v_{2j}$  se sudými indexy a transformace vektoru o  $M/2$  složkách  $v_{2j+1}$  s lichými indexy. Nulu pro tento účel považujeme za sudé číslo. Po výpočtu těchto dvou transformací délky  $M/2$  se složka  $s_k$  požadovaného výsledku  $S$  o  $M$  složkách dostane jako lineární kombinace vhodných složek  $s_k^0$  a  $s_k^1$ .

Je-li číslo  $M/2$  sudé (tj.  $M$  je dělitelné čtyřmi), můžeme obě transformace délky  $M/2$  stejným způsobem rozdělit opět na dvě transformace délky  $M/4$ . Takové transformace délky  $M/4$  budeme teď počítat 4 a jejich výsledky budeme postupně lineárně kombinovat, abychom nakonec dostali vektor  $S$ .

Budeme-li předpokládat, že číslo  $M$  je mocnina 2, tj.  $M = 2^r$ ,  $r > 1$ , můžeme v dělení složek vstupního vektoru  $V$ , zkracování délek transformací a zvyšování počtu těchto „krátkých“ transformací pokračovat. Po  $r$  krocích dospějeme k  $M$  transformacím délky 1. Podle vzorce (8), kde položíme  $M = 1$ , zjistíme, že transformace délky 1 jediné vstupní hodnoty je právě tato hodnota. Známe tedy výsledky všech transformací délky 1 a budeme vzorce Danielsonova-Lanczosova lemmatu používat ke „zpětnému chodu“, abychom postupným lineárním kombinováním výsledků kroků  $r, r-1, \dots, 1$  dostali vektor  $S$ .

Pro  $M = 2^3 = 8$  je algoritmus znázorněn na obr. 4 pomocí *signálového grafu*. Kroužky znázorňují vstupní data, mezivýsledky a výstupní data, šipky vyjadřují sčítání jednotlivých hodnot vynásobených koeficienty, které jsou u šipek připsány, a  $-1$  znamená změnu znamení hodnoty, která vstupuje do součtu (a jde tedy o rozdíl).

Protože postupně systematicky dělíme vstupní data  $v_j$  podle dělitelnosti indexu  $j$  mocninami dvou, je třeba před začátkem celého výpočtu (tj. před začátkem počítání transformací délky 1) data přeskupit způsobem, který se nazývá *bitová reverze* a je vidět i na obr. 4 vlevo.

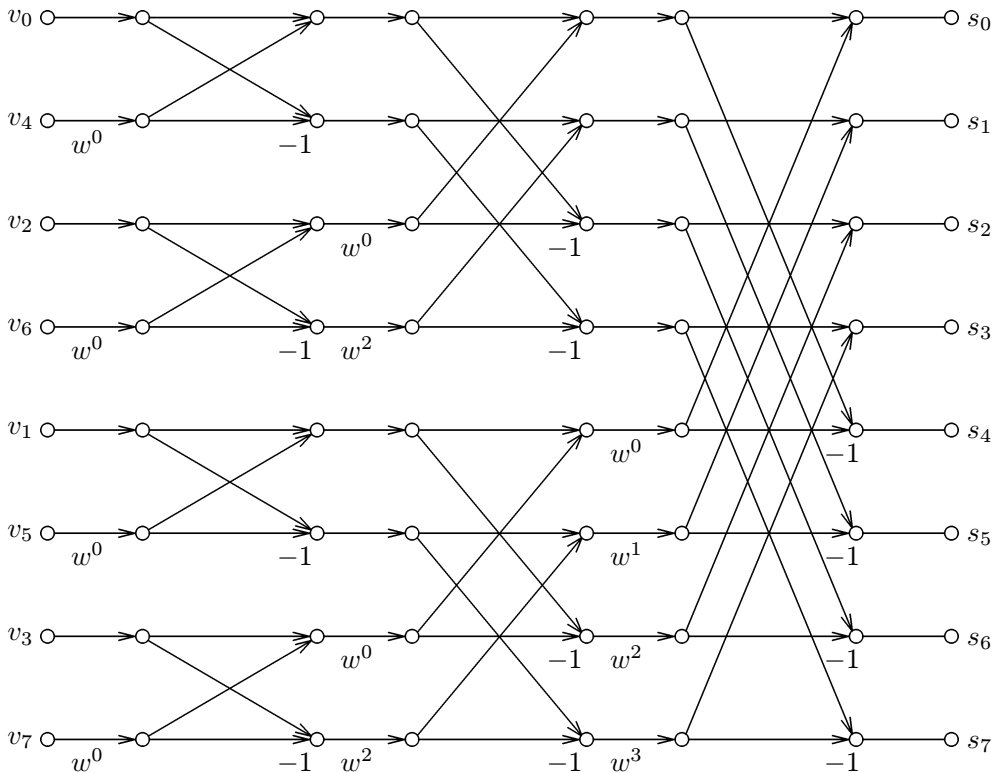
Algoritmus byl poprvé publikován v práci [3], nazývá se *rychlá Fourierova transformace* a řadí se mezi nejvýznamnějších 10 algoritmů dvacátého století [4]. Základním „stavebním kamenem“ algoritmu je vzorec pro lineární kombinování v Danielsonově-Lanczosově lemmatu, který má v prvním kroku podobu (9), tj.

