František Kuřina

Matematická kultura a vyučování matematice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 55 (2010), No. 3, 243--255

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141963`

Matematická kultura a vyučování matematice

František Kuřina, Hradec Králové

> *V čem je skutečné jádro matematiky? V axiomech, ve větách, v důkazech, v pojmech, v definicích, v teoriích, ve vzorcích, v metodách? Matematika by jistě nemohla existovat bez těchto součástí, jsou všechny podstatné. Nicméně já si vážně myslím, že žádná z nich není jádrem matematiky, že hlavním oprávněním matematikovy existence je řešení problémů, že skutečným jádrem matematiky jsou problémy a jejich řešení.*
>
> P. R. Halmos

1. Úvod

Charakteru matematiky, jako metody řešení problémů, připomenutém mottem *Paula Halmose*, odpovídá i značná část činností studentů ve vyučování matematice. Jejich úspěchy při řešení úloh závisejí na úrovni jejich myšlení, na tom, jak umějí počítat, jak si pamatují důležité souvislosti tak, aby rozuměli matematice a dovedli ji použít. Těchto 5P matematického vzdělávání (pamatovat si, počítat, přemýšlet, porozumět, použít) tvoří základ matematické kultury člověka. Matematickou kulturu může pěstovat u svých žáků jak učitelka první třídy, tak i vysokoškolský profesor u svých doktorandů. Všimněme si této problematiky podrobněji.

2. Matematická kultura

Člověk s dobrou matematickou kulturou je matematicky gramotný (ovládá dobře určitou oblast matematiky s jejími pojmy a metodami), dovede o matematice komunikovat různými způsoby (ovládá různé matematické jazyky) a vidí souvislosti mezi různými pojmy a různými oblastmi matematiky. O úrovni matematické kultury studenta se můžeme přesvědčit úrovní metod, kterými je schopný řešit problémy. Vynikající úroveň matematické kultury vykazuje středoškolák, který je schopen řešit např. úlohy matematické olympiády. Pojem matematická kultura přirozeně nelze definovat, budeme mu rozumět ve smyslu dobrá matematika podle *Terence Tao* [24], tedy dobré matematické řešení problémů, dobrá matematická technika, dobré matematické aplikace, pěstování

František Kuřina, Hradec Králové, katedra matematiky, Pedagogická fakulta Univerzity Hradec Králové, Rokitanského 62, 500 03 Hradec Králové, e-mail: `frantisek.kurina@uhk.cz`

matematického vhledu, tvořivosti a krásy matematiky. Pěstovat matematickou kulturu znamená učit vidět kořeny matematiky v realitě (v přírodě, ve společnosti, ale i v matematice samé), poznávat svět matematických pojmů, rozumět mu a umět ho aplikovat „kultivovaně“ a správně na řešení nejrůznějších problémů.

O matematické kultuře můžeme mluvit na každé úrovni zvládnutí matematiky. Určitou matematickou kulturu by měl vykazovat absolvent základní školy, jinou absolvent střední školy, na vyšší úrovni pak absolvent univerzitního matematického vzdělávání, matematickou kulturu by měl mít řemeslník, ale, pochopitelně jinou, i lékař, ba i filozof či umělec. Je přirozené, že tyto úrovně matematické kultury nemá smysl srovnávat, ale každé matematické vzdělávání, které má vyšší ambice než dovést absolventy k základní úrovni matematické gramotnosti, by mělo pečovat o kultivaci matematické kultury svých absolventů. Žák je matematicky gramotný, rozumí-li základnímu učivu příslušné třídy a umí ho použít.

Matematická kultura se přirozeně projevuje kladně nebo záporně v práci učitele ve třídě, v individuálních diskusích s nadanými žáky, z hlediska matematické kultury můžeme hodnotit učebnice matematiky i matematické monografie.

K matematické kultuře náleží přirozený přístup k učivu tak, aby nové pojmy zapadaly nenásilně do žákova rozvíjejícího se matematického světa, aby jejich pochopení neztěžoval zbytečný pomocný aparát, aby jednoduché bylo vyvozováno jednoduše.

Elementární matematika tkví svými kořeny v realitě. Kulturně koncipovaná školní matematika tuto stránku nezastírá, ale vhodně využívá. Žák by měl poznat matematiku jako disciplínu, která vyrůstá z jeho poznání světa, a ne jako nějakou umělou konstrukci, která je nejen díky svému obsahu, ale také pro svůj zvláštní jazyk normálnímu člověku cizí a nesrozumitelná. Např. proces poznávání jednotlivých objektů na straně jedné a proces shrnování určitých objektů do celků na straně druhé je zárodkem tvoření pojmů a předobrazem konstrukce množin v matematice. Množiny se nevyskytují ani v přírodě, ani ve společnosti. Jako matematické objekty jsou to myšlenkové konstrukce, podněty k jejich konstrukci jsou však často zcela přirozené. Zvolené místo můžeme považovat za množinu jeho domů, obyvatel nebo obchodů. To záleží na úhlu pohledu. Školní třídu můžeme interpretovat jako množinu žáků, jako množinu lavic nebo jako množinu jejích sportovců. Prvky množiny mají určité charakteristické vlastnosti a zřídkakdy jde o shrnutí libovolných objektů do jednoho celku, jak naznačuje učebnice ([2], s. 11):

Množinou budeme rozumět souhrn nějakých předmětů (objektů).

