Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Pavla Pavlíková

O Fareyových zlomcích

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 55 (2010), No. 2, 97–110

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141945

O Fareyových zlomcích

Pavla Pavlíková, Praha

Snad každý učitel matematiky se během svého působení v pedagogickém procesu setkal s žákem či studentem sčítajícím zlomky metodou

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1+2}{2+3}=\frac{3}{5}.$$

Ti šťastnější na tento problém narazili ve třídě na základní škole, kdy žáci ještě nemají pojem zlomku dobře zažitý a v oblasti operací se zlomky tápou. V současné době se však s podobnými matematickými úpravami – neúpravami čím dál tím častěji (k velké lítosti všech pedagogů) setkáváme i u studentů nastupujících do prvních ročníků na vysokých školách.

Nepředpokládáme, že by se někdo z čtenářů našeho časopisu domníval, že zmíněnou naivní operací obdrží součet zlomků. Co nám tedy ale vlastně při takovém „sčítání – nesčítání" vyjde? Položíme-li si tuto otázku, jsme na velmi dobré cestě k Fareyovým zlomkům.

V dalším textu se nejprve zaměříme na historii spjatou s tímto matematickým pojmem. Poté zmíníme některé zajímavé vlastnosti Fareyových zlomků, možnosti jejich geometrické reprezentace a vybrané aplikace.

Fareyovým zlomkem řádu n rozumíme každý zlomek $0 \leqq p/q \leqq 1$ v základním tvaru,[1]) kde $p \geqq 0$, $q \geqq 1$ jsou celá čísla taková, že $q \leqq n$. Podobně *Fareyovou posloupností řádu n* (někdy též Fareyovou řadou[2]) indexu n) rozumíme množinu

$$\mathcal{F}_n=\left\{\frac{p}{q}\,;\ 0\leqq p\leqq q\leqq n,\ (p,q)=1\right\}$$

uspořádanou vzestupně podle velikosti, kde (p,q) označuje největšího společného dělitele čísel p a q. Např. pro $n = 1,2,3,4,5$ dostáváme následující posloupnosti

[1]) Tuto definici můžeme přirozeně rozšířit na každý interval $\langle a, a+1\rangle$, kde a je celé číslo, budeme-li pracovat modulo 1. Někteří autoři také uvažují pouze zlomky $0 < p/q < 1$ daných vlastností, což není nijak zásadní omezení.

[2]) Toto pojmenování je sice hojně rozšířené, ale není v dnešní terminologii zcela korektní, neboť se jednotlivé členy nesčítají.

RNDr. Pavla Pavlíková, Ph.D., Ústav matematiky VŠCHT Praha, Technická 5, 166 28 Praha 6, e-mail: `Pavla.Pavlikova@vscht.cz`.

Přednáška byla poprvé pronesena v rámci *30. mezinárodní konference historie matematiky* v Jevíčku 24. srpna 2009.

Fareyových zlomků:

$$\mathcal{F}_1 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right)$$
$$\mathcal{F}_2 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right)$$
$$\mathcal{F}_3 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right)$$
$$\mathcal{F}_4 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right)$$
$$\mathcal{F}_5 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right).$$

Za své pojmenování tento zajímavý matematický pojem vděčí Johnu Fareyovi staršímu, který (ačkoliv sám nebyl matematikem) se dostal do výběru významných matematiků v databázi *MacTutor History of Mathematics* [18].

1. Úryvky z historie

Britský geolog a spisovatel John Farey starší (1766–1826) se narodil v roce 1766 v anglickém Woburnu v Bedfordshiru. Místní školu ve Woburnu navštěvoval až do svých šestnácti let, kdy odešel do Halifaxu studovat mimo jiné rýsování a vyměřování (zeměměřictví). Po studiích se přestěhoval k příbuzným do Londýna, kde se v roce 1790 oženil se Sophií Hubertovou (1770–1830). O rok později se jim narodil první syn; později měli manželé Fareyovi ještě dalších osm dětí, dvě z nich však zemřely brzy po narození.

V letech 1792 až 1802 pracoval na panství Francise Russella (1765–1802), pátého vévody z Bedfordu, jako správce jeho woburnských statků. V té době se zdokonalil v geologii. Byl přitom výrazně ovlivněn Williamem Smithem (1769–1839), expertem na stratigrafii a autorem první geologické mapy Anglie.[3]) Po vévodově smrti J. Farey o své místo přišel, a tak odešel do Londýna, kde si založil praxi jako poradce pro zeměměřictví a geologii. Mimo jiné vytvořil mapu podložních vrstev mezi Londýnem a Brightonem (tuto cestu velmi dobře znal ze svých častých návštěv u bratra v Brightonu). Známé je jeho dílo *General View of the Agriculture and Minerals of Derbyshire*, v němž studoval půdu a posloupnosti jednotlivých vrstev podloží v tomto hrabství. John Farey starší údajně publikoval více než dvě stě padesát vědeckých pojednání, především v *Reesově encyklopedii*,[4]) časopisech *Monthly Magazine* a *Philosophical*

[3]) Stratigrafie je geologický vědní obor, který se zabývá studiem stáří sedimentálních vrstev hornin a zkoumáním prostorového uspořádání vrstev na zemském povrchu v závislosti na čase.

[4]) *Reesovu encyklopedii* můžeme přirovnat k našemu *Ottovu slovníku naučnému.* Jejím editorem byl Abraham Rees (1743–1825). Vycházela postupně v rozmezí let 1802 až 1820, celkem obsahovala 39 svazků textu a 5 svazků obrázků.

