Miroslav Fiedler

Hrátky s geometrií, čísly a maticemi

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 55 (2010), No. 1, 19–29

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141934

Hrátky s geometrií, čísly a maticemi

Miroslav Fiedler, Praha

1. Geometrie

Je dobře známo, že trojúhelník je určen (až na polohu) třemi stranami. Jsou-li délky stran a, b, c, pak číselně je podmínka existence vyjádřena kladností čísel a, b, c, a trojúhelníkovými nerovnostmi $a < b + c$, $b < a + c$ a $c < a + b$. Tyto nerovnosti lze zapsat i jednou nerovností $2\max(a, b, c) < a + b + c$, anebo také „algebraičtější" nerovností $-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 > 0$ (levá strana je totiž rovna $(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$).

Méně je známo, jaké jsou nutné a postačující podmínky pro to, aby ze šesti délek hran bylo možno sestrojit čtyřstěn. Určitě nestačí trojúhelníkové nerovnosti (proč?). Abychom problém lépe zformulovali, budeme délky označovat dvojicemi různých indexů: $d_{12}, d_{13}, d_{14}, d_{23}, d_{24}, d_{34}$, a d_{ik}, $i \neq k$, má být délka hrany A_iA_k čtyřstěnu s vrcholy A_1, A_2, A_3 a A_4.

Uvedeme nyní několik vět, které dokážeme pomocí matic v druhé části.

Věta 1. *Nutná a postačující podmínka pro existenci čtyřstěnu je:*

$$d_{12}^2x_1x_2 + d_{13}^2x_1x_3 + d_{14}^2x_1x_4 + d_{23}^2x_2x_3 + +d_{24}^2x_2x_4 + d_{34}^2x_3x_4 < 0, \tag{1}$$

kdykoliv x_1, x_2, x_3, x_4 *jsou reálná čísla splňující* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

(Všimněte si, že z této podmínky plyne i nenulovost: pro $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = x_4 = 0$ dává (1), že $d_{12}^2 > 0$.)

Čtyřstěn má šest vnitřních úhlů (mezi stěnami). Proti každému z nich je jedna hrana. Ptejme se, které vnitřní úhly mohou být ostré, které tupé a které pravé. K charakterizaci užijeme obarvení protějších hran: Je-li vnitřní úhel ostrý, obarvíme protější hranu červeně, je-li tupý, modře a je-li pravý, bíle.
Platí pak:

Věta 2. *Obarvení je možné tehdy a jen tehdy, spojují-li červené hrany všechny vrcholy.* (Všimněte si, že totéž je splněno i u trojúhelníka! Platí to i ve vícerozměrných prostorech u tzv. simplexů.)

Z této věty ovšem plyne:

Věta 3. *Každý čtyřstěn má alespoň tři vnitřní úhly ostré, a také, že existují čtyřstěny, které mají tři vnitřní úhly ostré a zbylé tři pravé.*

Prof. RNDr. Miroslav Fiedler, DrSc., Ústav informatiky AV ČR, v.v.i., Pod vodárenskou věží 2, 182 07 Praha 8, e-mail: `fiedler@cs.cas.cz`

Upraveno z přednášek přednesených v rámci Dne otevřených dveří v Matematickém ústavu a Ústavu informatiky AV ČR.

O těchto posledních můžeme říci, že jsou dvou typů: u prvního jdou ty tři červené hrany z jednoho vrcholu (jako v rohu místnosti). Druhý typ je zajímavější. Dostaneme jej, zvolíme-li na kvádru jednu hranu, např. AB, z bodu B pokračujeme další hranou BC a z bodu C další hranou CD tak, aby hrana CD byla kolmá na obě předchozí. Čtyřstěn s vrcholy A, B, C a D s uvedenými třemi červenými hranami bude ten „pravoúhlý“ druhého druhu.

(Všimněte si, že i první typ se stejným způsobem vejde na kvádr. U druhého typu je střed nejdelší hrany středem opsané kulové plochy čtyřstěnu, obdobně jako u pravoúhlého trojúhelníka.)

Věta 4. *Pravoúhlý čtyřstěn druhého typu je charakterizován i tím, že všechny jeho stěny jsou pravoúhlé trojúhelníky.*

Věta 5. *Pravoúhlý čtyřstěn druhého typu se stejně dlouhými červenými hranami má i vlastnost, že z šesti (přesněji tří a tří zrcadlově souměrných) takových lze složit krychli.*

Čtyřstěn nazýváme *netupoúhlý*, je-li každý jeho vnitřní úhel ostrý nebo pravý. Pak platí:

Věta 6. *Každá stěna netupoúhlého čtyřstěnu je netupoúhlý trojúhelník.*

Netupoúhlé simplexy mají zajímavou interpretaci v elektrických odporových sítích. Představme si černou skřínku s vývody. Jaké mohou být mezi vývody odpory, víme-li, že uvnitř jsou jen odporové elementy a vše je propojené?

