Libor Koudela

O prvních spojitých singulárních funkcích

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 56 (2011), No. 1, 44–53

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141985

[4] Datta, B., Singh, A. N.: *History of Hindu Mathematics (Part II)*, Lahore: Molital Banarsidass, 1938.

[5] Dickson, L. E.: *History of the Theory of Numbers. Vol. II Diophantine Analysis*, AMS Chelsea Publishing, 1992.

[6] Juškevič, A. P.: *Dějiny matematiky ve středověku*, Academia Praha, 1978.

[7] Katz, V.: *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2007.

[8] Lenstra, H. W., Jr.: *Solving the Pell equation*, Notices Amer. Math. Soc. 49 (2002), no. 2, 182-192.

[9] O'Connor, J. J., Robertson, E. F.: *Pell's equation*, `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Pell.html`.

[10] Sierpiński, W.: *Teoria liczb*, Warszawa – Wroclaw, 1950.

[11] Srinivasiengar, C. N.: *The History of Ancient Indian Mathematics*, The World Press Private LTD, Calcutta, 1967.

[12] Stillwell, J.: *Mathematics and Its History*, Springer–Verlag New York Inc, 1989.

O prvních spojitých singulárních funkcích

Libor Koudela, Pardubice

Jedním z nejvýznamnějších objevů, kterých bylo v matematice na přelomu 19. a 20. století dosaženo, je Lebesgueova teorie integrálu. Henri Lebesgue (1875 – 1941) ji v ucelené formě poprvé představil ve své doktorské disertační práci *Intégrale, longueur, aire*, která byla publikována roku 1902 v časopise *Annali di Matematica*. Její kostru tvořily výsledky, které byly prezentovány pařížské Akademii v letech 1899 – 1901 a uveřejněny v *Comptes Rendus*. O své teorii doplněné o nové výsledky a řešení přednášel Lebesgue na Collège de France v akademickém roce 1902 – 1903; jeho přednášky byly publikovány roku 1904 pod názvem *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*.

Významnou roli v Lebesgueově teorii hrají tzv. singulární funkce. *Singulární funkcí* se nazývá (viz [8, s. 170]) funkce f definovaná v intervalu $[a,b]$, která není v $[a,b]$ konstantní a pro kterou platí $f'(x) = 0$ skoro všude v $[a,b]$[1]). První spojité singulární funkce byly objeveny dvě desetiletí před publikováním *Leçons*. Jsou spojeny s počátky teorie množin a s myšlenkami, které utvářely moderní analýzu.

[1]) Definice singulární funkce se u různých autorů mohou lišit. Často se navíc požaduje (např. Jarník [7, s. 368]), aby funkce f měla v intervalu $[a,b]$ konečnou variaci.

Cantorova funkce

Práce, ve kterých byly položeny základy teorie množin jako samostatné matematické disciplíny, napsal Georg Cantor (1845 – 1918) převážně na přelomu 70. a 80. let 19. století. Jedním z hlavních prostředků, které Cantorovi umožnily klasifikovat nekonečné bodové množiny, byl pojem mohutnosti. Dvě množiny mají stejnou mohutnost (jsou ekvivalentní), jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení jedné na druhou. Cantor dokázal, že mohutnosti množin $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$ se liší. Vyslovil také hypotézu, že každá nekonečná množina v $\mathbb{R}$ je ekvivalentní buď $\mathbb{N}$, nebo $\mathbb{R}$, tedy je buď spočetná, nebo má mohutnost kontinua. Dílčím krokem při snaze dokázat toto tvrzení byla konstrukce vzájemně jednoznačného zobrazení mezi dokonalou řídkou[2]) množinou $S \subset [0,1]$ a intervalem $[0,1]$.

Podle Cantora lze doplněk množiny S vzhledem k intervalu $[0,1]$ vyjádřit jako sjednocení disjunktních intervalů (a_1,b_1), $(a_2,b_2),\ldots$ s koncovými body patřícími do S, tedy

$$[0,1] \setminus S = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n). \tag{1}$$

Množina S je tvořena body a_n, b_n a množinou G hromadných bodů množiny $\{a_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$. Vezmeme-li nějakou spočetnou hustou podmnožinu D intervalu $(0,1)$ (např. všechny racionální body ležící v tomto intervalu), pak lze prvky této množiny jednoznačně přiřadit intervalům (a_n,b_n) tak, aby bylo zachováno uspořádání, jinými slovy očíslovat prvky množiny D tak, aby prvkům d_n, $d_m \in D$, $d_n < d_m$ odpovídaly intervaly (a_n,b_n), (a_m,b_m), pro jejichž koncové body platí $a_n < a_m$, $b_n < b_m$.