„Množinové opojení“ spjaté s reformou matematického vzdělávání u nás, kdy byla zavedena „množinová matematika“ od prvního ročníku základní školy, zákonitě zmizelo, množiny jsou dnes přirozeným základem školní matematiky, jsou základem matematické kultury. Se zadostiučiněním můžeme konstatovat, že úlohy typu

> *Doplňte za proměnnou y ve větě: „y je přítokem Labe“ z množiny řek oboru proměnné y,* $y \in \{$ *Úpa, Metuje, Orlice, Dunaj, Volha, Loučná, Don, Chrudimka, Váh, Vltava, Ohře* $\}$ *tak, aby věta byla pravdivá.*

se snad již v našich učebnicích nevyskytují.

3. Umění vidět souvislosti

V další části uvedu několik příkladů, jejichž účelem je ilustrovat, co rozumím matematickou kulturou. Zaměřím se přitom zejména na matematiku střední školy.

Příklad 1. V naší civilizaci zná dítě od počátku školní docházky pojem uspořádané dvojice (aniž se ovšem tento pojem explicitně zavádí), neboť dobře rozlišuje např. slova „do“ a „od“ a čísla „13“ a „31“. Autoři vysokoškolské učebnice pro ekonomy z roku 1996 považují za nutné v úvodu knihy vysvětlit:

„Uvažujeme-li prvky a, b, potom množinu $A = \{a, b\}$ nazýváme ***(neuspořádanou) dvojicí*** *prvků a, b. ...*

Jak je známo např. ze středoškolské matematiky, potřebujeme v mnoha matematických úvahách mít prvky uspořádány, např. body v eukleidovské rovině jsou reprezentovány uspořádanými dvojicemi reálných čísel.

Definice. ***Uspořádanou dvojicí*** *prvků x a y rozumíme množinu*

$$[x, y] = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

V uspořádané dvojici prvků x a y má jeden prvek, a to x, preferované umístění (protože je prvkem dvou prvků uspořádané dvojice, kdežto prvek y je prvkem pouze jediného prvku této množiny). Tak víme, který prvek je v této uspořádané dvojici první a který druhý“ (viz [5], s. 66).

Citovaný odstavec je podle mého názoru ukázkou nevhodného přístupu k matematice, neboť intuitivně zcela jasný pojem se „zavádí přesnou definicí“, jejíž smysl v této formulaci stěží studenti mohou pochopit.

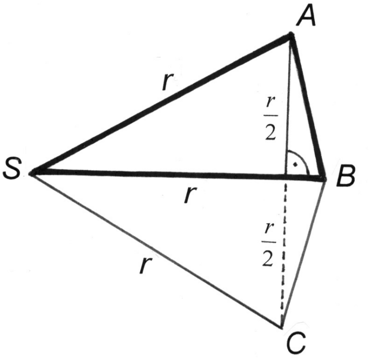
Příklad 2. Úroveň matematické kultury absolventů základní školy a studentů učitelství jsem opakovaně sledoval na řešení úlohy

Vypočítejte obsah pravidelného dvanáctiúhelníku vepsaného do kružnice poloměru r.

Jen velmi zřídka docházeli řešitelé k výsledku

$$S_{12} = 12 \cdot \frac{1}{2} r^2 \sin 30^\circ = 3r^2,$$

zcela výjimečně rozpoznali v každém z 12 shodných rovnoramenných trojúhelníků, které skládají dvanáctiúhelník, trojúhelník se základnou r a výškou k ní příslušnou $\frac{1}{2}r$ (obr. 1). Zato se hojně vyskytovalo užití sinové a kosinové věty, Heronova vzorce a různé kombinace goniometrických funkcí. Takovéto postupy prokazují nízkou matematickou kulturu jejich autorů. Vyskytovali se ovšem i „negramotní“ absolventi středních škol, kteří úlohu nevyřešili vůbec. Podrobněji jsem o této problematice psal v článku [11].



Obr. 1.

Výsledek $S_{12} = 3r^2$ můžeme interpretovat jako aproximaci obsahu kruhu obsahem pravidelného dvanáctiúhelníku, což odpovídá aproximaci čísla π číslem 3. Tato aproximace se uvádí v bibli: „*Udělal moře slité, desíti loket od jednoho kraje k druhému, okrouhlé vůkol, a okolek jeho třidcíti loket vůkol*“ (citováno podle *Biblí svatá,* Biblická společnost, 1900; 1. Kniha královská; 7,23.). Na okraj poznamenejme, že obsah čtverce opsaného kružnici poloměru r je $4r^2$, což představuje aproximaci 4 čísla π shora a čtverec vepsaný kružnici o poloměru r má obsah $S_4 = 2r^2$.