Věta 7. *Matice možných odporů je stejná jako matice možných čtverců vzdáleností mezi vrcholy nějakého netupoúhlého simplexu* (*tedy pro* $n = 4$ *netupoúhlého čtyřstěnu, apod.*).

Velmi zajímavý (a překvapivě i důležitý pro praktické využití) je problém rozložit krychli (anebo celý prostor) na *ostroúhlé* čtyřstěny (ty mají všechny vnitřní úhly stěn ostré). Podařilo se to [3], avšak počet použitých čtyřstěnů pro rozklad krychle převyšuje 1300.

Metody práce v geometrii jsou buď syntetické, nebo analytické. Ty druhé mají výhodu, že je lze zobecnit i na vícerozměrné objekty, v našem případě na již zmíněné simplexy. Ty však vyžadují aparát n-členných vektorů a příslušných matic.

2. Matice

Pro úplnost zopakujeme, že matice je (obecně obdélníková) tabulka (zpravidla) čísel, např.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ \frac{3}{4} & 0 & \pi \end{bmatrix} \tag{2}$$

je matice s dvěma řádky a třemi sloupci. Matice lze sčítat (zvláště na jednotlivých místech) a také násobit, pokud první matice (násobení není obecně komutativní) má stejný počet sloupců, jako má druhá matice řádků. Násobíme pak každý řádek *skalárně* (viz dále) s každým sloupcem a výsledek zapíšeme na příslušné (protínající se) místo.

Je-li např. A matice z (2) a B matice

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

pak součin AB je matice

$$\begin{bmatrix} -2 & 26 \\ \frac{9}{4} & \frac{3}{2} + 7\pi \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Důležité jsou matice o jediném sloupci, tzv. sloupcový vektor, matice čtvercové (při stejném řádu je možné je sčítat i násobit), dále matice nulová (složená jen z nul) a tzv. matice jednotková. Ta je čtvercová s jedničkami v diagonále a nulami jinde; např. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Při násobení libovolné matice M maticí jednotkovou, zprava nebo zleva, ovšem správného řádu, se matice M nezmění. K některé (vždy čtvercové) matici, označme ji např. A, existuje matice B tak, že součin AB je matice jednotková (ostatně pak BA je také jednotková matice). Pak řekneme, že B je matice k A *inverzní*; matice A se pak nazývá *regulární*.

Je dobře známo (i ve školské matematice), že soustava n lineárních rovnic o n neznámých má vždy právě jedno řešení, je-li matice soustavy regulární, a to se stane, právě když determinant soustavy je nenulový. Inverzní matici můžeme pak spočítat např. řešením soustav lineárních rovnic s touto maticí soustavy a pravými stranami zvolenými jako sloupce jednotkové matice.

Základem použití matic v geometrii budou pro nás tzv. *Gramovy matice* soustavy vektorů; pro $n = 3$ jsou vektory trojice souřadnic radiusvektoru v ortonormální soustavě souřadnic a obecně to je taková n-tice. Dvěma vektorům přiřazujeme jejich tzv. *skalární součin*: pro vektory $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ a $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ je to číslo $u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$. Budeme je značit $\langle u, v\rangle$. Gramova matice $G(a, b, \ldots, z)$ více vektorů $a, b, \ldots, z$ je pak čtvercová symetrická matice ze skalárních součinů

$$G(a, b, \ldots, z) = \begin{bmatrix} \langle a,a\rangle & \langle a,b\rangle & \cdots & \langle a,z\rangle \\ \langle b,a\rangle & \langle b,b\rangle & \cdots & \langle b,z\rangle \\ . & . & \cdot\cdot\cdot & . \\ \langle z,a\rangle & \langle z,b\rangle & \cdots & \langle z,z\rangle \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Tato matice je u lineárně nezávislých vektorů vždy tzv. *pozitivně definitní*, což znamená, že hodnota příslušné *kvadratické formy*, je-li počet řádků n, $\langle a, a\rangle x_1^2 + \langle b, b\rangle x_2^2 + + \cdots + \langle z, z\rangle x_n^2 + 2\langle a, b\rangle x_1x_2 + \cdots + 2\langle a, z\rangle x_1x_n + \cdots$ kladná pro každou volbu reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ne vesměs nulových. A platí i obráceně: Je-li čtvercová reálná symetrická matice pozitivně definitní, pak existuje soustava lineárně nezávislých vektorů, jejichž je daná matice Gramovou maticí.