$$s_k = s_k^0 + w^k s_k^1,$$

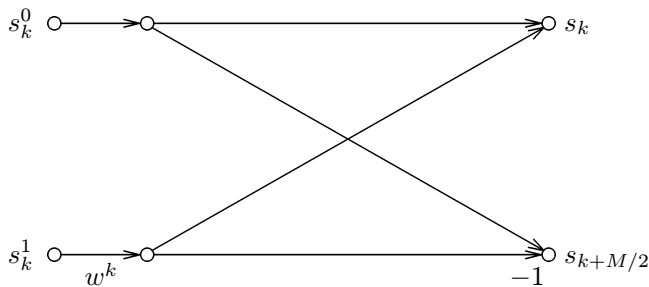
$$s_{k+M/2} = s_k^0 - w^k s_k^1, \quad k = 0, 1, \dots, M/2 - 1,$$

kde jsme užili vzorec  $w^{k+M/2} = -w^k$ . Celé toto schéma se nazývá *motýlek* a je znázorněno na obr. 5. Je vidět, že celý signálový graf rychlé Fourierovy transformace na obr. 4 se skládá ze 3 sloupců motýlků (obecně  $r$  sloupců) a v každém sloupci je  $M/2$  motýlků.





Obr. 4. Signálový graf rychlé Fourierovy transformace pro  $M = 8$ .



Obr. 5. Motýlek.

Ze signálového grafu se už snadno dá určit počet aritmetických operací potřebných pro výpočet rychlé Fourierovy transformace vektoru  $V$  o  $M = 2^r$  složkách. Protože  $r = \log_2 M$ , je řádový počet operací roven  $M \log_2 M$ , což je (řádově) podstatně méně než  $M^2$ , tj. počet operací potřebných pro výpočet transformace z definice (8) násobením vektoru maticí. Existuje řada variant rychlé Fourierovy transformace s počtem operací mírně odlišným, avšak řádově je to vždy  $M \log_2 M$ .

## Spektrální filtr

Umíme-li rychle (a tedy i levně) spočítat spektrum dat a také obráceně data ze spektra, můžeme se zajímat o to, jak se ve spektru projeví prostorová nebo časová filtrace dat, která je popsána konvolucí (1). Označme  $\mathcal{F}$  diskrétní Fourierovu transformaci (8) a  $\mathcal{F}^{-1}$  její inverzi (7). Dodefinujeme posloupnost  $P$  nulovými prvky pro indexy  $q = -M/2, \dots, -Q - 1$  a  $q = Q + 1, \dots, M/2 - 1$  tak, aby počet jejích prvků byl  $M$ . Ve vzorci (1) pro konvoluci můžeme změnit meze součtu na  $-M/2$  a  $M/2 - 1$ , aniž by se změnila hodnota výsledku. Při výpočtu  $\mathcal{F}(P)$  postupujeme způsobem, který jsme popsali pro výpočet  $\mathcal{F}(V)$ .

Pak můžeme vyslovit větu, která se dá dokázat pro Fourierovu transformaci všeobecně, nejen pro transformaci diskrétní.