Příklad 3. Jedním z kulturně důležitých matematických pojmů rozvíjených od počátku školní docházky je pojem *obsah útvaru.* Za přirozený považuji takovýto postup jeho budování. Bez důkazu je možné přijmout větu: *Čtverec o straně a (délkových jednotek) má obsah a^2 (příslušných čtverečných jednotek).* Dále přijmeme větu „o aditivitě obsahu nepřekrývajících se útvarů“ a rozdělením čtverce o straně $a+b$ na dva čtverce a dva obdélníky odvodíme, ze vzorce $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ vzorec pro obsah obdélníku. Odtud pak můžeme odvodit vzorec pro obsah rovnoběžníku a trojúhelníku. Budování správných představ o obsahu takto rozvíjíme po celou základní školu. Zdá se mi v těchto souvislostech nevhodné **definovat** obsah trojúhelníku ABC vzorcem

$$V(A, B, C) = \frac{1}{2}|[B - A, C - A]|,$$

kde $|[B - A, C - A]|$ je vnější součin vektorů $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, jak to uvádí učebnice geometrie pro učitelské vzdělávání [20]. To bychom pak celou teorii velikostí geometrických útvarů mohli nahradit souborem definic typu $S = \pi r^2, \ldots$ Nejde mi samozřejmě o výsledky, ale o to, že jsou prezentovány jako definice.

Příklad 4. *Heron z Alexandrie* podal někdy kolem začátku našeho letopočtu velmi důmyslný důkaz svého vzorce pro obsah trojúhelníku (viz např. [13]). Dnes můžeme tento vzorec dokázat přirozeným způsobem užitím kosinové věty a úpravou algebraických výrazů. Na tom lze ukázat význam kalkulů pro zvyšování úrovně matematické kultury. Naproti tomu přístup, který uvádí učebnice [20], se mi nejeví jako vhodný. Spočívá v tom, že v označení $\vec{u} = B - A$, $\vec{v} = C - A$, $\vec{w} = C - B$ se vychází ze tří identit typu

$$\|\vec{w}\|^4 = \|\vec{v}\|^4 + \|\vec{u}\|^4 + 4 \cdot (\vec{u} \,.\, \vec{v})^2 - 4\|\vec{v}\|^2 \cdot (\vec{u} \,.\, \vec{v}) - 4\|\vec{u}\|^2 \cdot (\vec{u} \,.\, \vec{v}) + 2\|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2,$$

z nichž se algebraickými úpravami odvodí příslušný vzorec.

Příklad 5. Učebnice matematiky pro gymnázia z nakladatelství *Prometheus* jsou koncipovány tématicky, což má jistě řadu výhod, ale někdy se stírají souvislosti, kterých by si měl středoškolák všimnout. Nemýlím-li se, nikde v celém kurzu středoškolské matematiky není zdůrazněno, že úloha

Řešte soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých

může být geometricky interpretována jako úloha

Určete množinu společných bodů tří rovin v trojrozměrném prostoru.

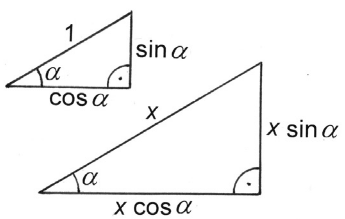
Při vhodných hodnotách koeficientů můžeme roviny znázornit v kartézské soustavě souřadnic (ve volném rovnoběžném promítání) a úlohu i geometricky řešit. Poučné je ilustrovat geometricky i diskusi o řešitelnosti příslušné soustavy.

Podobně není studium goniometrie např. podle učebnice [17] spjato s trigonometrií trojúhelníku. Co mám na mysli, připomenu konkrétněji příkladem.

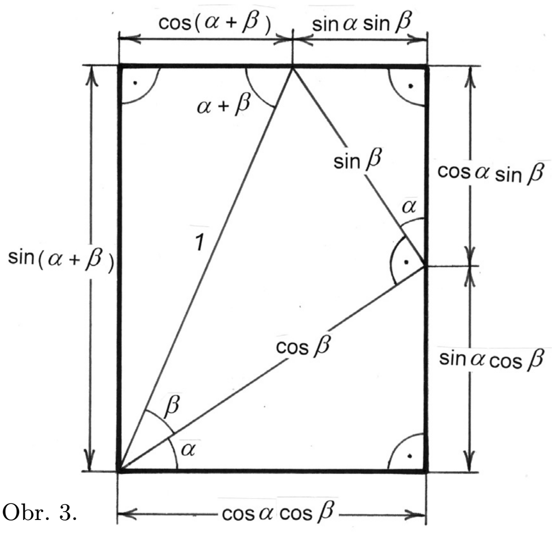
Příklad 6. *Podle definic goniometrických funkcí ostrého úhlu můžeme nakreslit obr. 2. Z obr. 3 pak vidíme např. platnost součtových vzorců*

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Vím přirozeně, že tento postup, který není nový (viz např. [9]), není teoreticky lepší než důkaz v učebnici ([17], s. 76–78), ale přece jen považuji za účelné naznačené představy pěstovat. Hlavním nedostatkem postupu, který jsem zde uvedl, je, že je omezen na takové úhly α, β, jejichž součtem je úhel ostrý.



Obr. 2.



Obr. 3.

Příklad 7. K pěstování matematické kultury náleží i utváření jazyka matematiky. Běžný matematický text (učebnice, ale i monografie) se skládá z výkladu v obecném jazyku, ze „vzorců“ (tvořených nejrůznějšími typografickými způsoby pomocí matematických symbolů) a z jazyka (geometrických) obrázků. Že algebraická symbolika je vhodný jazykový prostředek, si mohou uvědomit již žáci základní školy. K tomu stačí, mají-li bez symboliky popsat sčítání dvou zlomků.