Jsou-li (a_{n_1},b_{n_1}), $(a_{n_2},b_{n_2}),\ldots$ intervaly, jejichž koncové body tvoří posloupnosti konvergující k bodu $g \in G \subset S$, pak odpovídající posloupnost $d_{n_1}, d_{n_2},\ldots$ konverguje k bodu $h \in [0,1] \setminus D$, který je jednoznačně přiřazen bodu g. Obráceně, každému bodu $h \in [0,1]$, který není prvkem D, je jednoznačně přiřazen bod $g \in S$, který není totožný s žádným z bodů a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$. Množiny G a $H = [0,1] \setminus D$ mají tedy stejnou mohutnost.

Cantor se těmito úvahami zabýval ve čtvrtém dílu série *Über unedliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, který vyšel roku 1883 v *Mathematische Annalen* a jehož francouzský překlad se objevil pouze s malým zpožděním ve druhém svazku *Acta Mathematica*. Revidovanou verzi důkazu uvedl Cantor v dopise Mittag-Lefflerovi, jehož podstatná část byla uveřejněna ve čtvrtém svazku *Acta Mathematica*. Cantor zde uvádí [1, s. 387]:

[2]) Dokonalou množinu definuje Cantor jako množinu, která je rovna své derivaci (množině všech svých hromadných bodů). Dokonalost je jednou z vlastností, pomocí kterých Cantor charakterizoval kontinuum. Hustou množinou v intervalu I nazývá Cantor takovou množinu, jejíž body obsahuje každý interval (α,β) ležící v I. Množina je řídká v I, jestliže není hustá v žádném intervalu ležícím v I. Příkladem dokonalé řídké množiny v intervalu $[0,1]$ je Cantorovo diskontinuum.

Výhodou tohoto důkazu je, že odhaluje rozsáhlou a pozoruhodnou třídu spojitých funkcí reálné proměnné x, jejichž vlastnosti dávají prostor k zajímavým úvahám.

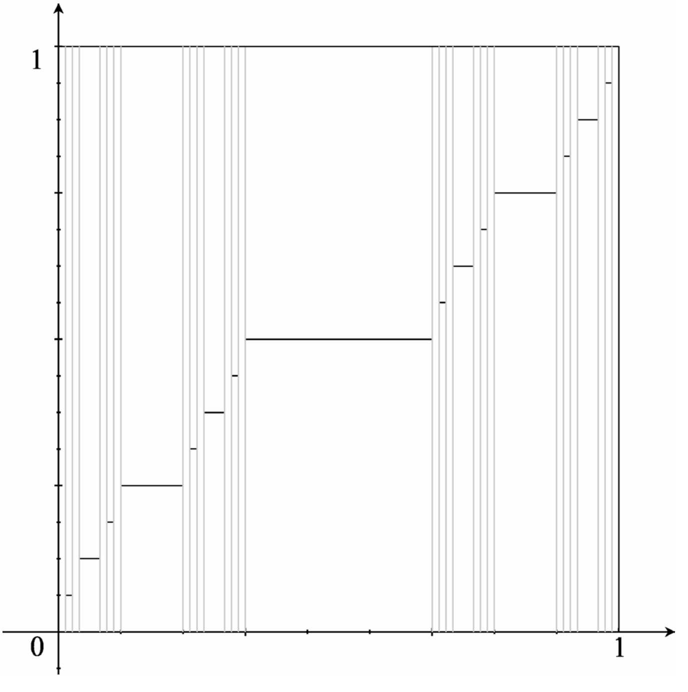
Text pokračuje konstrukcí jedné takové funkce. Je-li x prvkem některého z intervalů (a_n, b_n), je $\psi(x)$ rovno d_n. Platí-li $x = g$, kde g je limitou posloupností koncových bodů intervalů (a_{n_1}, b_{n_1}), ..., (a_{n_k}, b_{n_k}), ..., pak definujeme

$$\psi(x) = h = \lim_{k\to\infty} d_{n_k}.$$

Za množinu S je možné vzít Cantorovo diskontinuum, které Cantor popisuje jako množinu tvořenou všemi čísly, jež lze vyjádřit ve tvaru

$$\frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots + \frac{c_r}{3^r} + \cdots \tag{2}$$

s koeficienty c_r nabývajími pouze hodnot 0 a 2. Cantor navíc poukazuje na to, že (vnější) míra množiny S je rovná nule[3]).



