Irena Sýkorová

Pellova rovnice v indické matematice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 56 (2011), No. 1, 35–44

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141984`

Pellova rovnice v indické matematice

Irena Sýkorová, Praha

1. Úvod

Jménem Pellova rovnice je označena neurčitá rovnice
$$ax^2 + 1 = y^2, \tag{1}$$
kde a je přirozené číslo, které není druhou mocninou. Řešení (x, y) hledáme v oboru celých čísel. Tato rovnice má nekonečně mnoho řešení, zřejmá jsou tzv. triviální řešení $(0, \pm 1)$. Zobecněnou Pellovou rovnicí rozumíme rovnici
$$ax^2 + b = y^2, \tag{2}$$
kde $a \in \mathbb{N}$, $\sqrt{a} \notin \mathbb{N}$ a $b \in \mathbb{Z}$.

Poprvé se Pellova rovnice ve tvaru
$$2x^2 + 1 = y^2 \tag{3}$$
objevuje v řecké matematice, kde se pomocí zlomku $\frac{y}{x}$ hledala racionální aproximace $\sqrt{2}$. Dokonce už v 8. stol. př. n. l. v práci indického učence Baudhāyany nalezneme vyjádření $\sqrt{2} \approx \frac{577}{408}$, které má správných pět desetinných míst 1,41421. I když Baudhāyana pravděpodobně k výsledku dospěl jinou cestou, je zajímavé, že čísla $x = 408$ a $y = 577$ jsou řešením rovnice (3).

Také Archimedova úloha o býcích vede na rovnici $y^2 = 4\,729\,494\ x^2 + 1$, což je Pellova rovnice. Nejmenším celočíselným řešením tohoto problému jsou čísla mající více než 200 000 cifer (viz např. [8], [12]).

V Indii se řešením Pellovy rovnice zabývali zejména v 7. století Brahmagupta a ve 12. století Bhāskara. Přestože indičtí matematici počítali se zápornými čísly, řešení rovnice (1), resp. (2) hledali v oboru přirozených čísel.

2. Indická terminologie

Indové nazývali rovnici (2) *varga-prakṛti* nebo *kṛti-prakṛti* (angl. square-nature). [1]) Většina indických matematiků užívala termín *prakṛti* k označení přirozeného koeficientu a, někdy tomuto koeficientu říkali *guṇaka* (násobitel) či zkráceně *guṇa*. Číslo x

[1]) *Varga* nebo *kṛti* je výraz, kterým Indové označovali druhou mocninu, *prakṛti* znamená podstata či základ.

RNDr. Irena Sýkorová, Katedra matematiky, Vysoká škola ekonomická, Ekonomická 957, 148 00 Praha 4, e-mail: `sykorova@vse.cz`

nazývali *ādya-mūla* (první kořen) a číslu y říkali *antya-mūla* (druhý kořen). Někdy se objevily také výrazy *kamiṣṭha-pada* nebo *hrasva-mūla* (menší kořen) pro x a *jyeṣṭha--pada* nebo *jyeṣṭha-mūla* (větší kořen) pro y, i když ne vždy musí platit $x < y$. Pro absolutní člen b byly používány názvy *kṣepa*, *prakṣepa* či *kṣipti*, pokud byl absolutní člen záporný, říkalo se mu *śodhaka* (odčítací). Při popisu rovnice označovali postupně koeficienty a, b a neznámé x, y zkratkami *pra*, *kṣe*, *ka*, *jye*.

3. Brahmaguptovo řešení

První významné výsledky ve studiu rovnice (2) získal indický matematik Brahmagupta (598–670) téměř o tisíc let dříve, než se jí věnovali matematici v Evropě. Brahmagupta ve své knize *Brāhma-sphuta-siddhānta* uvedl některá pravidla, která pak využil při řešení. Například sloka 65 ve 12. kapitole obsahuje následující pravidlo (viz [3]):

> *Kořen* [urči] *dvakrát a* [další] *z vhodného čtverce násobeného násobitelem* [koeficientem a] *zvětšeným nebo zmenšeným o vhodnou konstantu. Součin prvních násobený násobitelem s přičteným součinem druhých je druhý kořen. Součet součinů křížem je první kořen.*

Původní formulace nejsou příliš srozumitelné, vyjádříme je současnou symbolikou ve tvaru lemmatu.