Magazine.[5]) Jeho záběr byl velmi široký – psal o geologii, meteorologii, metrologii, zahradnictví, hudbě, matematice i pacifismu. Prvním z jeho pojednání bylo *On the measuring of timber* a posledním *On the velocity of the sound and on the Encke planet.*

Poté, co Farey zemřel, nabídla manželka jeho geologickou sbírku Britskému muzeu, které ji však odmítlo, a tak byla během dalších let rozdrobena.

Nejstarší syn, John Farey mladší (1791–1851), se proslavil jako strojní inženýr a autor jednoho z nejvíce ceněných technologických pojednání *Treatise on the Steam Engine* (1827) z období průmyslové revoluce. Již od svých čtrnácti let přispíval kresbami do Reesovy encyklopedie a patřil mezi první propagátory použití elipsografu při kreslení technických náčrtů.

Poslední léta svého života trávil J. Farey starší u svého syna na Howland Street v Londýně, odkud v roce 1816 zaslal do redakce časopisu *Philosophical Magazine* krátký dopis [6] sestávající ze čtyř odstavců, v němž popsal své pozorování, které lze shrnout zhruba takto: uvažujme všechny kmenné zlomky různých hodnot, jejichž jmenovatel (v základním tvaru) nepřesahuje libovolné zvolené číslo, a seřaďme je podle jejich velikosti. Potom platí zajímavá vlastnost: vezmeme-li v úvahu tři po sobě jdoucí zlomky v této posloupnosti a sečteme čitatele, resp. jmenovatele obou krajních zlomků z této trojice, dostaneme zlomek ležící mezi nimi (i když nemusí být zapsán v základním tvaru). Jestliže bude největší přípustný jmenovatel např. 5, potom všechny možné zlomky seřazené podle velikosti budou 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, a 4/5; zvolíme-li 1/3, pak dostaneme $(1 + 1)/(5 + 3) = 2/8 = 1/4$ jako nejmenší sousední zlomek menší než 1/3; nebo $(1 + 1)/(3 + 2) = 2/5$, jako největší sousední zlomek větší než 1/3. J. Farey poznamenal, že netuší, zda tato zvláštní vlastnost kmenných zlomků již byla někdy vyzdvižena, a vznesl tak dotaz na názor matematických čtenářů časopisu na tento problém.

Aniž by tušil, zapsal se tak do historie matematiky, přestože matematika nepatřila mezi hlavní cíle jeho zájmu. První důkaz pravdivosti jeho hypotézy podal francouzský matematik Augustin Louis Cauchy (1789–1857) v *Exercises de mathématique* [3] poté, co si přečetl francouzský překlad výše citovaného dopisu [7].

V literatuře zabývající se historií Fareyových zlomků se přitom v pěti ze šesti zdrojů dočteme, že *danou vlastnost těchto zlomků popsal v* [12] *C. Haros*[6]) *již v roce 1802* (viz např. [11, s. 36]).

---

[5]) *Philosophical Magazine* je nejstarší komerčně vydávaný vědecký časopis. Založil ho roku 1798 Richard Taylor (1781–1858). Od té doby je nepřetržitě vydáván společností Taylor & Francis. Řada předních vědců 19. a 20. století v něm publikovala své články. Původně se věnoval fyzice, chemii, astronomii, lékařství, botanice, biologii a geologii, od poloviny 20. století je zaměřen na fyziku kondenzovaného stavu.

[6]) Budeme-li však pátrat po jméně C. Haros, se zlou se potážeme. Vzhledem k tomu, že citovaná práce [12] vyšla ve Francii v době První Francouzské republiky (1792–1804), kdy bylo zvykem titulovat se „občan“ (C.=Citoyen=citizen), je možné předpokládat, že se jednalo o zkratku „občan Haros“. Půjdeme-li v našem pátrání dál, dovede nás stopa až ke knize Cypriena Prospera Brarda *Minéralogie appliquée aux arts: ou, Histoire des minéraux qui sont employés dans l'agriculture, l'économie domestique, la médecine; la fabrication des sels, des combustibles et des métaux; l'architecture et la décoration; la peinture et le dessin; les arts mécaniques; la bijouterie et la joaillerie Ouvrage destiné aux artistes, fabricans et*

Haros se zabýval aproximacemi pomocí zlomků, jejichž jmenovatel nepřekročil hodnotu 99. Bylo pro něj výhodné použít uspořádání zlomků podle velikosti: 1/99, 1/98, …, 96/97, 97/98, 98/99. Poznamenal a ověřil, že v této posloupnosti se každý zlomek liší od svých sousedů o převrácenou hodnotu součinu jmenovatelů obou zlomků. Rovněž ukázal, že pokud dva zlomky a/b a c/d splňují podmínku $bc - ad = 1$ a x/y je další zlomek ležící mezi a/b a c/d, který splňuje analogické podmínky vzhledem k a/b a c/d, potom x/y je *mediánem* zlomků a/b a c/d. Harosův výsledek však zůstal dlouho nepovšimnut, a tak popsané posloupnosti zlomků dodnes nesou Fareyovo jméno (pouze výjimečně bývají označovány jako Harosovy–Fareyovy, viz např. [4]).