**Věta o konvoluci.** *Pro posloupnosti  $V$  a  $P$  platí*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(V * P) &= \mathcal{F}(V) \cdot \mathcal{F}(P), \\ \widehat{V} &= V * P = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(V) \cdot \mathcal{F}(P)).\end{aligned}$$

Zavedli jsme označení pro součin  $C = A \cdot B$  vektorů  $A$  a  $B$  *po složkách*, kde klademe  $c_n = a_n b_n$  pro všechny indexy  $n$ .

Jsou-li tedy  $V$  data, je  $S = \mathcal{F}(V)$  jejich spektrum, a je-li  $P$  prostorový filtr, je  $T = \mathcal{F}(P)$  jeho spektrum, které nazveme *spektrální filtr*. Pak  $\widehat{S} = \mathcal{F}(V) \cdot \mathcal{F}(P)$  je *filtrované spektrum dat* a  $\widehat{V} = V * P = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(V) \cdot \mathcal{F}(P))$  jsou filtrovaná data.

Filtr můžeme zadat přímo jako spektrální, tj. zadat  $T = \mathcal{F}(P)$ , protože má názorný geometrický smysl. Za reprezentaci nekonečné periodické posloupnosti  $S$  spektra dat můžeme zvolit její konečnou část o  $M$  prvcích  $s_k$ ,  $k = -M/2, \dots, M/2 - 1$ . Podle (6) budou data  $V$  reálná, právě když  $s_k = \bar{s}_{-k}$ . Pro konstrukci spektrálních 1D filtrů aplikovaných na reálná data je užitečná představa rozvoje dat podle reálných bázevých funkcí, které z rozvoje podle funkcí (3) dostaneme jednoduchou transformací. Snadno se spočte (srov. [2]), že

$$\begin{aligned}g_k(x) &= s_k f_k(x) + s_{-k} f_{-k}(x) \\ &= s_k \exp\left(-\frac{2\pi i k x}{M h_x}\right) + s_{-k} \exp\frac{2\pi i k x}{M h_x} = 2|s_k| \cos\left(\frac{2\pi k x}{M h_x} + \arg s_k\right),\end{aligned}$$

kde  $\arg c$  je argument komplexního čísla  $c$ . Můžeme si tak představit, že pro interpolaci reálných dat používáme reálné bázevých funkce, které jsou typu kosinus. Funkce  $g_k(x)$  pak představují reálné součty párů sčítanců ve vzorci pro interpolaci. Závisejí na  $|s_k|$  a argument kosinu závisí, kromě  $k$  a  $x$ , též na fázovém posunu  $\arg s_k$  v počátku.

Při této volbě reprezentace nekonečné periodické posloupnosti leží interpolační koeficienty  $s_k$  funkcí  $f_k$  o nejnižších frekvencích ve vyjádření (2) poblíž „prostředního“ koeficientu  $s_0$ , který odpovídá funkci  $f_0 \equiv 1$ . Horní propust tedy můžeme ve spektru realizovat tak, že zvolíme přirozené číslo  $n < M/2$  (na jeho velikosti bude záviset „síla“ filtru; filtr je tím silnější, čím více modifikuje data), položíme složky  $t_{-n}, \dots, t_n$  spektrálního filtru  $T$  rovny 0 a ostatní složky rovny 1. Po vynásobení  $\widehat{S} = T \cdot S$  po složkách „odstraníme“ ze spektra  $S$  všechny koeficienty  $s_k$ ,  $|k| \leq n$ , a ve filtrovaném

spektru tedy bude  $\hat{s}_k = 0$ ,  $|k| \leq n$ . Pak bude následovat výpočet  $\hat{V} = \mathcal{F}^{-1}(\hat{S})$ , tj. filtrovaných dat. Podobně se sestrojí i dolní nebo pásmová propust. Podmínka (6) zůstane ve filtrovaném spektru zachována a filtrovaná data budou reálná.

Některé praktické poznámky ke spektrální filtraci (volba  $M$  jako mocniny 2, ohlazení vstupních dat, ohlazení filtru) uvedeme dále pro dvojrozměrný případ. Týkájí se však i jednorozměrného případu.