Obr. 1. Znázornění konstrukce grafu Cantorovy funkce, který Mandelbrot nazval „ďáblovým schodištěm“.

[3]) Určení míry (velikosti) bodové množiny bylo důležitou součástí Cantorova výzkumu. Pro množinu S by tato veličina měla hodnotu $1 - \sigma$, kde $\sigma = \sum(b_n - a_n)$ [1, s. 390].

Body, které jsme označili b_n (tedy pravé krajní body styčných intervalů Cantorovy množiny), lze vyjádřit rozvojem (2), v němž jsou čísla c_r od jistého indexu všechna rovna 0. Rozvoj (2) pro body a_n má všechny koeficienty c_r od stejného indexu rovny číslu 2. Protože platí

$$1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \ldots,$$

existuje ke každému n číslo m takové, že

$$a_n = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots + \frac{c_{m-1}}{3^{m-1}} + \frac{1}{3^m},$$
$$b_n = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots + \frac{c_{m-1}}{3^{m-1}} + \frac{2}{3^m}.$$

Každému x vyjádřenému rozvojem (2) přiřadíme

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots + \frac{c_r}{3^r} + \ldots\right). \tag{3}$$

Platí zřejmě $\psi(a_n) = \psi(b_n)$; pro $a_n < x < b_n$ pokládáme $\psi(x) = \psi(a_n) = \psi(b_n)$.

Funkce ψ je spojitá a monotonní a jejím oborem hodnot je interval $[0, 1]$. Její graf je tvořen souborem úseček rovnoběžných s osou x, který je podoben žebříku či schodišti, a jistých vložených bodů, které zajišťují spojitost (obr. 1).

Harnackova funkce

Od doby Newtona do začátku 19. století byla integrace chápána především jako inverzní operace k derivování. Cauchy jako první definoval určitý integrál funkce f v intervalu $[a, b]$ jako limitu, k níž konverguje posloupnost integrálních součtů (výrazů $\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$, odpovídajících rozdělení intervalu $[a, b]$ na n dílů pomocí bodů $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$), když počet dělících intervalů roste nade všechny meze a jejich délky se blíží k nule [12, s. 55 a n.]. Předpokládal přitom spojitost f v intervalu $[a, b]$ a dokázal, že funkce F definovaná předpisem $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ je spojitá v $[a, b]$ a že v tomto intervalu $F'(x) = f(x)$, tj. F je primitivní funkcí k funkci f. Za předpokladu, že derivace f' je spojitá v $[a, b]$, platí $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$.

Hlavní odlišnost Riemannova přístupu spočívala v tom, že Riemann nekladl na integrovanou funkci žádné požadavky a zabýval se otázkou, jaké vlastnosti musí mít funkce, která je v $[a, b]$ integrovatelná. Třída riemannovsky integrovatelných funkcí je širší než třída spojitých funkcí. V souvislosti s tím začala být věnována pozornost otázce, za jakých okolností lze vztahy spojující operace integrace a derivování zobecnit i pro případ nespojitých funkcí. Důležitou úlohu hrál přitom pojem míry. Jedním z prvních, kdo spojili úvahy o integrálu s úvahami o míře bodových množin, byl Axel Harnack (1851 – 1888).

Harnack se narodil a vyrůstal v Dorpatu (dnešní Tartu, Estonsko). Od roku 1873 pobýval v Německu, jeho nejproduktivnější období je spojeno s působením na Technische Hochschule v Drážďanech. Známé jsou především jeho výsledky v algebraické geometrii a analýze. Byl poměrně plodným autorem a přestože jeho práce obsahovaly chyby, přinášely i nové myšlenky.