Velmi tvrdě a nepříliš spravedlivě hodnotil Fareyův přínos slavný anglický matematik Godfrey Harold Hardy (1877–1947):

[*Farey*] *nepodal žádný důkaz a je nepravděpodobné, že by nějaký našel, neboť se zdál být v nejlepším případě bezvýznamným matematikem … Přísluší mu dvacetiřádkový odkaz ve slovníku Dictionary of National Biography, kde je popsán jako geolog. Jako geolog však byl zapomenut a autor jeho biografie nezmínil jedinou věc z jeho života, v níž jeho odkaz přežívá.*[7])

Jak je ale vidět z textu Fareyova dopisu, o důkaz se zřejmě nepokoušel. Vznesl pouze dotaz na matematickou veřejnost, zda je jeho pozorování již známé či nikoliv. Hardyho poznámka o tom, že jako geolog byl zapomenut, rovněž Fareyovi poněkud křivdí. Ještě tvrdší jsou slova v Hardyho knize [10, s. 72]:

I v matematice občas dějiny vyvolávají zvláštní optický klam; … Farey je nesmrtelný, protože nepochopil větu, již Haros přesně *dokázal o čtrnáct let dříve.*

Jak už to tak bývá, když se dva perou o prvenství, třetí vyhrává. Na problematiku Fareyových zlomků totiž narazíme už v díle Nicolase Chuqueta ($\sim$ 1445–1488) nazvaném *Triparty en la science des nombres* (Věda o číslech ve třech dílech). Rukopis má cca 300 stran a je uložený v Bibliothéque Nationale v Paříži. Chuquet sám za svůj velmi důležitý výsledek považoval nerovnost

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d},$$

kterou využíval mimo jiné při výpočtech racionálních aproximací iracionálních odmocnin.

2. Vlastnosti Fareyových zlomků

Počet Fareyových zlomků řádu n pro $n = 1$ až 9 ukazuje následující tabulka:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lvert\mathcal{F}_n\rvert$	2	3	5	7	11	13	19	23	29

entrepreneurs, Volume 1. z roku 1821, kde najdeme drobnou zmínku o tabulkách z roku 1802, jejichž autorem je Charles Haros.

[7]) Volně přeloženo podle [11].

Počáteční nadšení z prvočíselných hodnot, které by tabulka mohla u některých čtenářů vyvolat, záhy pokazí $|\mathcal{F}_{10}| = 33$. Přesto lze u $|\mathcal{F}_n|$ pozorovat některé zajímavé vlastnosti, např. chování[8]) pro velké hodnoty n:

$$|\mathcal{F}_n| = 1 + \sum_{k \leqq n} \varphi(k) = \frac{3}{\pi^2} n^2 + \mathcal{O}(n \log n).$$

V roce 1883 uveřejnil James Joseph Sylvester (1814–1897) tabulku, ve které porovnával hodnoty $|\mathcal{F}_n|$ a $3n^2/\pi^2$ pro $n = 1$ až 500. Později ji rozšířil až do 1000 (viz [27]).

Obecně lze konstatovat, že posloupnosti Fareyových zlomků téhož řádu mají spoustu zajímavých vlastností. Uvedeme některé z nich:

Jestliže a/b a c/d jsou dva sousední Fareyovy zlomky téhož řádu n, pak

a) $|ad - bc| = 1$,

b) $b + d \geqq n + 1$.

Tzv. *mediánová* vlastnost,[9]) která upoutala pozornost Johna Fareye, by se dala vystihnout takto: jsou-li a/b, c/d, e/f tři po sobě bezprostředně následující Fareyovy zlomky téhož řádu, pak platí

$$\frac{c}{d} = \frac{a+e}{b+f}. \tag{$*$}$$

Uvažujeme-li Fareyovu posloupnost $\mathcal{F}_n$ řádu n a vytvoříme-li z ní dvě další posloupnosti – posloupnost čitatelů $\mathcal{F}_{cn}$ a posloupnost jmenovatelů $\mathcal{F}_{jn}$, viz př.

$$\mathcal{F}_4 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \mathcal{F}_{c4} &= (0, 1, 1, 1, 2, 3, 1)\,, \\ \mathcal{F}_{j4} &= (1, 4, 3, 2, 3, 4, 1)\,, \end{aligned}$$

pak pro nově získané posloupnosti platí:

1) posloupnost $\mathcal{F}_{cn}$ vždy začíná 0 a poté následuje $(\lfloor n/2 \rfloor + 1)$-krát 1,

2) posloupnost $\mathcal{F}_{jn}$ je palindromická,

3) posloupnost $\mathcal{F}_{jn}$ neobsahuje pro $n > 1$ dva po sobě jdoucí stejné členy.

Fareyovy zlomky x_k/y_k řádu n lze generovat pomocí rekurentních formulí

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \quad x_1 = 1, \quad x_{k+2} = \left\lfloor \frac{y_k + n}{y_{k+1}} \right\rfloor x_{k+1} - x_k, \\ y_0 &= 1, \quad y_1 = n, \quad y_{k+2} = \left\lfloor \frac{y_k + n}{y_{k+1}} \right\rfloor y_{k+1} - y_k. \end{aligned}$$

---

[8]) Připomeňme, že Eulerova funkce φ je definována pro přirozená čísla n jako počet čísel nepřesahujících n s číslem n nesoudělných, např. $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2, \ldots, \varphi(7) = 6$, $\varphi(8) = 4, \ldots, \varphi(p) = p - 1$ pro p prvočíselné atd.

[9]) Tato vlastnost je ekvivalentní s vlastností a).