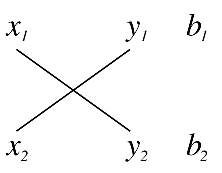
Lemma 1 (BrSpSi, xviii, 65, podle [3]). *Nechť rovnice* $ax^2 + b_1 = y^2$ *má řešení* (x_1, y_1) *a rovnice* $ax^2 + b_2 = y^2$ *má řešení* (x_2, y_2). *Pak* (x, y), *kde*

$$x = x_1y_2 + x_2y_1 \qquad \text{a} \qquad y = ax_1x_2 + y_1y_2, \tag{4}$$

je řešením rovnice

$$ax^2 + b_1b_2 = y^2.$$

Při popisu řešení indičtí autoři zapisovali kořeny a absolutní člen první rovnice, kořeny a absolutní člen druhé rovnice do řádků pod sebou. Pak je i názornější „součin křížem“ uvedený v Brahmaguptově pravidle (viz [11]).



Indičtí matematikové nazývali tuto metodu *bhāvanā*, někdy též *samāsa bhāvanā* (princip skládání). V případě, že princip skládání byl prováděn se dvěma stejnými rovnicemi se stejnými kořeny, používal se termín *tulya bhāvanā* (skládání stejných) na rozdíl od *atulya bhāvanā* (skládání nestejných).

Brahmagupta tvrzení nedokazoval, jen doplnil několika příklady. Důkaz provedl až v 16. století komentátor Brahmaguptova díla Kṛṣṇa (podle [4]). [2])

[2]) V Evropě dokázal Brahmaguptovo lemma anglický matematik John Wallis (1616–1703).

Důkaz: Označíme-li jako (x_1, y_1) a (x_2, y_2) postupně řešení rovnic $ax^2 + b_1 = y^2$, $ax^2 + b_2 = y^2$, pak platí

$$ax_1^2 + b_1 = y_1^2 \qquad \text{a} \qquad ax_2^2 + b_2 = y_2^2.$$

Jestliže se první rovnice vynásobí y_2^2, dostaneme

$$ax_1^2 y_2^2 + b_1 y_2^2 = y_1^2 y_2^2,$$

kde se za y_2^2 ve druhém členu dosadí z druhé rovnice

$$ax_1^2 y_2^2 + b_1(ax_2^2 + b_2) = y_1^2 y_2^2,$$

tj.

$$ax_1^2 y_2^2 + ab_1 x_2^2 + b_1 b_2 = y_1^2 y_2^2.$$

Nyní se b_1 ve druhém členu nahradí rozdílem $y_1^2 - ax_1^2$, tedy

$$ax_1^2 y_2^2 + a(y_1^2 - ax_1^2)x_2^2 + b_1 b_2 = y_1^2 y_2^2,$$

tj.

$$a(x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2) + b_1 b_2 = y_1^2 y_2^2 + a^2 x_1^2 x_2^2.$$

Když se k oběma stranám rovnice přičte $2ax_1x_2y_1y_2$, lze rovnici vyjádřit ve tvaru

$$a(x_1 y_2 + x_2 y_1)^2 + b_1 b_2 = (y_1 y_2 + ax_1 x_2)^2.$$

□

Důsledek 1. Je-li (x_0, y_0) řešením rovnice $ax^2 + b = y^2$, pak (x, y), kde

$$x = 2x_0 y_0 \qquad \text{a} \qquad y = ax_0^2 + y_0^2, \tag{5}$$

je řešením rovnice $ax^2 + b^2 = y^2$.

V případě, že $b = 1$, jde o Pellovu rovnici (1). Pokud známe jedno její celočíselné řešení (x_0, y_0), pomocí důsledku 1 nalezneme další celočíselné řešení (x, y), kde

$$x = 2x_0 y_0 \qquad \text{a} \qquad y = ax_0^2 + y_0^2.$$

I když tímto postupem lze nalézt nekonečně mnoho řešení, Brahmagupta sám však nalezl vždy jen jedno řešení Pellovy rovnice. Poznámka o nekonečném počtu řešení se objevuje až později u Śrīpatiho, Bhāskary, Nārāyaṇy.

Brahmagupta také ukázal postup, kterým se řešení Pellovy rovnice $ax^2 + 1 = y^2$ získá pomocí řešení rovnice $ax^2 + b = y^2$.