Mezi základní věty infinitezimálního počtu je někdy (viz např. [6, s. 10]) řazeno tvrzení, podle kterého funkce f spojitá v intervalu $[a, b]$, pro niž v každém bodě $x \in \in (a, b)$ platí $f'(x) = 0$, je v tomto intervalu konstantní. Harnack [3, s. 241] se pokusil zobecnit tuto větu pro případ, že rovnost $f'(x) = 0$ pro určité hodnoty x neplatí. V jeho formulaci byla předpokládána platnost podmínky $f'(x) = 0$ všude v (a, b) s možnou výjimkou „diskrétní“ množiny bodů[4]).

Teorie diskrétních množin a výše uvedená domněnka měly být základem pro zjednodušení a rozšíření teorie trigonometrických řad, které Harnack podal v článku *Vereinfachung der Beweise in der Theorie der Fourier'schen Reihe* z roku 1882.

Cantorova funkce ψ je protipříkladem ukazujícím, že Harnackova domněnka neplatí. Podle Cantora [1, s. 387] si toho jako první povšiml Ludwig Scheeffer. Sám Harnack si význam funkcí Cantorova typu se zpožděním uvědomil. V článku [4] se zabýval prostým zobrazením diskontinua Cantorova typu na kontinuum. Závěrečná poznámka z prosince 1883 naznačovala existenci monotonní nekonstantní spojité funkce definované pro $a \leqq x \leqq b$, která má derivaci rovnou nule ve všech bodech s výjimkou těch, které tvoří „diskrétní systém bez izolovaných bodů“. Harnack v ní sliboval, že brzy uveřejní zevrubnější pojednání o významu těchto funkcí v integrálním počtu.

V článku [5] je popsána geometrická konstrukce stupňovité funkce Cantorova typu. Interval $[0, 1]$ rozdělíme na čtyři stejné díly a sestrojíme vodorovné úsečky $y = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ a $y = 1$, $\frac{3}{4} \leqq x \leqq 1$. Dále sestrojíme šikmé úsečky spojující body $(0, 0)$ a $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, resp. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a $(\frac{3}{4}, 1)$. Tak získáme první aproximaci grafu Harnackovy funkce (viz obr. 2).

Každý z intervalů, nad nimiž se nachází šikmá úsečka, rozdělíme opět na čtyři díly. Sestrojíme vodorovné úsečky $y = \frac{1}{2}$, $\frac{3}{16} \leqq x \leqq \frac{4}{16}$ a $y = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{16} \leqq x \leqq \frac{2}{16}$. Nad intervaly $(0, \frac{1}{16})$ a $(\frac{2}{16}, \frac{3}{16})$ vedeme šikmé spojnice. Analogicky postupujeme v intervalu $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ s vodorovnými čarami ve výšce 1 a $\frac{3}{4}$; tak obdržíme druhou aproximaci Harnackovy funkce.

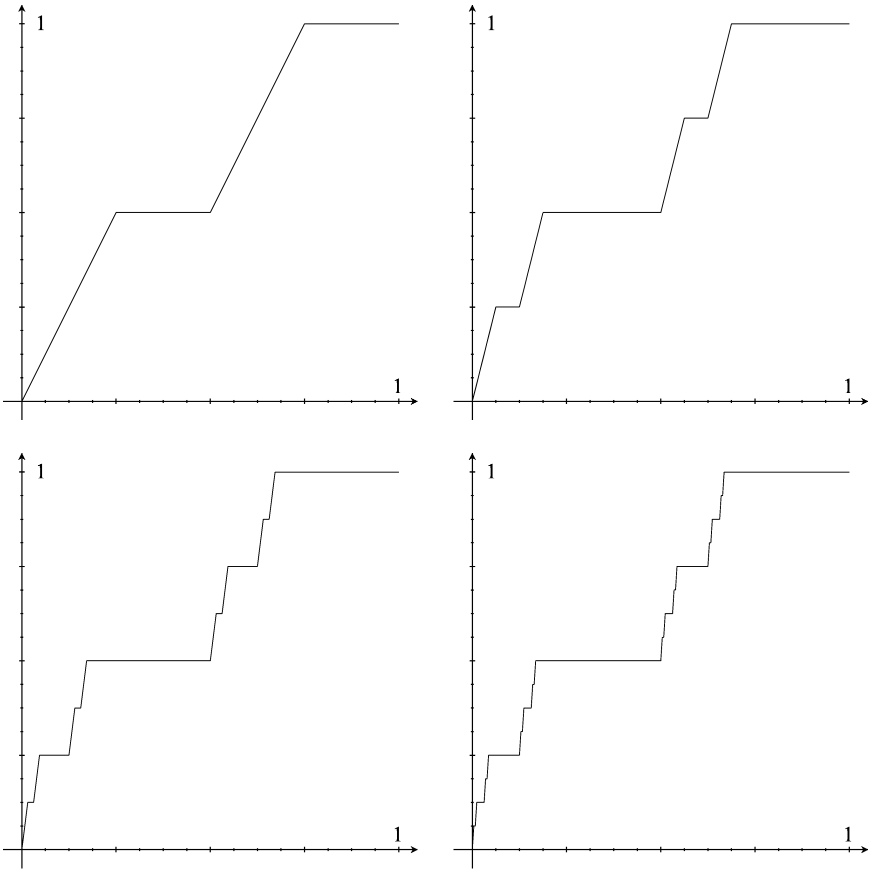
Po n krocích dostaneme funkci, která nabývá všech hodnot tvaru $\frac{a}{2^n}$, kde $a = 1, 2, \ldots, 2^n$. Body, pro které je $f(x) = 1$ a $f(x) = \frac{1}{2}$, tvoří intervaly délky