#### 4. Lineární filtrace 2D dat

##### Prostorový filtr

Reálná 2D data měřená v ekvidistantní obdélníkové síti (tvořené ekvidistantními body na ekvidistantních rovnoběžných profilech) uložíme do obdélníkové matice  $V = [v_{jl}]$ ,  $j = 0, 1, \dots, M-1$ ,  $l = 0, 1, \dots, N-1$ . Podobně zapíšeme prostorový filtr jako obdélníkovou matici  $P = [p_{qr}]$ ,  $q = -Q, \dots, Q$ ,  $r = -R, \dots, R$ . Stejně jako v jednorozměrném případě dodefinujeme data  $V$  periodicky s periodou  $M$  v prvním indexu a s periodou  $N$  v druhém indexu, tj. položíme  $v_{j+M, l+N} = v_{jl}$ . Získáme tak nekonečnou periodickou matici dat, kterou budeme opět značit  $V$ . Při praktické filtraci je třeba, stejně jako v jednorozměrném případě, postupovat poněkud složitějším způsobem, který ukážeme později.

Diskrétní konvoluci  $\hat{V} = V * P$  matic  $V$  a  $P$  zavedeme analogicky k (1) vztahem

$$\hat{v}_{jl} = \sum_{q=-Q}^Q \sum_{r=-R}^R v_{j-q, l-r} p_{qr}.$$

Matice  $\hat{V}$  filtrovaných dat je nekonečná periodická matice, tj.  $\hat{v}_{j+M, l+N} = \hat{v}_{jl}$ . Budeme ji reprezentovat pomocí jejích  $MN$  prvků  $\hat{v}_{jl}$ ,  $j = 0, 1, \dots, M-1$ ,  $l = 0, 1, \dots, N-1$ .

Příklady prostorových frekvenčních filtrů mohou být horní propust

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & 1 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

nebo dolní propust

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

Při zpracování dvojrozměrných dat máme navíc možnost jejich *směrové filtrace*, která pro jednorozměrná data neexistuje. Prostorový směrový filtr v datech potlačuje nebo zvýrazňuje zvolené směry (linie) prostřednictvím výpočtu gradientu diskrétních dat, jak uvidíme níže.

## Diskrétní Fourierova transformace

Označme  $h_x$  vzdálenost bodů na profilu a  $h_y$  vzdálenost mezi profily měření. Analogicky k (2) teď budeme interpolovat 2D data pomocí  $MN$  goniometrických funkcí dvou proměnných

$$f_{km}(x, y) = \exp\left(-\frac{2\pi i k x}{M h_x}\right) \exp\left(-\frac{2\pi i m y}{N h_y}\right) = \exp\left(-\frac{2\pi i k x}{M h_x} - \frac{2\pi i m y}{N h_y}\right), \quad (10)$$

$$k = -M/2, \dots, M/2 - 1, \quad m = -N/2, \dots, N/2 - 1,$$

kteří mají největší možné periody v  $x$  i  $y$ . Ukáže se, že koeficienty trigonometrického interpolačního vzorce jsou prvky dvojrozměrné diskretní Fourierovy transformace  $S$  dat  $V$ . Analogii vzorců (8) a (7) bude diskretní Fourierova transformace

$$s_{km} = \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} v_{jl} \exp\left(\frac{2\pi i j k}{M}\right) \exp\left(\frac{2\pi i l m}{N}\right), \quad k = 0, 1, \dots, M-1, \quad m = 0, 1, \dots, N-1,$$

a inverzní diskretní Fourierova transformace

$$v_{jl} = \frac{1}{MN} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{N-1} s_{km} \exp\left(-\frac{2\pi i j k}{M}\right) \exp\left(-\frac{2\pi i l m}{N}\right),$$

$$j = 0, 1, \dots, M-1, \quad l = 0, 1, \dots, N-1.$$

Rychlá Fourierova transformace se dá zobecnit pro výpočet dvojrozměrné diskretní transformace. Za předpokladu, že  $M$  i  $N$  jsou mocniny 2, bude počet operací rychlé transformace řádově roven  $MN \log_2 MN$ .

## Spektrální filtr

Zavedeme-li součin  $C = A \cdot B$  matic  $A$  a  $B$  po složkách analogicky, jako jsme to udělali pro vektory, tj. položíme-li  $c_{np} = a_{np} b_{np}$  pro všechny indexy  $n$  i  $p$ , snadno se dokáže platnost věty o konvoluci. Můžeme tedy i pro 2D data převést prostorovou filtraci na filtraci spektrální.