Lemma 2 (BrSpSi, xviii, 66, podle [3]). *Nechť (x_0, y_0) je řešením rovnice $ax^2 + b = y^2$. Pak (x, y), kde*

$$x = \frac{2x_0 y_0}{b} \qquad \text{a} \qquad y = \frac{ax_0^2 + y_0^2}{b}, \tag{6}$$

je řešením rovnice $ax^2 + 1 = y^2$.

Důkaz: Tvrzení plyne z lemmatu 1 a jeho důsledku. Čísla $x = 2x_0y_0$ a $y = ax_0^2 + y_0^2$ jsou řešením rovnice $ax^2 + b^2 = y^2$. Pak jen stačí vydělit tuto rovnici b^2 a $(\frac{x}{b}, \frac{y}{b})$ je řešením rovnice $ax^2 + 1 = y^2$. □

V následujícím příkladu je řešení $(\frac{x}{b}, \frac{y}{b})$ celočíselné, i když tomu tak obecně nemusí vždy být.

Příklad 1 (BrSpSi, xviii, 67, podle [3]). Brahmagupta předvedl popsaný postup na řešení rovnice

$$83x^2 + 1 = y^2.$$

Řešení. Místo dané rovnice uvažoval rovnici

$$83x^2 - 2 = y^2,$$

kde změnil absolutní člen b tak, aby dostal celočíselné řešení $x_0 = 1$ a $y_0 = 9$. Podle důsledku 1 platí, že dvojice čísel $x = 2x_0y_0 = 18$ a $y = 83x_0^2 + y_0^2 = 164$ je řešením rovnice $83x^2 + 4 = y^2$. Pak podle lemmatu 2 nalezl řešení původní rovnice $x = \frac{18}{2} = 9$ a $y = \frac{164}{2} = 82$.

Rovnice $ax^2 + b = y^2$ je zajímavá zejména pro $b \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. V tomto případě lze nalézt pomocí lemmatu 2 celočíselné řešení Pellovy rovnice $ax^2 + 1 = y^2$.

Pro ilustraci uvedeme odvození jen pro případy $b = -2$ a $b = 4$, ostatní lze nalézt např. v knize [4].

Je-li $b = -2$ a dvojice přirozených čísel (x_0, y_0) řešením rovnice $ax^2 - 2 = y^2$, pak podle (6) a s využitím vztahu $ax_0^2 = y_0^2 + 2$ platí:

$$x = \frac{2x_0y_0}{2} = x_0y_0 \qquad \text{a} \qquad y = \frac{ax_0^2 + y_0^2}{2} = \frac{2y_0^2 + 2}{2} = y_0^2 + 1$$

jsou řešením Pellovy rovnice (1). Znaménko se zanedbávalo, staří indičtí matematici uvažovali jen kladná řešení.

Je-li $b = 4$ a dvojice přirozených čísel (x_0, y_0) je řešením rovnice $ax^2 + 4 = y^2$, tj. $ax_0^2 = y_0^2 - 4$, pak čísla

$$x = \frac{2x_0y_0}{4} = \frac{x_0y_0}{2} \qquad \text{a} \qquad y = \frac{ax_0^2 + y_0^2}{4} = \frac{y_0^2 - 4 + y_0^2}{4} = \frac{y_0^2 - 2}{2}$$

jsou řešením Pellovy rovnice (1). Čísla x a y jsou obě přirozená právě tehdy, když y_0 je sudé. Když y_0 je liché, x_0 musí být také liché, jinak by nemohlo platit $y_0 = ax_0^2 + 4$. Pro obě čísla x_0 a y_0 lichá se aplikuje lemma 1 na dvě řešení rovnice (1)

$$x_1 = \frac{x_0y_0}{2}, \ y_1 = \frac{y_0^2 - 2}{2} \qquad \text{a} \qquad x_2 = \frac{x_0}{2}, \ y_2 = \frac{y_0}{2}.$$

Pak podle (4) získáme řešení

$$x = \frac{x_0y_0}{2} \cdot \frac{y_0}{2} + \frac{x_0}{2} \cdot \frac{y_0^2 - 2}{2} = \frac{x_0y_0^2 + x_0y_0^2 - 2x_0}{4} = \frac{x_0(y_0^2 - 1)}{2} \tag{7}$$

a

$$y = a \cdot \frac{x_0 y_0}{2} \cdot \frac{x_0}{2} + \frac{y_0^2 - 2}{2} \cdot \frac{y_0}{2} = \frac{(y_0^2 - 4)y_0}{4} + \frac{(y_0^2 - 2)y_0}{4} = \frac{y_0(y_0^2 - 3)}{2}, \tag{8}$$

což jsou obě přirozená čísla, protože y_0 je liché.