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n}. \tag{4}$$

Body, pro které je $f(x) = \frac{1}{4}$ a $f(x) = \frac{3}{4}$, tvoří intervaly, z nichž každý má délku

$$\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{4^n}. \tag{5}$$

[4]) Nekonečnou množinu $M \subset [a, b]$ nazývá Harnack [3, s. 238] *diskrétní*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečný systém intervalů, který pokrývá množinu M a má celkovou délku menší než ε. Ostatní nekonečné podmnožiny intervalu $[a, b]$ (tedy množiny nenulové míry) nazýval Harnack *lineární*. Označení „diskrétní“ pro množiny nulové míry souvisí s tím, že v integrálním počtu jim Harnack přikládal stejný význam jako konečným souborům izolovaných bodů [6, s. 59].



Obr. 2. Konstrukce Harnackovy funkce.

Každé funkční hodnotě tvaru $\frac{a}{2^n}$, kde a je liché celé číslo menší než 2^n, odpovídá interval délky $\frac{1}{4^n}$.

Výraz (4) je n-tým částečným součtem řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k}$, která má součet $\frac{1}{3}$. Výraz (5) je n-tým částečným součtem řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{k+1}}$, jejíž součet je $\frac{1}{3 \cdot 4}$. Pro $n \to \infty$ se součet délek všech takových intervalů bude blížit 1, neboť

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{4}{3 \cdot 4^2} + \frac{8}{3 \cdot 4^3} + \frac{16}{3 \cdot 4^4} + \ldots = \frac{2}{3} + \frac{3}{3 \cdot 4} + \frac{3}{3 \cdot 4^2} + \ldots = 1. \qquad (6)$$

Z toho plyne, že všechny body, v nichž funkce nemá hodnotu tvaru $\frac{a}{2^n}$, nakonec mohou tvořit pouze „diskrétní“ množinu (v Harnackově smyslu). Protože se jedná o body, které jsou hromadnými body množiny koncových bodů uvažovaných intervalů, přiřadíme funkci v těchto bodech hodnotu, která je limitou posloupnosti funkčních hodnot pro ta x, která konvergují k danému bodu a v nichž je funkční hodnota známa. Dá se ukázat, že v takových bodech je derivace nekonečná (směrnice šikmých spojnic roste nade všechny meze).

Harnack poznamenává, že jeho funkce by mohla být vyjádřena ve tvaru konvergentní Fourierovy řady a uvádí jako další příklad Cantorovu funkci. Pro Harnackovu funkci by bylo možné použít analogické vyjádření, pokud bychom za dokonalou řídkou množinu vzali místo Cantorova diskontinua množinu bodů, které lze vyjádřit rozvojem

$$\frac{c_1}{4} + \frac{c_2}{4^2} + \ldots + \frac{c_r}{4^r} + \ldots, \tag{7}$$

v němž koeficienty c_r nabývají pouze hodnot 0 nebo 2.