Je přirozené, že pro týž objekt máme dosti často různé názvy (jinak říkají otci děti, jinak manželka, jinak tchýně, …), rovněž totéž číslo označujeme různými symboly, např.

$$2 = \frac{8}{4} = \sqrt{4} = 3 - 1 = \log_{10} 100, \ldots$$

Zvolíme-li však pro různé objekty totéž označení, mohou nastat potíže, o nichž může mluvit např. osoba jménem Jan Novák. Jeden symbol by neměl označovat dvě nebo více různých objektů. Tato zásada však nebývá ani v matematických textech vždy dodržena.

V zápise

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

vyjadřuje znaménko = tzv. „identickou“ rovnost dvou výrazů, zápis

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

nepovažujeme za správný (pokud $ab \neq 0$) a píšeme proto

$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2.$$

V rovnicích ovšem užíváme symbol = , píšeme tedy např.

$$x + 3 = 5x - 6,$$

ačkoliv se výraz na levé straně nerovná výrazu na straně pravé. Tato dvojznačnost symbolu = je realitou naší školské matematiky a obvykle nepůsobí potíže. Žákům bychom ovšem měli tyto souvislosti vysvětlit. Potíže však dělá tato problematika poctivým autorům učebnic, chtějí-li definovat pojem rovnice. Dobře se s touto otázkou vyrovnal např. *Jaroslav Šedivý*, když píše ([23], s. 150):

Rovnicí s proměnnou $x \in \mathbb{R}$ nazýváme každou výrokovou formu, která je zápisem rovnosti dvou výrazů $l(x)$, $p(x)$ ve tvaru

$$l(x) = p(x).$$

Ovšem u rovnic, které obvykle řešíme, jde o zápis „rovnosti dvou výrazů, které se nerovnají“.

Uvědomíme-li si, že matematické pojmy školní matematiky jsou vlastně pojmy didaktické, musíme souhlasit s klasikem naší didaktiky *Karlem Hrušou*, který vyřešil otázku jednoduše:

Rovnice o neznámé x je úloha určit všechna x z určité množiny, pro něž se dva výrazy $l(x)$ a $p(x)$ rovnají.

Připomeňme na okraj, že existují minimálně dva způsoby, jak se s touto problematikou vyrovnat „exaktně“. Jeden z nich spočívá v rozlišování identické rovnosti ($\equiv$) a rovnosti (=), druhý navrhl *Hans Freudenthal* zavedením „tázacího kvantifikátoru“ [7]:

$$?x\,[l(x) = p(x)],$$

který čteme „*pro které x platí* …“ Žádný z těchto způsobů se však, pokud vím, v naší praxi neujal.

Kam vede snaha o přesné vyjadřování, budu ilustrovat příkladem definice vektorového prostoru podle učebnice [1]. Autor zdůrazňuje, že algebraická operace sčítání vektorů je jiná algebraická operace než sčítání reálných čísel a rozlišuje to symbolicky $\oplus$ a $+$ a podobně uvádí dva symboly pro násobení reálných čísel a násobení vektoru reálných číslem $\cdot$ a $\odot$. Takže vektorový prostor je struktura

$$[V;\ \oplus;\ \mathbb{R}^{+,\cdot};\ \odot],$$

jejíž definice zabere více než stránku nepřehledného symbolického textu.

Všimněme si nyní role obrázků v matematickém vzdělávání. Obrázky jsou prvky matematické kultury, neboť při vhodném použití přispívají k pochopení souvislostí a pomáhají budovat správné představy o matematických pojmech a postupech. Jsou protikladem verbálního vyjadřování a jejich předností je *názornost* a jistá *komplexnost* informace, kterou obrázek nese. Jejich výhodou ovšem také je, že jsou nezávislé na jazyku, v němž se vede výklad. Nevýhodou obrázků je jejich *konkrétnost* (nikdy nezachytí „obecnou“ situaci) a *„neuspořádanost“*. V textu jsou informace lineárně uspořádány, na obrázku máme „vše pohromadě“.

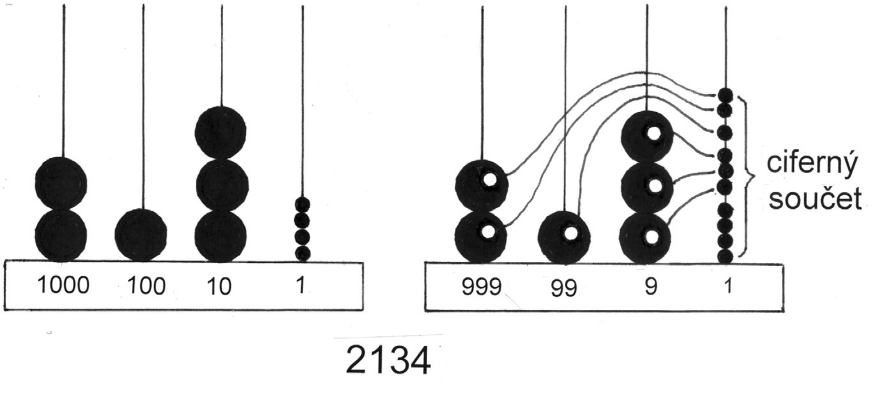
Za nedostatek našich učebnic považuji zbytečnou zdrženlivost v množství ilustrací. Většina autorů zavádí jedinou reprezentaci pojmů, a to zpravidla algebraickou. Přitom pro některé žáky by mohla být vizuální informace srozumitelnější. Doložme tuto tezi příkladem.