Fareyovy stromy. Posloupnosti Fareyových zlomků lze rovněž konstruovat pomocí tzv. Fareyova stromu:[10])

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\frac{0}{1} & & & & & & & & & & & & & & & & \frac{1}{1} \\
 & & & & & & & & \frac{1}{2} & & & & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{3} & & & & & & & & \frac{2}{3} & & & & \\
 & & \frac{1}{4} & & & & \frac{2}{5} & & & & \frac{3}{5} & & & & \frac{3}{4} & & \\
 & \frac{1}{5} & & \frac{2}{7} & & \frac{3}{8} & & \frac{3}{7} & & \frac{4}{7} & & \frac{5}{8} & & \frac{5}{7} & & \frac{4}{5} & \\
 & & & & & & & & \text{atd.} & & & & & & & &
\end{array}
$$

Ze „semínek“ v podobě zlomků 0/1 a 1/1 nám v dalších řádcích s použitím vlastnosti $(*)$ vyrůstají další zlomky. V n-tém řádku přibude 2^{n-2} nových zlomků. V nekonečném stromu se pak každé racionální číslo z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ vyskytne právě jednou.

Pokud budeme Fareyův strom procházet systémem *cik-cak* z pravého horního rohu dolů vždy směrem o jeden prvek vlevo a poté vpravo atd., obdržíme posloupnost zlomků

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \ldots, \frac{u_n}{u_{n+1}}, \ldots,$$

kde $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ je Fibonacciho posloupnost.

Řetězové zlomky. Ke hledání sousedních Fareyových zlomků lze výhodně využít zlomků řetězových.[11]) Každé racionální číslo z intervalu $(0, 1)$ lze zapsat ve tvaru konečného řetězového zlomku dvěma různými způsoby (v závislosti na tom, zda požadujeme na konci rozvoje 1 či nikoliv):

$$\frac{p}{q} = [\,0;\ a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, 1] = [\,0;\ a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1];$$

nejbližším sousedům zlomku p/q ve Fareyově posloupnosti řádu q přitom odpovídají rozvoje

$$[\,0;\ a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] \quad \text{a} \quad [\,0;\ a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}].$$

[10]) Zde vlastně jde o podstrom tzv. Sternova–Brocotova stromu, který nezávisle na sobě zavedli v [26] a [1] německý matematik a nástupce samotného Carla Friedricha Gausse (1777 až 1855) na stolici řádného profesora matematiky na univerzitě v Göttingen Moritz Abraham Stern (1807–1894) v roce 1858 a francouzský hodinář a amatérský matematik Achille Brocot (1817–1878) v roce 1860.

[11]) Řetězovým zlomkem rozumíme výraz

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots}},$$

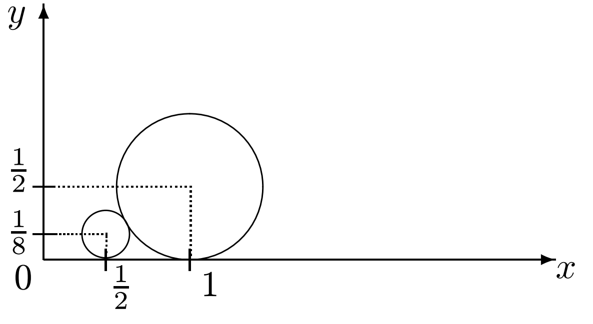
což zkráceně zapisujeme jako $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$, kde a_0 je libovolné celé číslo a a_1, a_2, …jsou přirozená čísla.

Např. $2/5 = [0;\, 2, 2] = [0;\, 2, 1, 1]$. Sousedními zlomky $2/5$ ve Fareyově posloupnosti řádu 5 tedy budou

$$[0;\, 2] = \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad [0;\, 2, 1] = \frac{1}{3}.$$

3. Geometrické interpretace

Znázornění pomocí Fordových kruhů. Zajímavý způsob geometrického znázornění (nejen Fareyových) zlomků („Ford Circles") ukázal americký matematik Lester Randolph Ford starší[12]) v článku [8]. Zlomku p/q podle něj odpovídá kruh $C\,[p/q]$ se středem v bodě $\big(p/q, 1/(2q^2)\big)$ o poloměru $1/(2q^2)$.



Obr. 1. Fordovy kruhy pro zlomky $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{1}$.

Jsou-li p/q, P/Q dva navzájem různé zlomky v základním tvaru, pak jim odpovídající Fordovy kruhy buď nemají žádný společný bod, nebo se dotýkají. Je-li $0 < p/q < 1$, potom Fordovy kruhy, které se dotýkají kruhu $C\,[p/q]$, odpovídají kruhům pro zlomky, které jsou sousedy p/q ve Fareyově posloupnosti.

Na obr. 1 jsou znázorněny Fareyovy kruhy odpovídající zlomkům $1/2$, $1/1$. Pokud bychom chtěli obrázek doplnit o třetí Fordův kruh, který by se obou daných kruhů dotýkal, snadno bychom zjistili, že se jedná o kruh se středem v bodě $(2/3, 1/18)$, což odpovídá skutečnosti, že společným sousedem $1/2$ a $1/1$ ve Fareyově posloupnosti řádu 3 je právě zlomek $2/3$.

Pokud sečteme obsahy všech Fordových kruhů odpovídajících zlomkům z intervalu $\langle 0, 1)$, zkráceným do základního tvaru, obdržíme součet konvergentní řady

$$\sum_{q \geqq 1} \sum_{\substack{(p,q)=1 \\ 1 \leqq p \leqq q}} \pi \left(\frac{1}{2q^2}\right)^2 .$$

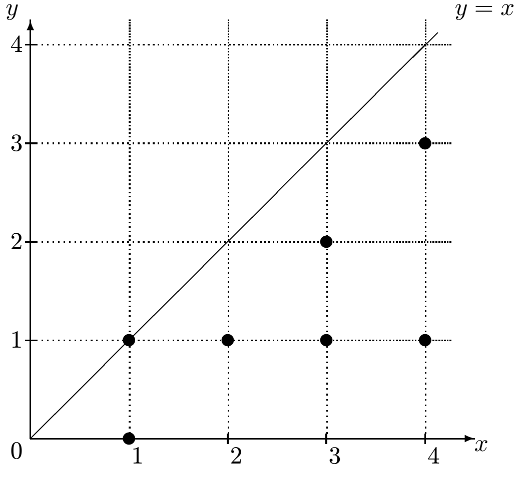
[12]) Lester Randolph Ford starší (1886–1975) byl řadu let vedoucím redaktorem časopisu *The American Mathematical Monthly.* Na jeho počest je od roku 1964 udělována cena *Lester R. Ford's Award* za nejlepší články uveřejněné v tomto časopise. Jeho syn Lester Randolph Ford mladší (nar. 1925) je znám jako spoluautor Fordova–Fulkersonova algoritmu pro určení maximálního toku v síti.