Pro $b = -4$ se dá podobně ukázat, že kořeny lze najít ve tvaru

$$x = \frac{x_0 y_0 (y_0^2 + 1)(y_0^2 + 3)}{2} \qquad \text{a} \qquad y = (y_0^2 + 2)\frac{(y_0^2 + 1)(y_0^2 + 3) - 2}{2}. \tag{9}$$

Toto Brahmagupta věděl, např. vzorce (7), (8) a (9) jsou popsány ve slokách 69 a 71 ve 12. kapitole práce *Brāhma-sphuta-siddhānta*. Nenajdeme zde však žádné odvození vzorců ani náznak důkazu.

Brahmagupta tedy řešil Pellovu rovnici $ax^2+1 = y^2$ tak, že nejprve nalezl přirozená řešení pomocné rovnice

$$ax^2 + b = y^2, \qquad \text{kde} \quad b \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}, \tag{10}$$

pak podle lemmatu 2 mohl nalézt nejen jedno, ale nekonečně mnoho řešení Pellovy rovnice. Brahmagupta však nedokázal vysvětlit obecně, jak zvolit pomocnou rovnici (10).

Śrīpati. Dalším indickým matematikem, který se zabýval řešením Pellovy rovnice, byl Śrīpati (1019–1066), který ve své práci *Siddhānta-śekhara* uvedl jednoduché pravidlo, podle něhož nalezl racionální řešení Pellovy rovnice. Při tom využíval identity

$$a \cdot 1^2 + (m^2 - a) = m^2 \qquad \text{nebo} \quad a \cdot 1^2 - (a - m^2) = m^2,$$

kde m je libovolné číslo. Pak rovnice

$$ax^2 + (m^2 - a) = y^2$$

má řešení $x_0 = 1$ a $y_0 = m$. A podle Brahmaguptova lemmatu 2 nalezl řešení Pellovy rovnice ve tvaru

$$x = \frac{2m}{m^2 - a} \qquad \text{a} \qquad y = \frac{m^2 + a}{m^2 - a}.$$

V některých případech lze tímto způsobem získat i řešení z oboru přirozených čísel.

4. Bhāskarovo řešení

Na Brahmaguptovu práci navázal indický matematik Bhāskara (1114 – 1185), který je znám také jako Bhāskarācārya (Bhāskara učený) nebo Bhāskara II na rozdíl od Bhāskary I (600 – 680). Bhāskara II popsal cyklickou metodu (*cakravāla*),[3] což je algoritmus, podle kterého se postupně hledají celočíselná řešení rovnic $ax^2 + b_1 = y^2$, $ax^2 + b_2 = y^2$ atd., až se dostane rovnice, ve které je absolutní

[3]) Slovo *cakravāla* v sanskrtu znamená kruh.

člen b_k roven ± 1, ± 2 nebo ± 4. Pomocí celočíselného řešení rovnice (10) se potom užitím Brahmaguptova principu skládání získalo také celočíselné řešení Pellovy rovnice $ax^2 + 1 = y^2$.

Lemma 3 (BiGa, iii, 83-86, podle [3]). *Nechť (x_1, y_1) je celočíselné řešení rovnice $ax^2 + b_1 = y^2$, kde b_1 je celé číslo. Pak dvojice*

$$x_2 = \frac{x_1 m + y_1}{b_1}, \qquad y_2 = \frac{a x_1 + y_1 m}{b_1} \tag{11}$$

je celočíselným řešením rovnice

$$ax^2 + b_2 = y^2, \qquad \text{kde} \quad b_2 = \frac{m^2 - a}{b_1}$$

a m je libovolné celé číslo.

Bhāskara II uvedl pravidlo bez důkazu. Je však vidět, že výrazy (11) získáme podle uvedených Brahmaguptových lemmat. Použijeme-li lemma 1 na řešení (x_1, y_1) rovnice $ax^2 + b_1 = y^2$ a řešení $(1, m)$ rovnice $ax^2 + (m^2 - a) = y^2$, dostaneme, že

$$x = x_1 m + y_1, \quad y = a x_1 + y_1 m \qquad \text{řeší rovnici} \quad ax^2 + (m^2 - a)\, b_1 = y^2.$$

Pak podle lemmatu 2 plyne, že dvojice

$$x_2 = \frac{x_1 m + y_1}{b_1}, \qquad y_2 = \frac{a x_1 + y_1 m}{b_1} \tag{12}$$

je řešením rovnice $ax^2 + b_2 = y^2$, kde $b_2 = \frac{m^2 - a}{b_1}$.