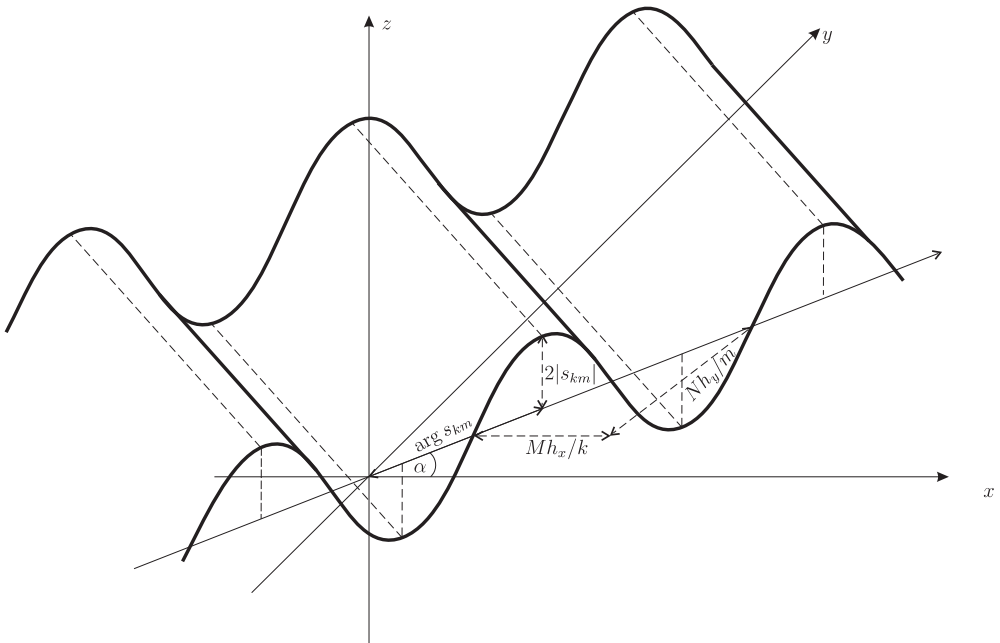
Spektrální frekvenční filtrace bude ve 2D přímým zobecněním jednodimenzionálního případu. Data  $V$  jsou uspořádána do matice o  $M$  řádcích a  $N$  sloupcích a za reprezentaci nekonečné, po řádcích i po sloupcích periodické matice spektra  $S$  vezmeme její konečnou část  $s_{km}$ ,  $k = -M/2, \dots, M/2 - 1$ ,  $m = -N/2, \dots, N/2 - 1$ . Dosáhneme tak toho, co jsme požadovali už u 1D frekvenční filtrace, tj. aby (přibližně) prostřední prvek matice  $S$  byl koeficient  $s_{00}$  u funkce  $f_{00} \equiv 1$ .

Podobně jako v jednorozměrném případě dodefinujeme matici  $P$  prostorového filtru nulovými prvky tak, aby byla typu  $(M, N)$ . Frekvenční filtr můžeme zadat přímo jako spektrální, tj.  $T = \mathcal{F}(P)$ . Při filtraci musíme mít na zřeteli, že analogicky ke vzorci (6) budou data  $V$  reálná, právě když  $s_{km} = \bar{s}_{-k, -m}$ . Pro konstrukci spektrálních 2D filtrů aplikovaných na reálná data je užitečná představa rozvoje dat podle reálných bázevých

funkcí, které z rozvoje podle funkcí (10) dostaneme jednoduchou transformací. Snadno se vypočte, že

$$\begin{aligned} g_{km}(x, y) &= s_{km}f_{km}(x, y) + s_{-k, -m}f_{-k, -m}(x, y) \\ &= s_{km} \exp\left(-\frac{2\pi i k x}{M h_x} - \frac{2\pi i m y}{N h_y}\right) + s_{-k, -m} \exp\left(\frac{2\pi i k x}{M h_x} + \frac{2\pi i m y}{N h_y}\right) \\ &= 2|s_{km}| \cos\left(\frac{2\pi k x}{M h_x} + \frac{2\pi m y}{N h_y} + \arg s_{km}\right). \end{aligned}$$

Můžeme tak pro interpolaci 2D reálných dat použít reálné báze funkce, které jsou typu kosinus. Funkce  $g_{km}(x, y)$  pak představují reálné součty párů sčítanců ve vzorci pro interpolaci. Závisí na  $|s_{km}|$  a argument kosinu závisí, kromě  $k, m, x, y$ , též na  $\arg s_{km}$ .