Scheefferovy příklady

Ludwig Scheeffer (1859 – 1885) se narodil v Královci a studoval v Heidelbergu, Lipsku a v Berlíně. Doktorskou disertační práci napsanou pod vedením Kummera a Weierstrasse obhájil v Berlíně roku 1880. Později se seznámil s Cantorem, který na něj měl značný vliv. Sám Cantor hodnotil vysoko Scheefferovy výsledky a v dopise Mittag-Lefflerovi [10, s. 151], v němž doporučuje Scheefferovy práce k otištění v *Acta Mathematica*, zmiňuje i potřebu Scheefferova přesunu z relativní izolace v Královci do Mnichova. Scheeffer místo na mnichovské univerzitě skutečně získal, jeho slibná kariéra však byla předčasně ukončena tyfem ve věku pouhých 26 let.

První ze tří Scheefferových příspěvků, které se v *Acta Mathematica* objevily, je věnován problému rektifikace křivek. Hutný, asi třicetistránkový text nazvaný *Allgemeine Untersuchungen über Rectification der Curven* obsahuje vedle několika definic sedm tvrzení doprovázených četnými příklady. V úvodu Scheeffer [11, s. 49] píše, že jeho zájem o tuto problematiku byl podnícen studiem vlastností jedné pozoruhodné funkce, která

> *je všude spojitá, její derivace (jakož i její kvadrát) však má v každém libovolně malém intervalu nenulovou oscilaci, takže určitý integrál*
>
> $$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$
>
> *podle Riemannovy definice nenabývá žádného smyslu. Přesto z geometrických úvah jednoznačně vyplývá, že touto funkcí definovaná křivka má mezi každými svými dvěma body určitou konečnou délku.*

Podle Scheeffera je proto třeba otázku rektifikovatelnosti zkoumat nezávisle na otázce existence tohoto integrálu.

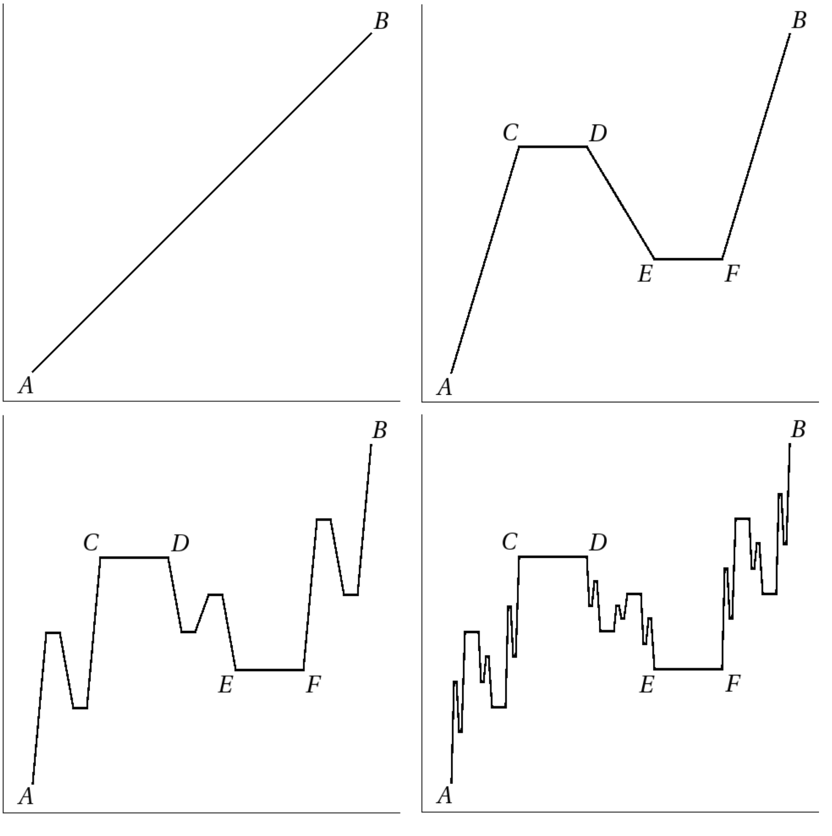
Scheeffer definuje délku oblouku křivky představované grafem funkce $y = f(x)$ mezi body (x_0, y_0) a (x_1, y_1) v zásadě stejně jako před ním Duhamel a Stolz jako limitu, k níž se blíží délky vepsaných lomených čar, když se délky intervalů mezi jednotlivými dělícími body intervalu $[x_0, x_1]$ vesměs blíží nule. Zatímco Duhamel se zabýval spojitými a alespoň po částech hladkými funkcemi, Scheeffer, podobně jako před ním du Bois-Reymond, rozšiřuje úvahy o délce grafu i na případ funkcí, které v daném intervalu mají skokové nespojitosti. Výška skoků je pak započítávána do délky grafu.