Bhāskara ještě poznamenal, že číslo m je třeba volit tak, aby číslo $x_2 = \frac{x_1 m + y_1}{b_1}$ bylo celé a rozdíl $|m^2 - a|$ byl co nejmenší. Můžeme tedy ještě předpokládat, že čísla x_1, y_1 a b_1 jsou nesoudělná, protože po zkrácení bychom dostali rovnici s menší hodnotou b_1. Pak čísla

$$y_2 = \frac{a x_1 + y_1 m}{b_1}, \qquad b_2 = \frac{m^2 - a}{b_1}$$

jsou také celá.

Vyjádříme-li y_1 ze vztahu pro x_2 ve vzorci (12) a dosadíme do vztahu pro y_2, dostaneme

$$y_2 = \frac{a x_1 + y_1 m}{b_1} = \frac{a x_1 + (x_2 b_1 - x_1 m)\, m}{b_1} = m x_2 - \left(\frac{m^2 - a}{b_1}\right) x_1 = m\, x_2 - b_2\, x_1.$$

Nyní stačí ukázat, že b_2 je celé. Pak musí i y_2 být celé číslo.

Vyjádříme y_1 ze vzorců (12) a porovnáme

$$y_1 = b_1\, x_2 - x_1 m, \qquad y_1 = \frac{b_1\, y_2 - a\, x_1}{m},$$

tedy

$$\begin{aligned} m\,b_1\,x_2 - x_1 m^2 &= b_1\,y_2 - a\,x_1\\ b_1(m\,x_2 - y_2) &= x_1(m^2 - a)\\ \frac{b_1}{x_1}(m\,x_2 - y_2) &= m^2 - a. \end{aligned}$$

Číslo na pravé straně je celé, tedy i výraz na levé straně musí být celočíselný. Protože čísla b_1 a x_1 jsou nesoudělná, musí být celé $\frac{m\,x_2-y_2}{x_1}$, tedy i $\frac{m^2-a}{b_1} = b_2$.

Toto Bhāskara II věděl, ale v jeho práci žádný důkaz není.

Bhāskarova cyklická metoda spočívala v tom, že se nejprve místo dané rovnice $ax^2 + 1 = y^2$ hledalo celočíselné řešení (x_1, y_1) rovnice $ax^2 + b_1 = y^2$, kde b_1 bylo co nejmenší. Možná volba je taková, že $\frac{y_1}{x_1} \approx \sqrt{a}$. Pokud $b_1 \notin \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$ nalezlo se podle lemmatu 3 celočíselné řešení (x_2, y_2) rovnice $ax^2 + b_2 = y^2$. Tento proces se opakoval tak dlouho, dokud se rovnice neupravila do tvaru (11), tj. absolutní člen byl roven ± 1, ± 2 nebo ± 4. Dál se pokračovalo podle Brahmaguptova principu skládání.

Bhāskara II věděl, i když asi jen na základě zkušeností, že postup popsaný jeho metodou jednou skončí. Po konečném počtu kroků se tedy získá taková zobecněná Pellova rovnice $ax^2 + b = y^2$, kde platí $b \in \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$.

Bhāskara II ve své práci uvedl řešení následujících příkladů.

Příklad 2 (BiGa, iii, 87, podle [3]). Úkolem je nalézt celočíselné řešení rovnice

$$67x^2 + 1 = y^2.$$

Bhāskara nejprve uvažoval čísla

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 8 \qquad \text{jako řešení rovnice} \qquad 67x^2 - 3 = y^2 \quad (b_1 = -3).$$

Podle lemmatu 3 pak hledal takové číslo m_1, pro které je řešení rovnice

$$67x^2 + \frac{m_1^2 - 67}{-3} = y^2$$

celočíselné. Řešení je ve tvaru

$$x_2 = \frac{1 \cdot m_1 + 8}{-3}, \qquad y_2 = \frac{8m_1 + 67 \cdot 1}{-3}. \tag{13}$$