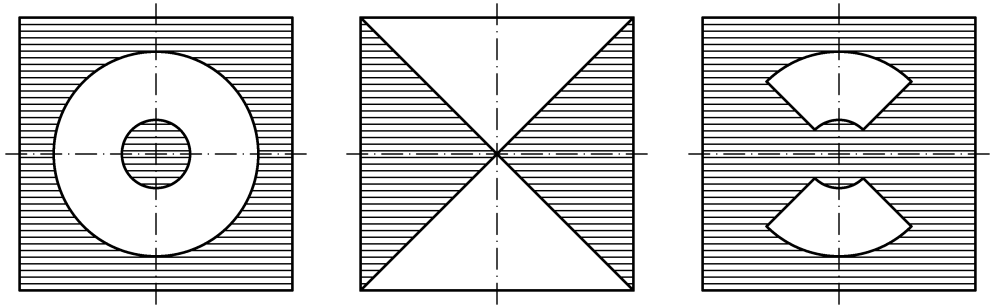


Obr. 6. Vlnitý plech [Kresba: Hana Bílková].

Jednotlivé funkce  $g_{km}$  se pro pevné  $k$  a  $m$  dají zobrazit jako „vlnité plechy“ (netlumené kosinové vlny) definované v celé rovině  $xy$ . Jejich amplituda je  $2|s_{km}|$ , jejich fázový posun v počátku je  $\arg s_{km}$  a povrchové přímky systému vlnitých plechů jsou kolmé k přímce procházející počátkem, která svírá s kladnou osou  $x$  úhel  $\alpha$  o tangente  $(N h_y / m) / (M h_x / k)$ . Tuto přímku nazveme *směrem vlnitého plechu* (obr. 6). Určitému vlnitému plechu odpovídají ve spektru koeficienty  $s_{km}$  a  $s_{-k, -m}$ , jež leží symetricky vzhledem ke středu spektra, koeficientu  $s_{00}$ . Položíme-li tedy  $t_{km} = t_{-k, -m} = 0$  ve spektru  $T$  filtru  $P$ , dostaneme  $\hat{s}_{km} = \hat{s}_{-k, -m} = 0$  ve filtrovaném spektru a po inverzní diskrétní Fourierově transformaci nebudou filtrovaná data obsahovat složku, která odpovídá směru vlnitého plechu určeného indexy  $k$  a  $m$ . Ve spektrálním *směrovém*

filtru  $T$ , který má potlačit určitý směr v datech, obvykle klademe  $t_{np} = t_{-n,-p} = 0$  pro dvojice indexů  $n$  a  $p$ , které představují směry vlnitých plechů v určitém rozmezí úhlů (výseči). Jak se snadno ukáže, osa této výseče musí být kolmá ke směru, který chceme v datech odstranit.

V praxi je obvyklé, že vzdálenost profilů  $h_y$  je několikrát větší než vzdálenost  $h_x$  uzlů na profilu. Pak lze diskretní Fourierovu transformaci použít pro „vlození nových profilů“ mezi stávající. Ve spektru  $S$  dat tuto operaci provedeme zvětšením rozměru spektra, tj. přidáme ke spektru vysoké frekvence, ale s nulovými koeficienty  $s_{km} = s_{-k,-m}$ . Po inverzní diskretní Fourierově transformaci dostaneme data  $\hat{V}$  interpolovaná mezi profily, jejichž spektrum se neliší od spektra původních dat  $V$ .



Obr. 7. Spektrální filtry: frekvenční, směrový a kombinovaný.