Příklad 8. Důkaz kritéria dělitelnosti přirozeného čísla číslem 3 (nebo 9) můžeme vysvětlit „algebraicky“ nebo „vizuálně“.

Algebraický způsob spočívá v zápisu přirozeného čísla n zapsaného číslicemi c_k, $c_{k-1}, \ldots, c_1, c_0$ takto ([2], s. 122):

$$\begin{aligned} n &= c_k 10^k + c_{k-1}10^{k-1} + \ldots + c_1 10 + c_0 = \\ &= c_k(99...9+1) + c_{k-1}(999...+1) + \ldots + c_1(9+1) + c_0 = \\ &= 9(11...1c_k + 11...c_{k-1} + \ldots + c_1) + (c_k + c_{k-1} + \ldots + c_1 + c_0). \end{aligned}$$

Vizuální přiblížení důkazu spočívá v modifikaci řádového počitadla podle obr. 4, kde od každé jednotky vyššího řádu odečteme číslo 1 a tyto jednotky přidáme na první drát. Jejich celkový počet je roven cifernému součtu čísla a rozhoduje tedy o dělitelnosti číslem 3 (nebo 9).



Obr. 4.

Podle mého názoru by měly být např. výklady o kombinatorice doprovázeny stromovými grafy (odvození počtu všech podmnožin množiny o n prvcích (2^n), nebo počtu všech permutací n prvků ($n!$), ...). Je škoda, že učebnice [3] takovéto reprezentace neuvádí.

Velmi málo se využívá osové a středové souměrnosti při konstrukci kartézských grafů relací a funkcí: Např. v učebnici [15] se úloha na s. 52:

Sestavte graf relace $|x| + |y| = 2$.

řeší podrobným rozpisem podmínek na více než stránce, ačkoliv je zřejmé, že tento graf je souměrný podle os x a y, a stačí tedy k úsečce, která je grafem funkce $y = 2 - x$ v prvním kvadrantu, sestrojit její obraz v příslušných souměrnostech. Je příznačné, že souměrnosti se nepřipomenou ani u definic funkce sudé a liché.

Geometricky lze velmi dobře ilustrovat (obvykle dvěma pohledy) zákonitosti početních operací s kladnými reálnými čísly (komutativitu a distributivitu násobení vzhledem ke sčítání apod.).

Minimálně jeden nešvar v oblasti vizuálního znázornění přetrvává z éry modernizace: znázornění množiny šrafováním příslušné oblasti např. Vennova diagramu (viz např. [2], s. 66). Při uplatnění této konvence by prvek jednoprvkové množiny byl znázorněn „plochou“.

K problematice vizualizace se vyjádřil *Petr Vopěnka* slovy: *Neuznávání obrázku a náčrtů za plnohodnotný způsob sdělování matematických poznatků, to je důsledné trvání na úplných slovních popisech sdělovaných poznatků, výrazně umrtvuje dynamiku matematického poznávání* (viz [25], s. 569).

A Eduard Čech (1893–1960) napsal před padesáti léty: *Umět úlohu přeložit z řeči slov do řeči obrazů a obráceně, to není spjato jenom s určitou partií učiva, ale s celou podstatou matematiky – ba dokonce s celou podstatou myšlení* (citováno podle [10]).

V našich současných učebnicích matematiky se snad již nevyskytují geometricky nesprávné obrázky, avšak kultura grafického vypracování ilustrací není na příliš vysoké úrovni.

Podrobněji jsem psal o této problematice v článku [12].

Důležitou otázkou pěstování matematické kultury je zavádění pojmů. Mělo by být maximálně přirozené, mělo by se opírat o zkušenosti žáků a nikdy by se nemělo stát formálním procesem, který vede k reprodukci nesrozumitelných definic.

4. Umění řešit úlohy

Matematická kultura člověka se nejúčinněji projeví, jak jsem se již zmínil, jeho uměním řešit problémy, tj. úlohy, k jejichž řešení je nutná určitá míra tvořivosti. Je zřejmé, že tato formulace není příliš uspokojivá, protože táž úloha se může někomu jevit jako rutinní aplikace matematické teorie, pro někoho jiného to však může být problém, dokonce neřešitelný.

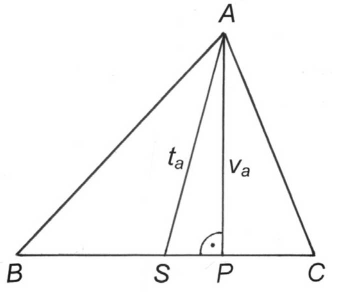
Někdy se, podle mého názoru poněkud jednostranně, zdůrazňuje role logiky při řešení úloh. Projevuje se to zejména pojetím řešení úloh (především konstrukčních) ve čtyřech fázích

1. *rozbor,*
2. *konstrukce,*
3. *důkaz,*
4. *diskuse,*

přičemž se zdůrazňuje, že *„vlastní řešení konstruktivní úlohy je deduktivní úvaha, jež má za cíl vyhledat jisté … objekty“* ([26, s. 144]), a rozbor má tuto logickou strukturu: *„existuje-li útvar, který máme sestrojit, pak má tyto … vlastnosti; hledáme tedy rozborem nutné podmínky“,* ([27], s. 190).