Nespojitou funkci, pro kterou integrál vyjadřující délku oblouku neexistuje, ale jejíž graf má přesto konečnou délku ve výše uvedeném smyslu, ukazuje následující příklad [11, s. 61]. Nechť $w_1, w_2, \ldots$ je spočetná množina libovolných hodnot a $s_1, s_2, \ldots$ spočetná množina kladných hodnot, přičemž řada $\sum_{r=1}^{\infty} s_r$ má konečný součet. Pak křivka definovaná rovnicí

$$y = \sum_{-\infty}^{x} s_r, \tag{8}$$

v níž se sčítá přes všechny indexy r, pro které je $w_r < x$, má mezi každými dvěma body x_0, y_0 a x_1, y_1 délku $x_1 - x_0 + y_1 - y_0$.

Obzvlášť zajímavou se tato vlastnost jeví v případě, kdy množina $w_1, w_2, \ldots$ je hustá. Co speciálně odlišuje tuto křivku od běžné stupňovité lomené čáry, je to, že neobsahuje žádnou horizontální linii.



Obr. 3. Scheefferův příklad nerektifikovatelné křivky.

Funkce f definovaná rovnicí (8) je prostá. Dodefinujeme-li inverzní funkci k funkci f tak, aby v intervalech odpovídajících skokovým nespojitostem funkce f byla konstantní, dostaneme spojitou funkci φ, jejíž graf má stejnou délku jako graf f se započítanými skoky.

Zvolíme-li jako body w_r, v nichž má funkce f skokové nespojitosti, dyadicky racionální body intervalu $(0, 1)$, tedy čísla $k/2^n$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, 3, \ldots, 2^{n-1}$, a čísla s_r budeme volit rovná $1/3^n$, bude funkce φ Cantorovou funkcí. Budeme-li volit čísla s_r rovná $1/(3 \cdot 4^{n-1})$, bude φ Harnackovou funkcí.

Grafy Cantorovy i Harnackovy funkce jsou rektifikovatelné křivky, jejich délka se však liší od hodnoty integrálu $\int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$. V Scheefferově pojednání [11, s. 74] najdeme i příklad podobné funkce, jejíž graf nemá konečnou délku.

Zvolíme body $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_1, y_1)$, $x_1 > x_0$, $y_1 > y_0$, které budou koncovými body konstruované křivky; úsečku AB nazveme její první aproximací. Dále sestrojíme čtyři body, které označíme C, D, E, F a jejichž souřadnice budou po řadě dány vztahy

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + \frac{1}{5}(x_1 - x_0), & y &= y_0 + \frac{2}{3}(y_1 - y_0),\\
x &= x_0 + \frac{2}{5}(x_1 - x_0), & y &= y_0 + \frac{2}{3}(y_1 - y_0),\\
x &= x_0 + \frac{3}{5}(x_1 - x_0), & y &= y_0 + \frac{1}{3}(y_1 - y_0),\\
x &= x_0 + \frac{4}{5}(x_1 - x_0), & y &= y_0 + \frac{1}{3}(y_1 - y_0).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Lomená čára $ACDEFB$ bude druhou aproximací konstruované křivky. Obě vodorovné úsečky CD a EF budou součástmi konstruované křivky. Každou ze tří zbývajících úseček nahradíme lomenou čárou procházející body, které sestrojíme analogickým způsobem jako body C, D, E, F v případě úsečky AB, přičemž x_0, y_0 a x_1, y_1 ve vztazích (9) nahradíme souřadnicemi koncových bodů každé z těchto tří úseček (obr. 3). Budeme-li takto pokračovat bez omezení, budou sestrojené lomené čáry konvergovat ke křivce, která nemá mezi body A a B konečnou délku, lze ji však chápat jako graf funkce mající derivaci rovnou nule skoro všude v intervalu $[x_0, x_1]$.