Po úpravě[13]) odtud plyne

$$S = \frac{\pi}{4} \sum_{q \geqq 1} \frac{1}{q^4} \sum_{\substack{(p,q)=1 \\ 1 \leqq p < q}} 1 = \frac{\pi}{4} \sum_{q \geqq 1} \frac{\varphi(q)}{q^4} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\zeta(3)}{\zeta(4)} = \frac{45}{2} \frac{\zeta(3)}{\pi^3} \approx 0.8723\ldots$$

Zajímavé aplikace Fordových kruhů v umění a počítačové grafice lze najít na stránkách [13].

Znázornění pomocí mřížových bodů. Uvažujme síť nezáporných mřížových bodů v kartézské soustavě souřadné. Zlomek m/n znázorníme v této síti jako bod (n, m). Řekneme, že je zlomek m/n *viditelný*, jestliže úsečka spojující body $(0, 0)$ a (n, m) neobsahuje žádný mřížový bod uvnitř. Je zřejmé, že pro $n \neq 0$, $m \neq 0$ je bod (n, m) viditelný právě tehdy, když největší společný dělitel čísel m, n je roven 1.



Obr. 2. Posloupnost $\mathcal{F}_4 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right)$ v síti celočíselných mřížových bodů.

Nyní soustředíme pozornost na všechny body, které leží uvnitř nebo na hranici trojúhelníku ohraničeného osou x, přímkou $y = x$ a přímkou $x = n$. Jestliže necháme vektor $(n, 0)$ rotovat kolem počátku soustavy souřadné proti směru pohybu hodinových ručiček, narazíme postupně na jednotlivé mřížové body přesně v tom pořadí, které odpovídá zlomkům ve Fareyově posloupnosti řádu n (viz obr. 2). Zmínku o souvislosti Fareyových zlomků a mřížových bodů lze najít již v práci J. J. Sylvestra [28].

[13]) Při odvození je využito identit platných pro Riemannovu dzeta funkci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \qquad \text{a} \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Pokud vybereme dvojici mřížových bodů odpovídajících sousedním Fareyovým zlomkům a/b a c/d a doplníme ji bodem $(0, 0)$, obdržíme trojúhelník, jehož obsah podle Pickovy věty[14]) bude roven $1/2$. Podle popsaného postupu totiž na hranici takového trojúhelníku nemůže ležet jiný mřížový bod než vrchol a uvnitř nemůže být žádný vnitřní bod viditelný z počátku. Je proto zřejmé, že pro vrcholy trojúhelníku musí platit podmínka $|ad-bc| = 1$, tedy vlastnost a). Na souvislost Fareyových zlomků s Pickovou větou o mřížových bodech v rovině upozorňují mimo jiné články [2] a [22].

Fareyova hvězdice. V roce 1911 vydal český matematik Karel Rychlík (1885–1968) v *Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky* krátký článek nazvaný *Geometrické znázornění řetězců*, viz [23]. Ve svém článku uvažoval síť celočíselných mřížových bodů, ve které zlomku q/p přiřazoval vektor, jehož počátečním bodem byl bod $(0, 0)$ a koncovým bodem bod (p, q). Vektory odpovídající viditelným bodům ve smyslu předchozí definice nazýval *elementárními vektory.* Dále zavedl termín *Fareyova hvězdice:*

- uvažoval čtverec v mřížové síti s vrcholy (n, n), $(n, -n)$, $(-n, n)$ a $(-n, -n)$, kde $n \in \mathbb{N}$,
- spojil všechny mřížové body uvnitř i na obvodu čtverce s bodem $(0, 0)$,
- z takto získaných vektorů dále bral v úvahu pouze vektory elementární,
- vzniklý hvězdicovitý obrazec nazval *n-tou Fareyovou hvězdicí.*[15])

Poznamenal, že $(n + 1)$-ní hvězdici lze z n-té získat dvěma způsoby:

a) přidáme všechny vektory z počátku, jejichž koncový bod leží na obvodu čtverce s vrcholy $(n + 1, n + 1)$, $(n + 1, -n - 1)$, $(-n - 1, n + 1)$ a $(-n - 1, -n - 1)$, a z nich vyškrtneme všechny vektory, které nejsou elementární,

b) mezi každé dva sousední vektory v n-té hvězdici přidáme vektor odpovídající jejich součtu a z takto nově přidaných vektorů ponecháme jen ty, které nepřekročí hranici $(n + 1)$-ního čtverce.

K. Rychlík vše odvozoval na základě geometrických úvah. Až na závěr poznamenal, že pokud budeme procházet n-tou Fareyovu hvězdici ve směru otáčení vektoru $(n, 0)$ proti směru pohybu hodinových ručiček, získaná posloupnost bodů, na které takto narazíme, bude odpovídat n-té Fareyově posloupnosti (resp. v jeho terminologii Fareyově řadě).