Samozřejmě že v rozboru začínáme s předpokladem existence útvaru, který hledáme, avšak zřídkakdy jsme schopni z toho bez dalších předpokladů vyvozovat závěry. Doložme to na zcela jednoduché úloze ze základní školy.

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána velikost a strany BC, velikost výšky v_a a těžnice t_a k této straně.



Obr. 5.

V rozboru tedy budeme předpokládat, že trojúhelník s požadovanými vlastnostmi existuje (obr. 5). Vlastní úvaha pak pokračuje např. těmito cestami

a) *Narýsujeme-li stranu BC* ($|BC| = a$) se středem S, pak bod A leží na přímce rovnoběžné s přímkou BC ve vzdálenosti v_a a na kružnici s poloměrem t_a se středem v bodě S …

b) *Narýsujeme-li těžnici AS* ($|AS| = t_a$), pak body B, C leží na přímce SP, kde P je průsečík Thaletovy kružnice s průměrem AS s kružnicí $k(A;\, v_a)$ …

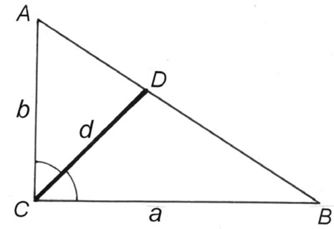
Kurzivou vyznačené části úvah a, b vůbec nejsou věcí logiky, ale např. věcí zkušenosti, intuice nebo experimentování.

V rozboru kreslíme obrázek, vyznačujeme co je dáno, co hledáme, dokreslujeme, přemýšlíme o možných souvislostech, … až snad dospějeme k nápadu, který je klíčem k řešení úlohy. Rozbor tedy není prioritně otázka logiky. V mnoha textech našich učebnic se charakterizuje rozbor dosti volně, obvykle bez zdůraznění rozhodující role nápadu.

Podíváme-li se do klasických prací o řešení úloh, např. do knih *Georga Pólyi* ([18], [19]) zjišťujeme, že zmíněné čtyři fáze řešení se zde neuvádějí. Neuvádějí se v mnoha případech ani např. ve známé knize Metody řešení úloh [16], v publikacích o matematické olympiádě (např. v publikaci [30]), ani v učebnicích *Eduarda Čecha* (např. [4]).

Ilustrujme tyto myšlenky aspoň jedním příkladem. Prosím čtenáře, aby si úlohu, která je velmi jednoduchá, po přečtení jejího textu samostatně vyřešil.

Příklad 9 [6]. *V pravoúhlém trojúhelníku ABC s odvěsnami a, b a přeponou c označte D průsečík osy pravého úhlu s přeponou AB. Určete velikost úsečky $d = |CD|$ (obr. 6).*



Obr. 6.

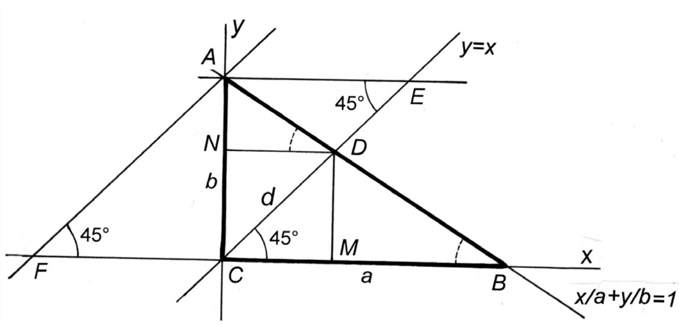
1. řešení. Pomocí sinové věty pro trojúhelník ACD vypočítáme $d = \frac{a\sqrt{2}}{c}|AD|$. Protože osa úhlu v libovolném trojúhelníku dělí protilehlou stranu v poměru stran přilehlých, jak snadno dokážeme, vypočítáme $|AD| = \frac{bc}{a+b}$. Odtud pak získáme výsledek

$$d = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}.$$

2. řešení. Pomocí kosinové věty pro trojúhelník ACD a Pythagorovy věty pro trojúhelník ABC určíme, že

$$d^2 = b^2 + \frac{(bc)^2}{(a+b)^2} - 2\frac{b^2c}{a+b} \cdot \frac{b}{c} = \left(\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}\right)^2.$$

3. řešení. Vedeme-li bodem A přímku rovnoběžnou s přímkou BC a označíme-li E její průsečík s přímkou CD (obr. 7), určíme d z podobnosti trojúhelníků CBD a EAD.



Obr. 7.

4. řešení. Vedeme-li bodem A přímku rovnoběžnou s přímkou CD a označíme-li F její průsečík s přímkou BC (obr. 7), určíme d z podobnosti trojúhelníků BCD a BFA.
5. řešení. Délku d můžeme určit dvojím vyjádřením obsahu trojúhelníku ABC pomocí vzorce $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, kde γ je úhel, který svírají strany a, b.
6. řešení. Doplníme-li obrázek trojúhelníku čtvercem $CNDM$ (obr. 7), určíme délku d z podobnosti trojúhelníků BMD a DNA.