Závěr

V historii matematiky nejsou zcela ojedinělé případy, kdy k nějakému objevu či řešení dospěje několik matematiků nezávisle víceméně současně, protože onen objev či řešení v dané době „visí ve vzduchu“. Cantorovo diskontinuum je tradičně spojováno se jménem Cantora, který jej popsal roku 1883, ale je známo [2], že ještě před Cantorem se touto množinou zabýval anglický matematik H. J. S. Smith (1826 – 1883). Zdá se, že k podobné situaci došlo i v případě spojitých singulárních funkcí.

Cantor, Harnack i Scheeffer přinesli první příklady těchto funkcí přibližně ve stejné době. V Cantorově případě byl objev singulární funkce přirozeným důsledkem jeho úvah týkajících se mohutností nekonečných bodových množin. Scheeffer uveřejnil své příklady o něco později, dospěl k nim však na základě studia odlišné problematiky. Harnack si existenci funkcí tohoto druhu zřejmě uvědomil jako poslední. Autoři [9] poukazují na to, že výsledky Cantora i Scheeffera v této oblasti mají srovnatelnou váhu a byly dosaženy zřejmě nezávisle. Označení funkce ψ jako funkce Cantorovy–Scheefferovy by proto lépe odráželo okolnosti objevu první funkce patřící do této pozoruhodné třídy.

Popsané singulární funkce jsou konstantní na styčných intervalech dokonalé řídké množiny Cantorova typu. Postupem času se objevily ještě podivnější příklady singulárních funkcí, které jsou ryze monotonní. Jejich konstrukce však většinou postrádá geometrickou názornost, kterou se vyznačuje konstrukce Cantorovy či Harnackovy funkce. Klasickým příkladem je Minkowského funkce, kterou Hermann Minkowski (1864 – 1909) sestrojil, když se zabýval přiřazením kvadratických iracionalit intervalu $[0,1]$ racionálním číslům. Vlastnosti Minkowského funkce studoval později Arnaud Denjoy (1884 – 1974), který mj. dokázal, že se jedná o singulární funkci. Další příklady ryze monotonních singulárních funkcí získané pomocí odlišných postupů jsou popsány např. v [8, s. 208–213].

L i t e r a t u r a

[1] Cantor, G.: *De la puissance des ensembles parfaits de points,* Acta Mathematica *4* (1884), 381–392.

[2] Fleron, J. F.: *A Note on the History of the Cantor Set and Cantor Function,* Mathematics Magazine *67* (1994), 136–140.

[3] Harnack, A.: *Vereinfachung der Beweise in der Theorie der Fourier'schen Reihe,* Mathematische Annalen *19* (1882), 235–279.

[4] Harnack, A.: *Notiz über die Abbildung einer stetigen linearen Mannigfaltigkeit auf eine unstetige,* Mathematische Annalen *23* (1883), 285–288.

[5] Harnack, A.: *Die allgemeinen Sätze über den Zusammenhang der Functionen einer reellen Variabelen mit ihren Ableitungen, II. Theil,* Mathematische Annalen *24* (1884), 217–252.

[6] Hawkins, T.: *Lebesgue's Theory of Integration. Its Origins and Development,* AMS Chelsea Publishing, Providence 1970.

[7] Jarník, V.: *Integrální počet II,* Academia, Praha 1955.

[8] Kannan, R., Krueger, C. K.: *Advanced Analysis on the Real Line,* Springer, New York 1996.

[9] Maurey, B.; Tacchi, J.-P.: *Ludwig Scheeffer et les extensions du théorème des accroissements finis,* in Travaux Mathématiques XIII, s. 1–60, Centre Universitaire de Luxembourg, 2002.

[10] Meschkowski, H., Nilson, W. (ed.): *Georg Cantor – Briefe,* Springer, Berlin 1991.

[11] Scheeffer, L.: *Allgemeine Untersuchungen über Rectification der Curven,* Acta Mathematica *5* (1884), 49–82.

[12] Schwabik, Š., Šarmanová, P.: *Malý průvodce historií integrálu,* Prometheus, Praha 1996.