Aby číslo x_2 bylo celé, m_1 hledal ve tvaru $m_1 = -3t + 1$. Zároveň se požadovalo, aby rozdíl $|m_1^2 - 67|$ byl minimální, proto volil $m_1 = 7$ ($t = -2$). Dosazením do rovnice (13) dostal

$$x_2 = 5, \quad y_2 = 41 \qquad \text{jako řešení rovnice} \qquad 67x^2 + 6 = y^2 \quad (b_2 = 6).$$

Opět podle lemmatu 3 hledal číslo m_2 tak, aby rovnice

$$67x^2 + \frac{m_2^2 - 67}{6} = y^2$$

měla celočíselné řešení. Protože řešení je ve tvaru

$$x_3 = \frac{5m_2 + 41}{6}, \qquad y_3 = \frac{41m_2 + 67 \cdot 5}{6}, \tag{14}$$

číslo m_2 muselo vyhovovat podmínce $m_2 = 6t + 5$ s minimálním rozdílem $|m_2^2 - 67|$, a tedy $m_2 = 5$ $(t = 0)$. Podle vztahů (14) získal hodnoty

$$x_3 = 11, \quad y_3 = 90 \qquad \text{jako řešení rovnice} \qquad 67x^2 - 7 = y^2 \quad (b_3 = -7).$$

Nyní znovu podle lemmatu 3 hledal číslo m_3 tak, aby rovnice

$$67x^2 + \frac{m_3^2 - 67}{-7} = y^2$$

měla celočíselné řešení. Řešení je ve tvaru

$$x_3 = \frac{11m_3 + 90}{-7}, \qquad y_3 = \frac{90m_3 + 67 \cdot 11}{-7}. \tag{15}$$

Pro číslo m_3 platilo, že $m_3 = -7t + 2$ a rozdíl $|m_3^2 - 67|$ je minimální, a tedy $m_3 = 9$ $(t = -1)$. Z vyjádření (15) pak plyne, že

$$x_4 = 27, \quad y_4 = 221 \qquad \text{je řešením rovnice} \qquad 67x^2 - 2 = y^2 \quad (b_4 = -2).$$

V dalším kroku hledal celočíselné řešení rovnice

$$67x^2 - 2 = y^2.$$

To je rovnice s absolutním členem $b_4 = -2$, proto dál postupoval podle Brahmaguptova principu skládání. Řešením původní Pellovy rovnice $67x^2 + 1 = y^2$ jsou tedy čísla

$$x = \frac{2 \cdot 27 \cdot 221}{2} = 5\,967 \qquad \text{a} \qquad y = \frac{221^2 + 67 \cdot 27^2}{2} = 48\,842.$$

I řešení následujícího příkladu popsal Bhāskara II.

Příklad 3 (BiGa, iii, 87, podle [3]). Úkolem je nalézt celočíselné řešení rovnice

$$61x^2 + 1 = y^2.$$

Bhāskara nejprve uvažoval rovnici

$$61x^2 + 3 = y^2 \qquad \text{s řešením} \quad x_1 = 1\,,\ y_1 = 8 \quad (b_1 = 3).$$

Užitím lemmatu 3 pak hledal takové číslo m_1, pro které má rovnice

$$61x^2 + \frac{m_1^2 - 61}{3} = y^2$$

celočíselné řešení. Toto řešení je ve tvaru

$$x_2 = \frac{1 \cdot m_1 + 8}{3}, \qquad y_2 = \frac{8m_1 + 61 \cdot 1}{3}. \tag{16}$$

Pak hledal m_1 tak, aby x_2 bylo celočíselné a rozdíl $|m_1^2 - 61|$ byl minimální. To nastane pro $m_1 = 7$. Dosazením do (16) tak dostal

$$x_2 = 5\,,\ y_2 = 39 \qquad \text{jako řešení rovnice} \quad 61x^2 - 4 = y^2 \quad (b_2 = -4).$$

Pak podle Brahmaguptova lemmatu 2 (principu skládání) nalezl nejmenší celočíselné řešení rovnice $61x^2 + 1 = y^2$, tedy $x = 226\,153\,980$ a $y = 1\,766\,319\,049$.

Uvedené příklady ukazují i značnou početní zručnost indických matematiků a jejich jistotu při počítání s velkými čísly.

Nārāyaṇa. Na Bhāskarovu práci navázal další indický matematik Nārāyaṇa (1340 až 1400), který předložil další příklady. Ve své knize *Bījaganita* pomocí cyklické metody nalezl například řešení $x = 22\,419$, $y = 227\,528$ rovnice $103\,x^2 + 1 = y^2$.