7. řešení. Umístíme-li trojúhelník ABC do souřadnicového systému (obr. 7), můžeme vypočítat vzdálenost bodů C a D, přičemž souřadnice bodu D určíme jako souřadnice průsečíku přímek

$$y = x \quad \text{a} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

V tomto pojetí jde tedy o zcela rutinní úlohu.

Podařilo se vám najít další způsob řešení úlohy?

Snad je z naznačených postupů zřejmé, že řešení úlohy není věcí logiky, ale spíše (geometrické) intuice. Teprve, když dostaneme „správný" nápad, můžeme „nasadit" logiku a běžné matematické metody.

Názvem *Umění řešit úlohy* jsem dal najevo, že řešení úloh není zpravidla dáno předem jasnými pravidly či dokonce algoritmy, ale že má charakter tvůrčí. V literatuře se touto problematikou pochopitelně zabývala řada autorů. Chtěl bych zde připomenout především práci *Umění myslet* anglického psychologa *Grahama Wallase* [28], jejíž první vydání je z r. 1926, a na ni navazující publikaci významného francouzského matematika *Jacquesa Hadamarda* [8] z r. 1944. Ideje v těchto pracích obsažené sahají ovšem, jak autoři uvádějí, až k *Hermannu Helmholtzovi* (1821–1894) a *Henrimu Poincarému* (1854–1912).

Tito autoři charakterizují tvůrčí myšlení (a řešení problémů tvůrčím myšlením je) čtyřmi fázemi, které zde připomenu počeštělými anglickými názvy:

1. preparace,
2. inkubace,
3. iluminace,
4. verifikace.

V přípravné fázi řešení problému jde o studium souvislostí a poznávání vztahů. Toto poznání musí uzrát v duševním světě řešitele, aby, často po delší době a usilovné duševní práci, přišel „šťastný" nápad, který vede k řešení problému. Toto řešení může přirozeně mít intuitivní charakter a je třeba je prověřit důkladnou logickou analýzou.

Při řešení úloh ve škole „shrnujeme" přípravu, zrání a objevení nápadu do tzv. rozboru. Příprava řešení úlohy snad bývá někdy „vytvořena" předchozí výukou, na zrání problému nebývá obvykle ve škole čas a nelze se proto divit, že se někdy rozbor nahrazuje návodem. Je- li řešení problémů uměním, nelze je patrně „vtěsnat" do čtyř fází.

Řešení úloh je pochopitelně vážným problémem matematického vzdělávání. Uplatňovat přitom „kulturní" zřetele znamená dobrou přípravu jejich řešení a správný odhad jejich obtížnosti. Formálně „naučená" řešení nemají prakticky žádný význam.

5. Závěry

V jednom ze šetření TIMSS (Third International Mathematics and Science Study, [21]) byly zadány čtyři stejné úlohy v 8. ročníku základní školy a v posledním ročníku střední školy. Jsme jedinou z 21 zemí světa, která má celkovou úspěšnost středoškoláků nižší než úspěšnost žáků 8. ročníku. Uveďme dvě z úloh, o které se jednalo (právě jedna z nabízených odpovědí A, B, C, D, E je správná).

Úloha 1. *Kolik kalorií je ve 30gramové porci jídla, je-li ve 100 g tohoto jídla 300 kalorií?*

A: 90, B: 100, C: 900, D: 1000, E: 9000.

Úloha 2. *Ze zásilky 3000 žárovek bylo 100 namátkou vybráno ke kontrole. Je-li z tohoto vzorku 5 žárovek vadných, kolik vadných žárovek můžeme očekávat v celé zásilce?*

A: 15 B: 60 C: 150 D: 300 E: 600

Jaké jsou příčiny tohoto výsledku? O tom se můžeme pouze dohadovat.

Podle mého názoru tkví jedna z příčin v tom, že středoškolská matematika je předkládána žákům v relativně izolovaných tématech (goniometrie, planimetrie, diferenciální a integrální počet, kombinatorika, komplexní čísla, ...) a v rámci těchto disciplín se řeší úlohy. Očekávaný vliv na rozvoj myšlení není u některých žáků prokazatelný, matematiku chápou formálně a úloha, která vypadává ze systému, jim může dělat potíže. Růst objemu matematických poznatků neznamená růst schopnosti orientovat se v praxi pomocí matematiky. Souvisí to s nízkou úrovní matematické kultury ve vyučování, neboť matematika by měla vést k uvědomování si souvislostí a k rozvíjení myšlení. Je to záležitost vzdělávací praxe na jednotlivých školách a u jednotlivých učitelů. Z druhé strany si ovšem musíme položit otázku, zda struktura středoškolského matematického vzdělávání je optimální. Nebylo by možné uvažovat o posílení problémového charakteru výuky s důrazem na řešení úloh a problémů? Například stereometrické problémy by mohly být řešeny v rámci tématu *Poznáváme prostor* metodami syntetické, analytické či vektorové geometrie. Patrně by zde bylo jisté nebezpečí nesystematičnosti, ale školská matematika by tak mohla být blíže historickému vývoji a nebyla by tolik formálně poplatná stávající struktuře oddělených matematických disciplín.