---

[14]) Jestliže n-úhelník $\mathcal{M}$, jehož vrcholy jsou mřížové body, obsahuje celkem h mřížových bodů na své hranici a u mřížových bodů uvnitř, pak má obsah (viz [21])

$$S(\mathcal{M}) = \frac{1}{2}h + u - 1.$$

Georg Alexander Pick (1859–1942) se narodil v židovské rodině ve Vídni. Vystudoval matematiku a fyziku, řadu let působil na německé univerzitě v Praze, kde se mimo jiné přátelil i s Albertem Einsteinem. V roce 1927 se vrátil do Vídně, odkud v roce 1938 utekl před německými okupanty zpět do Prahy. Nacistům však neunikl – v roce 1942 zemřel v terezínském koncentračním táboře.

[15]) Nultou Fareyovu hvězdici definoval pomocí vektorů $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$.

4. Fareyovy zlomky a Riemannova hypotéza

Slavná Riemannova hypotéza tvrdí, že všechny netriviální nulové body funkce

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

leží na tzv. *kritické přímce* $\mathrm{Re}(s) = 1/2$. Sám Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) ji nedokázal a přes obrovskou snahu mnoha matematiků v letech následujících jeho hypotéza čeká na důkaz dosud. V průběhu času se však při hledání důkazu začaly objevovat mnohé matematické věty typu: *Platnost Riemannovy hypotézy je ekvivalentní tomu, že platí ...* Příkladem takové věty byl výsledek Johna Edensora Littlewooda (1885–1977) z roku 1912, který ukázal ekvivalenci Riemannovy hypotézy s podmínkou[16])

$$\mathcal{M}(q) = \sum_{a=1}^{\lfloor q \rfloor} \mu(a) = \mathcal{O}\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

pro libovolně malé $\varepsilon > 0$. Souvislostmi Fareyových zlomků s Riemannovou hypotézou o nulových bodech dzeta funkce se začal zabývat J. Franel[17]) (viz [9]), který na základě Littlewoodova výsledku dokázal ekvivalenci:

$$\text{Riemannova hypotéza platí} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \sum_{\nu=1}^{m} \left(r_\nu - \frac{\nu}{m}\right)^2 = \mathcal{O}\left(q^{-1+\varepsilon}\right),$$

kde r_ν probíhá všechny Fareyovy zlomky řádu q z intervalu $(0,1)$ a $m = |\mathcal{F}_q|$. Na Franelovu práci navázal Edmund Georg Hermann Landau (1877–1938), viz [17]. Dokázal další dvě ekvivalence:

$$\text{Riemannova hypotéza platí} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \sum_{\nu=1}^{m} \cos 2\pi r_\nu = \mathcal{O}\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

$$\text{Riemannova hypotéza platí} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \sum_{\nu=1}^{m} \left|r_\nu - \frac{\nu}{m}\right| = \mathcal{O}\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

[16]) Möbiova funkce μ je definována pro $n \in \mathbb{N}$ jako $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^k$ pro n ve tvaru součinu k různých prvočísel, který není dělitelný druhou mocninou žádného z nich, $\mu(n) = 0$ v ostatních případech. Např. $\mu(2) = -1$, $\mu(3) = -1$, $\mu(4) = 0$, $\mu(5) = -1$, $\mu(6) = 1$ atd. Funkce $\mathcal{M}(x)$ bývá v literatuře pojmenována jako Mertensova. Franz Carl Joseph Mertens (1840–1927) byl mimochodem první, kdo použil označení $\mu(n)$ pro Möbiovu funkci.

[17]) Franelovo jméno nesou čísla $1, 2, 10, 56, 346, \ldots$, obecně tvaru $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^3$.

Kromě jiných se o tuto problematiku zajímali i čeští matematici Miloš Kössler (1884–1961) a Jiří Kopřiva.[18]) Miloš Kössler se Fareyovými zlomky v souvislosti s Riemannovou hypotézou zabýval ve svých denících (viz [20]). Jiří Kopřiva v článku [15] dokázal následující ekvivalence:

$$\text{Riem. hypotéza platí} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{r_\nu}^{q} \left(r_\nu^2 - \frac{1}{3} \right) = \mathcal{O}\left(q^\alpha\right) \quad \text{pro každé } \alpha \in \left(\tfrac{1}{2}, 1\right).$$

$$\text{Riem. hypotéza platí} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{r_\nu}^{q} \left(r_\nu^3 - \frac{1}{4} \right) = \mathcal{O}\left(q^\alpha\right) \quad \text{pro každé } \alpha \in \left(\tfrac{1}{2}, 1\right).$$

$$\text{Riem. hypotéza platí} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{r_\nu}^{q} \left(\frac{1}{4} - r_\nu \right) = \mathcal{O}\left(q^\alpha\right) \quad \text{pro každé } \alpha \in \left(\tfrac{1}{2}, 1\right).$$

Symbolem $\sum\limits_{r_\nu}^{q}$ je přitom označen součet uvažovaný přes všechny Fareyovy zlomky řádu q. V Kopřivově pojednání [16] byly tyto výsledky do jisté míry zobecněny.