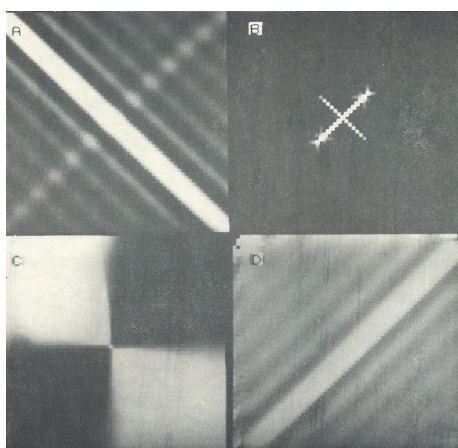
Pro jednoduchost budeme dále předpokládat, že data  $V$  jsou měřena ve čtvercové ekvidistantní síti, tj.  $h_x = h_y$ . Pokud znázorňujeme spektrum dat nebo spektrum filtru, což obecně mohou být komplexní hodnoty  $s_{km}$  nebo  $t_{km}$ , je na obrázku *amplitudové spektrum*, tj. reálné nezáporné hodnoty  $|s_{km}|$  nebo  $|t_{km}|$ . Schematické ukázky spektrálních filtrů  $T$  jsou na obr. 7 (bílá barva znamená jedničky, černá nuly). Spektrální filtr na obrázku vlevo je frekvenční, odstraní z dat velkou část nejvyšších frekvencí a současně velkou část nejnižších frekvencí, zbylou část, střední frekvence, propustí. Je to tedy pásmová propust. Spektrální filtr uprostřed je směrový, odstraní data, která odpovídají přibližně svislému směru, a ponechá data, která odpovídají přibližně vodorovnému směru. Filtr na obrázku vpravo je kombinovaný, jeho účinek odpovídá aplikaci obou předchozích filtrů po sobě. Je to tedy pásmová propust kombinovaná se směrovým filtrem, který propouští vodorovný směr.

## 5. Jednoduché příklady

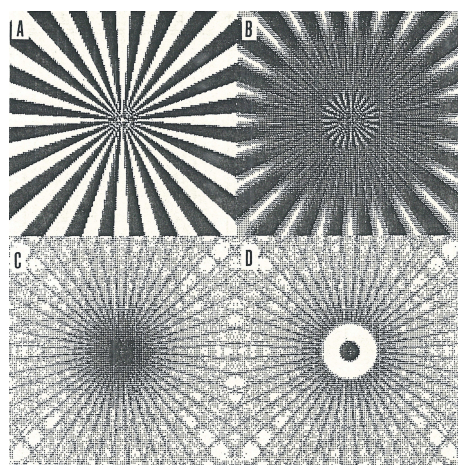
Při praktické filtraci se v 1D i 2D používá několik technických triků, které zaručují, že se vyhneme jevu, zvanému *okrajový efekt*. Velmi zjednodušeně řečeno, jde o účinek, který je v diskretních datech analogický aliasingu při zpracování spojitých dat diskretními prostředky (podrobně viz např. [2]). Zabráníme rozkmitání spektra vlivem konečnosti dat a jejich periodizace a zabráníme rozkmitání filtrovaných dat, způsobenému tím, že do nich filtr s ostrými přechody (jen jedničky nebo nuly) zanesse vysoké frekvence.

První operace (srov. [1]) tedy je odečtení průměru od všech prvků dat (to je vlastně slabá horní propust) a doplnění dat vhodnými hodnotami z obou stran na počet  $M'$  (nebo ve 2D řádky a sloupce vhodných hodnot na počet  $M' \times N'$ ), přičemž  $M'$  i  $N'$  jsou přirozené mocniny 2. Postupujeme přitom tak, že položíme krajní hodnoty (nebo krajní řádky a sloupce) doplněných dat rovny nule. Potom provedeme *ohlazení* dat, tj. hladkou extrapolaci dat na původních krajních profilů k nule na novém kraji profilů a hladkou extrapolaci původních krajních profilů také k nule na nových krajních profilech.

Pak aplikujeme diskrétní Fourierovu transformaci na  $M'$  hodnot ohlazených dat (nebo dvojrozměrnou transformaci na  $M' \times N'$  hodnot ohlazených dat). Získané spektrum vynásobíme po složkách spektrem filtru, ve kterém jsme napřed ohladili přechody mezi jedničkami a nulami, a pak použijeme inverzní diskrétní Fourierovu transformaci, abychom dostali filtrovaná data.



Obr. 8. Odstranění jednoho systému vlnk typu sinc z dat.



Obr. 9. Odstranění pásma frekvencí z dat.