Kulturně pojaté vyučování matematice by mělo být pokud možno přirozené, mělo by se orientovat spíše k cestám ke strukturám než ke studiu struktur hotových. Neměli bychom učit prioritně definice, ale spíše proces definování, neměli bychom učit důkazy, ale spíše učit argumentovat, neměli bychom učit řešení úloh, ale měli bychom učit řešit úlohy. Je takovýto přístup k matematice reálný? Jestliže ano, neměl by být uplatňován jen na střední škole. Budoucí učitelé by měli tento styl poznávat ve svém univerzitním vzdělávání.

Na okraj poznamenávám, že mnohé z naznačených idejí se uplatňují v rámci tzv. „realistického matematického vzdělávání“ v nizozemských školách ovlivněných výsledky práce *Freudenthalova institutu* (podrobněji se lze o tom dočíst např. v publikaci [22]). Jiný přístup realizuje singapurská škola didaktiky matematiky, v níž je jádrem kurikula řešení úloh (viz např. publikaci [29]). Snad i to přispívá k úspěchům singapurských studentů jak ve srovnávacích studiích, tak i v soutěžích.

Škola systematicky orientovaná k řešení úloh by měla být školou matematické kultury. Škola, v níž student popisuje určité matematické struktury, příliš k pěstování matematické kultury nepřispívá – a to ani tehdy, když přistupuje k popisu s porozuměním.

Na závěr si dovolím zcela osobní vzpomínku. Na konci svých univerzitních studií jsem se setkával s akademikem *Bohumilem Bydžovským* jako vedoucím mé diplomové práce. Jednou se mi pan profesor, kterému bylo více než 75 let, svěřil: Každý den musím vyřešit aspoň jednu matematickou úlohu.

Poznámka. Tento příspěvek byl vypracován v rámci grantu GAČR 406/08/0710.

Literatura

[1] Blažek, V.: *Lineární prostory bodů, I.* PF Ústí n. L. 1980.
[2] Bušek, I. a kol.: *Matematika pro gymnázia. Základní pojmy z matematiky.* Prometheus, Praha 1992.
[3] Calda, E., Dupač, V.: *Matematika pro gymnázia. Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.* Prometheus, Praha 1993.
[4] Čech, E.: *Geometrie pro I. – III. třídu středních škol.* JČMF, Praha 1943.
[5] Coufal, J., Klůfa, J.: *Učebnice matematiky I.* Vysoká škola ekonomická, Praha 1996.
[6] Dam, Z.: *Kilka sposobów na dwusiecną.* Matematyka, č. 6, 2004.
[7] Freudenthal, H.: *Mathematik als pädagogische Aufgabe.* Klett, Stuttgart 1977.
[8] Hadamard, J.: *The Mathematician's Mind.* Princeton University Press, Princeton 1973.
[9] Hejný, M. a kol.: *Teória vyučování matematiky 2.* SPN, Bratislava 1989.
[10] Holubář, J.: *Metodické semináře akademika Čecha o matematice.* Matematika ve škole *6. X* (1960), 325–329.
[11] Kuřina, F.: *Matematická kultura, matematická gramotnost a krize školy.* In: Sborník *Jak učit matematice žáky ve věku 10–15 let.* Litomyšl 2009.
[12] Kuřina, F.: *Vizuální gramotnost jako složka kultury.* Matematika–fyzika–informatika *19* (2009), č. 1, 1–15.
[13] Kuřina, F.: *Důkazy a kalkuly.* Matematika–fyzika–informatika *20* (2010), č. 1, 2–20.
[14] Kuřina, F.: *Matematika a kalkuly.* Matematika–fyzika–informatika, *18* (2008) č. 1, 1–20.
[15] Odvárko, O. a kol.: *Matematika pro gymnázia 3.* SPN, Praha 1978.
[16] Odvárko, O. a kol.: *Metody řešení matematických úloh.* SPN, Praha 1990.
[17] Odvárko, O.: *Goniometrie. Matematika pro gymnázia.* Prometheus, Praha 1994.
[18] Pólya, G.: *How to Solve It.* Princeton University Press. Princeton 1945.
[19] Pólya, G.: *Mathematical Discovery, I., II.* J. Wiley, London 1962, 1965.
[20] Sekanina, M. a kol.: *Geometrie I.* SPN, Praha 1986.
[21] Straková, J. a kol.: *Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání.* Praha, VÚP 1998.
[22] Streefland, L.: *Realistic Mathematics Education in Primary School.* Freudenthal Institut, Utrecht 1991.
[23] Šedivý, J. a kol.: *Matematika pro 1. ročník gymnázia.* SPN, Praha, 1977.
[24] Tao, T.: *Co je dobrá matematika?* PMFA *53* (2008), 22–35.
[25] Vopěnka, P.: *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky.* Práh, Praha 2004.
[26] Vyšín, J.: *Metodika řešení matematických úloh.* SNP, Praha 1962.
[27] Vyšín, J. a kol.: *Geometrie pro pedagogické fakulty I.* SPN, Praha 1965.
[28] Wallas, G.: *The Art of Thought.* C. A. Watts, London 1945
[29] Wong, K., Y.: *Mathematics Education.* The Singapure Journey. World Scientific. London, 2009.
[30] Zedek, M. a kol.: *Vybrané úlohy z matematické olympiády (B, C).* SPN, Praha 1971.