5. Závěr

V Evropě podnítil zájem o Pellovu rovnici Pierre de Fermat (1601–1665), který v roce 1657 zveřejnil výzvu na nalezení nejmenšího celočíselného řešení rovnice $61x^2+1 = y^2$, stejné rovnice, jejíž řešení popsal Bhāskara (viz např. [9]). Na tuto výzvu zareagovali mimo jiné i francouzský matematik–amatér Bernard Frénicle de Bessy (1605–1675), anglický matematik John Wallis (1616–1703) a irský matematik William Brouncker (1620–1684), jehož metoda řešení je v podstatě stejná jako ta, kterou později přesně popsal Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) a která využívala řetězové zlomky.

Leonhard Euler (1707–1783) dokázal Brahmaguptovo lemma a položil základ řešení Pellovy rovnice pomocí řetězových zlomků. Kompletní teorii řešení vypracoval a publikoval v roce 1771 J. L. Lagrange. Dokázal, že Pellova rovnice má nekonečně mnoho řešení pro každé a ($a \in \mathbb{N}$, $\sqrt{a} \notin \mathbb{N}$), rovnici řešil pomocí vyjádření čísla $\sqrt{a}$ řetězovými zlomky.

Pellova rovnice dostala své jméno vlastně omylem. Zasloužil se o to L. Euler, který ji chybně přisoudil anglickému matematikovi Johnu Pellovi (1611–1685), přestože není prokázáno, že by se J. Pell řešením této rovnice podrobněji zabýval (viz [5] a [1]).

L i t e r a t u r a

[1] Barbeau, E. J.: *Pell's equation*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[2] Burton, D. M.: *Elementary number theory*, fourth edition, McGraw-Hill, New York, 1998.

[3] Colebrooke, H. T.: *Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara*, John Murray, London, 1817.

[4] Datta, B., Singh, A. N.: *History of Hindu Mathematics (Part II)*, Lahore: Molital Banarsidass, 1938.

[5] Dickson, L. E.: *History of the Theory of Numbers. Vol. II Diophantine Analysis*, AMS Chelsea Publishing, 1992.

[6] Juškevič, A. P.: *Dějiny matematiky ve středověku*, Academia Praha, 1978.

[7] Katz, V.: *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2007.

[8] Lenstra, H. W., Jr.: *Solving the Pell equation*, Notices Amer. Math. Soc. 49 (2002), no. 2, 182-192.

[9] O'Connor, J. J., Robertson, E. F.: *Pell's equation*, `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Pell.html`.

[10] Sierpiński, W.: *Teoria liczb*, Warszawa – Wroclaw, 1950.

[11] Srinivasiengar, C. N.: *The History of Ancient Indian Mathematics*, The World Press Private LTD, Calcutta, 1967.

[12] Stillwell, J.: *Mathematics and Its History*, Springer–Verlag New York Inc, 1989.

O prvních spojitých singulárních funkcích

Libor Koudela, Pardubice

Jedním z nejvýznamnějších objevů, kterých bylo v matematice na přelomu 19. a 20. století dosaženo, je Lebesgueova teorie integrálu. Henri Lebesgue (1875 – 1941) ji v ucelené formě poprvé představil ve své doktorské disertační práci *Intégrale, longueur, aire*, která byla publikována roku 1902 v časopise *Annali di Matematica*. Její kostru tvořily výsledky, které byly prezentovány pařížské Akademii v letech 1899 – 1901 a uveřejněny v *Comptes Rendus*. O své teorii doplněné o nové výsledky a řešení přednášel Lebesgue na Collège de France v akademickém roce 1902 – 1903; jeho přednášky byly publikovány roku 1904 pod názvem *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*.

Významnou roli v Lebesgueově teorii hrají tzv. singulární funkce. *Singulární funkcí* se nazývá (viz [8, s. 170]) funkce f definovaná v intervalu $[a, b]$, která není v $[a, b]$ konstantní a pro kterou platí $f'(x) = 0$ skoro všude v $[a, b]$[1]). První spojité singulární funkce byly objeveny dvě desetiletí před publikováním *Leçons*. Jsou spojeny s počátky teorie množin a s myšlenkami, které utvářely moderní analýzu.

[1]) Definice singulární funkce se u různých autorů mohou lišit. Často se navíc požaduje (např. Jarník [7, s. 368]), aby funkce f měla v intervalu $[a, b]$ konečnou variaci.