5. Fareyovy zlomky a racionální aproximace

Fareyovy zlomky nacházejí široké uplatnění v teorii racionálních aproximací. Jak jsme již uvedli, N. Chuquet použil v *Triparty* Fareyovy zlomky k hledání racionálních aproximací iracionalit. Citujme z [24, s. 194]:

> *Jako příklad jejího využití si z Triparty uveďme výpočet* $\sqrt{6}$*, která zřejmě leží mezi čísly 2 a 3. Začneme s* $2\frac{1}{3}$ *a* $2\frac{1}{2}$*, z nichž čtverec prvního je* $6-\frac{5}{9}$ *a čtverec druhého* $6+\frac{1}{4}$*. Správné číslo leží mezi nimi a v intervalu* $\langle\frac{1}{3},\frac{1}{2}\rangle$ *najdeme první přiblížení* $\frac{1+1}{2+3}=\frac{2}{5}$*. Avšak čtverec* $2\frac{2}{5}$ *je* $6-\frac{6}{25}$*, tedy opět málo. Další volba bude* $\frac{2+1}{5+2}=\frac{3}{7}$*, což opět nestačí a ani* $2\frac{4}{9}$ *není dost velké. Teprve následná volba* $\frac{4+1}{9+2}=\frac{5}{11}$ *vede k překročení čísla 6, neboť* $\left(\frac{27}{11}\right)^2$ *je již o* $\frac{3}{121}$ *převyšuje. Takže nyní hledáme číslo mezi* $2\frac{4}{9}$ *a* $2\frac{5}{11}$ *a tak pokračujeme dále, až se desátým krokem dostaneme k číslu* $2\frac{89}{198}$*, jehož čtverec převyšuje 6 pouze o* $\frac{1}{39204}\approx 0.0000255$*. Pokud ještě nejsme spokojeni, najdeme mezi* $2\frac{40}{89}$ *a* $2\frac{89}{198}$ *po několika dalších krocích číslo* $2\frac{881}{1960}$*, jehož čtverec již převyšuje 6 už jen o* $\frac{1}{3841600}\approx 0.00000026$.

Je všeobecně známo, že množina všech racionálních čísel je hustá v množině všech reálných čísel, a proto se dá každé reálné číslo α s libovolnou přesností aproximovat pomocí zlomku p/q.

---

[18]) Jiří Kopřiva (1925) na Přírodovědecké fakultě UK v Praze vystudoval matematiku a deskriptivní geometrii, od roku 1962 působil na ČVUT v Brně ve výpočetním centru. Mezi oblasti jeho vědeckého zájmu patří teorie čísel, obecná topologie a informatika. O jeho životě viz např. Hořejš, J., *Doc. Jiří Kopřiva šedesátiletý*, Čas. pěst. mat. *110* (1985), 333–336.

Podle Dirichletovy věty dokonce platí, že každé iracionální číslo α lze aproximovat pomocí nekonečně mnoha zlomků p/q s přesností lepší než $1/q^2$. Pro vyhledávání racionálních aproximací zaručených Dirichletovou větou jsou vhodné právě Fareyovy zlomky. Je-li totiž iracionální číslo $\alpha \in (0,1)$ sevřené mezi dvěma po sobě jdoucími Fareyovými zlomky, tj. $a/b < \alpha < c/d$, pak zřejmě buď a/b, nebo c/d splňuje podmínku

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Platí dokonce věta: Nechť a/b a c/d jsou dva sousední Fareyovy zlomky téhož řádu a nechť iracionální číslo α vyhovuje podmínce $a/b < \alpha < c/d$. Pak alespoň jeden z trojice zlomků a/b, c/d, $(a+c)/(b+d)$ splňuje nerovnost

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, q^2}.$$

Konstanta $\sqrt{5}$ ve jmenovateli je přitom největší možná, jak ukazuje Hurwitzova věta z roku 1891 (viz např. [14]).

6. Další vybrané aplikace Fareyových zlomků

Diofantické rovnice. Jednou z mnoha dalších aplikací Fareyových zlomků může být jejich použití při řešení diofantických rovnic tvaru $ax - by = 1$, kde a, b jsou přirozená nesoudělná čísla.

Máme-li k dispozici např. Nevillovy tabulky [19] Fareyových posloupností řádu 1025 z roku 1950, snadno můžeme najít přirozená řešení rovnice $ax - by = 1$ nalezením nejbližších Fareyových zlomků menších než a/b. Jako triviální příklad můžeme uvést rovnici

$$11x - 13y = 1,$$

snadno najdeme sousední zlomky k $11/13$:

$$\frac{5}{6}, \frac{16}{19}, \frac{27}{32} \text{ atd.},$$

které odpovídají řešením dané rovnice $x_1 = 6, y_1 = 5$; $x_2 = 19, y_2 = 16$ atd.

Egyptské zlomky. Fareyovy zlomky můžeme využít i v případě, kdy hledáme postup, jak daný zlomek zapsat způsobem, který používali staří Egypťané – tj. jako součet přirozeného čísla, navzájem různých kmenných zlomků (zlomků s čitatelem rovným jedné) a případně $2/3$ (srovnání několika dalších algoritmů pro zápis čísla pomocí egyptských zlomků lze najít např. v článku [25]).

Z variant

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{35} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35}$$

vyhovovala pouze varianta poslední. Jak ji ale objevit? Uvažujme obecně zlomek $0 < p/q < 1$ v základním tvaru a Fareyovu posloupnost řádu q. Ta obsahuje všechny zlomky z daného intervalu se jmenovatelem q, tedy i p/q. Ve Fareyově stromu bude zlomku p/q předcházet zlomek p_1/q_1, pro který $q_1 < q$ a

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q}.$$

Opakováním tohoto postupu dostaneme rozvoj

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{q_k} + \frac{1}{q_k q_{k-1}} + \frac{1}{q_{k-1} q_{k-2}} + \cdots + \frac{1}{q_2 q_1} + \frac{1}{q_1 q}.$$

Vrátíme-li se ke zlomku 3/7, jeho předchůdcem ve Fareyově stromu je zlomek 2/5, odkud plyne $3/7 = 2/5 + 1/35$. Předchůdcem 2/5 ve Fareyově stromu je zlomek 1/3, odkud $2/5 = 1/3 + 1/15$, a tedy

$$3/7 = 2/5 + 1/35 = 1/3 + 1/15 + 1/35.$$

Závěr. Výskyt Fareyových zlomků se neomezuje pouze na výše zmíněné problémy. Můžeme se s nimi setkat při studiu fraktálů (souvislostmi Fareyových zlomků s Mandelbrotovou množinou[19]) se zabývá např. článek [5]) či v teorii přenosu informace atd. Cílem tohoto článku nebylo podat vyčerpávající přehled o Fareyových zlomcích, ale upozornit na různé zajímavé aspekty a překvapující souvislosti demonstrující krásu matematiky.