Na obr. 8A jsou data, spočtená jako součet dvou funkcí typu  $\text{sinc } x = \sin x/x$ , tj. tlumených sinových vln, jejichž povrchové přímky jsou navzájem kolmé a jejichž amplitudy jsou v poměru 10 : 1, bílá barva odpovídá vysokým hodnotám, tmavá nízkým. Na obr. 8B je spektrum dat. Systému vln s větší amplitudou odpovídá ve spektru protáhlé maximum kolmé na směr povrchových přímek tohoto systému v datech. Smyslem zpracování je odstranit systém vln s větší amplitudou. Vhodný spektrální směrový filtr je na obr. 8C (je patrné, že mezi černou a bílou částí filtru je šedý přechod, který odpovídá ohlazení filtru), zatímco filtrovaná data na obr. 8D skutečně představují jen systém vln s nižší amplitudou, který je v původních datech na obr. 8A špatně viditelný.

Další příklad vychází z dat na obr. 9A (tzv. Siemensova růžice, používaná k testování optických zařízení). Její spektrum je na obr. 9C. Jako spektrální frekvenční filtr byl použit komplement pásmové propusti, tj. pásmová zádrž. Filtrované spektrum je na

obr. 9D, bílá tentokrát značí nulové hodnoty v amplitudovém spektru. Ve filtrovaných datech na obr. 9B je patrný účinek zádrže: střed a okraje obrázku (nízké a vysoké frekvence) zůstaly zachovány, zatímco data v mezikruží, jež odpovídá středním frekvencím, jsou znehodnocena, tyto frekvence byly odstraněny.

## 6. Dostupný software

Přehled o dostupném softwaru pro filtraci dvojrozměrných dat (stejně jako o softwaru pro řešení jiných úloh) lze najít v kategorii softwaru pro zpracování obrazů na stránce [www.nist.gov](http://www.nist.gov), kterou provozuje National Institute for Standards and Technology ve Spojených státech. Stránka obsahuje odkazy na software, jenž je bezplatně k dispozici, i komerční software.

Z běžných programových systémů můžeme jmenovat třeba Microsoft Photo Editor nebo Adobe Photoshop, ale určité další možnosti jsou i přímou součástí novějších verzí systému Windows Internet Explorer nebo Matlab. Málokdo by asi čekal, že subroutine pro rychlou Fourierovu transformaci je ukryta i v programu Microsoft Excel, kde je možno ji použít pro Fourierovu analýzu periodických jednorozměrných dat.

Programy pro zpracování obrazů jsou schopny celé řady různých úprav, které se většinou provádějí prostorovými filtry (tj. ne ve spektru). Některé úpravy pak jsou založeny na matematických principech složitějších než lineární filtrace. To je třeba případ zaostření rozmazaných dat (deblurring, sharpening). Nejlepší způsob, jak se s funkcí takových programů seznámit, je vyzkoušet si je na nějakém „cvičném“ obraze.

Podobné digitální techniky, ať už v prostorové nebo spektrální oblasti, se používají např. při odstranění šumu („odzrnění“) starých filmů na celuloidových nosičích nebo v jedné dimenzi k „odšumění“ zvukových záznamů na gramofonových deskách.

## L i t e r a t u r a

- [1] BEZVODA, V., JEŽEK, J., SEGETH, K.: *FREDPACK – a program package for linear filtering in the frequency domain*. Computers Geosci. 16 (1990), 1123–1154.
- [2] BEZVODA, V., JEŽEK, J., SEGETH, K., SAIC, S.: *Dvojrozměrná diskrétní Fourierova transformace a její použití I. Teorie a obecné užití*. SPN, Praha 1988.
- [3] COOLEY, J. W., TUKEY, J. W.: *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*. Math. Comp. 19 (1965), 297–301.
- [4] DONGARRA, J., SULLIVAN, F.: *The top 10 algorithms*. Computing Sci. Engrg. 2 (2000), 22–23.
- [5] *Encyclopedia of Geomagnetism and Paleomagnetism*. D. Gubbins, E. Herrero-Bervera, eds. Springer, Berlin 2007.
- [6] HAŠEK, V., PETROVÁ, H., SEGETH, K.: *Graphic representation methods in archaeological prospection in Czechoslovakia*. In: Computing the Past. Proc. Conf., Aarhus 1992. Aarhus Univ. Press, Aarhus 1992.
- [7] ULICHNEY, R.: *Digital Halftoning*. MIT Press, Cambridge, MA, 1987.
- [8] VITÁSEK, E.: *Numerické metody*. SNTL, Praha 1987.