L i t e r a t u r a

[1] Brocot, A.: *Calcul des rouages par approximation, nouvelle méthode,* Revue Chronométrique *3* (1861), 186–194.

[2] Bruckheimer, M., Arcavi, A.: *Farey series and Pick's area theorem,* Math. Intelligencer *17* (1995), 64–67.

[3] Cauchy, A. L.: *Exercises d'analyse et de physique mathématique,* Vol. I–IV, 1840, 1847.

[4] Cobeli, C., Zaharescu, A.: *The Haros-Farey sequence at two hundred years,* Acta Universitatis Apulensis *5* (2003), 1–38.

[5] Devaney, R. L.: *The Mandelbrot set and the Farey tree and Fibonacci sequences,* Amer. Math. Monthly *106* (1999), 289–302.

[6] Farey, J.: *On a curious property of vulgar fractions,* Philosophical Magazine *47* (1816), 385–386.

---

[19]) Mandelbrotova množina $\mathcal{M}$ je množina všech parametrů $c \in \mathbb{C}$, pro které je posloupnost $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ určena rekurentně podmínkami

$$y_{n+1} = y_n^2 + c, \quad y_1(c) = 0,$$

omezená.

[7] FAREY, J.: *Propriété curieuse des fractions ordinaires,* Bulletin des Sciences par la Société Philomatique de Paris *3* (1816), 133–135.

[8] FORD, L. R.: *Fractions,* Amer. Math. Monthly *45* (1938), no. 9, 589–601.

[9] FRANEL, J.: *Les suites de Farey et les problèmes des nombres premières,* Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. 1924, 198–201.

[10] HARDY, G. H.: *Obrana matematikova,* Prostor, Praha 1994.

[11] HARDY, G. H., WRIGHT E. M.: *An Introduction to the Theory of Numbers,* Oxford University Press, 1979.

[12] HAROS, C.: *Tables pour évaluer une fraction ordinaire avec autand de decimals qu'on voudra; et pour trouver la fraction ordinaire la plus simple, et dui a approche sensiblement d'une fraction décimale,* Journal de l'École Polytechnique *4* (1802), 364–368.

[13] *Josleys* [cit. 5. 6. 2009], `http://www.josleys.com/show_gallery.php`.

[14] KLAZAR, M.: *Kaleidoskop teorie čísel (2. kapitola),* Univerzita Karlova, Praha, KAM-DIMATIA Series preprint no. *468* (2000), 1–7.

[15] KOPŘIVA, J.: *O jednom vztahu Fareyovy řady k Riemannově domněnce o nulových bodech funkce dzeta,* Čas. pěst. mat. *78* (1953), 49–55.

[16] KOPŘIVA, J.: *Příspěvek ke vztahu Fareyovy řady a Riemannovy domněnky,* Čas. pěst. mat. *79* (1954), 77–82.

[17] LANDAU, E.: *Bemerkungen zu vorstehenden Abhandlung von Herrn Franel,* Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. 1924, 202–206.

[18] *MacTutor History of Mathematics* [cit. 6. 6. 2009], `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies`.

[19] NEVILLE, E. H.: *The Farey series of order 1025, displaying solutions of the diophantine equation $bx - ay = 1$,* Royal Society Math. Tables, Vol. I., Cambridge, University Press, 1950.

[20] PAVLÍKOVÁ, P.: *125 let od narození Miloše Kösslera (1884–1961),* PMFA *54* (2009), 144–156.

[21] PICK, G.: *Geometrisches zur Zahlenlehre,* Zeit. Vereines „Lotos“ *19* (1899), 311–319.

[22] PÓLYA, G.: *Über eine geometrische Darstellung der Fareyschen Reihe,* Actaerarum ac Scientarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Sectio Scientarum Mathematicarum *2* (1925), 129–133.

[23] RYCHLÍK, K.: *Geometrické znázornění řetězců,* Čas. pěst. mat. a fys. *40* (1911), 225–236.

[24] SAXL, I.: *Matematika v době Paracelsově,* in 30. mezinárodní konference Historie matematiky (ed. Bečvář, J., Bečvářová, M.), Matfyzpress, 2009, 192–201.

[25] STACHOVCOVÁ, L.: *Vyjádření racionálního čísla pomocí Egyptských zlomků,* Učitel matematiky *9* (2001), č. 4, 211–218.

[26] STERN, M. A.: *Über eine zahlentheoretische Funktion,* Crelle's Journal *55* (1858), 193–220.

[27] SYLVESTER, J. J.: *On the number of fractions contained in any Farey series of which the limiting number is given,* Philosophical Magazine *15* (1883), 251–257, Philosophical Magazine *16* (1883), 230–233.

[28] SYLVESTER, J. J.: *A constructive theory of partitions, arranged in three acts, an interact and an exodion,* American Journal of Mathematics *5* (1882), 251–330, American Journal of Mathematics *6* (1884), 334–336.