Jsou-li vektory lineárně závislé (je-li např. jejich součet nulový vektor), jsou i řádky (a ovšem i sloupce) Gramovy matice *stejně* lineárně závislé (v uvedeném příkladu součet řádků je nulový řádek). Matice (5) je pak *pozitivně semidefinitní*, tj. kvadratická forma může mít i hodnotu nula.

To umožňuje použít vlastností pozitivně definitních matic ke studiu geometrických problémů. Ukažme to nejprve na tvrzení z věty 1. Nechť A_1, A_2, A_3, A_4 jsou vrcholy čtyřstěnu. Zaveďme v prostoru nějakou pravoúhlou soustavu souřadnic. Nechť bod A_k má v této soustavě souřadnice $(\overset{k}{a}_1, \overset{k}{a}_2, \overset{k}{a}_3)$, $k = 1, 2, 3, 4$. Protože body A_k neleží v rovině, je

$$\det \begin{bmatrix} \overset{1}{a}_1 - \overset{4}{a}_1 & \overset{1}{a}_2 - \overset{4}{a}_2 & \overset{1}{a}_3 - \overset{4}{a}_3 \\ \overset{2}{a}_1 - \overset{4}{a}_1 & \overset{2}{a}_2 - \overset{4}{a}_2 & \overset{2}{a}_3 - \overset{4}{a}_3 \\ \overset{3}{a}_1 - \overset{4}{a}_1 & \overset{3}{a}_2 - \overset{4}{a}_2 & \overset{3}{a}_3 - \overset{4}{a}_3 \end{bmatrix} \neq 0. \tag{6}$$

Nyní budiž x_1, x_2, x_3, x_4 libovolná nenulová čtveřice reálných čísel, jejichž součet je nula. Potom je

$$\begin{aligned} \sum_{i,k=1}^{4} d_{ik}^2 x_i x_k &= \sum_{i,k=1}^{4} \left(\sum_{\alpha=1}^{3} \left(\overset{i}{a}_\alpha - \overset{k}{a}_\alpha\right)^2 \right) x_i x_k = \\ &= \sum_{i=1}^{4} \left(\sum_{\alpha=1}^{3} \left(\overset{i}{a}_\alpha\right)^2 \right) x_i \sum_{k=1}^{4} x_k + \sum_{i=1}^{4} x_i \sum_{k=1}^{4} \left(\sum_{\alpha=1}^{3} \left(\overset{k}{a}_\alpha\right)^2 \right) x_k - \\ &\quad - 2 \sum_{i,k=1}^{4} \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{i}{a}_\alpha \overset{k}{a}_\alpha x_i x_k = \\ &= -2 \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{4} \overset{k}{a}_\alpha x_k \right)^2 \leqq 0. \end{aligned}$$

Zde však nemůže nastat rovnost. Pak by totiž pro nenulovou soustavu čísel x_1, x_2, x_3, x_4 platilo

$$\sum_{k=1}^{4} \overset{k}{a}_\alpha x_k = 0 \qquad \text{pro} \quad \alpha = 1, 2, 3, \tag{7}$$

a

$$\sum_{k=1}^{4} x_k = 0.$$

Po dosazení $x_4 = -(x_1 + x_2 + x_3)$ do (7) dostaneme, že řádky matice v (6) by byly lineárně závislé, ve sporu s (6). Tím jsme dokázali nutnost ve větě 1.

Abychom dokázali, že podmínka je i postačující, předpokládejme, že o číslech d_{ik}^2 platí uvedená podmínka. Ukažme nejprve, že o číslech

$$c_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(d_{\alpha,4}^2 + d_{\beta,4}^2 - d_{\alpha\beta}^2), \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \tag{8}$$

platí, že kvadratická forma $\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ je pozitivně definitní (a ovšem $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$).

Nechť totiž x_1, x_2, x_3 je libovolná nenulová trojice reálných čísel. Definujme $x_4 = -\sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha$. Podle předpokladu je pak $\sum_{i,k=1}^{4} d_{ik}^2 x_i x_k < 0$. Avšak

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,k=1}^{4} d_{ik}^2 x_i x_k &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} d_{\alpha\beta}^2 x_\alpha x_\beta + 2x_4 \sum_{\alpha=1}^{3} d_{\alpha 4}^2 x_\alpha \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} d_{\alpha\beta}^2 x_\alpha x_\beta - 2\sum_{\beta=1}^{3} x_\beta \sum_{\alpha=1}^{3} d_{\alpha 4}^2 x_\alpha \\
&= -2\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} c_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta .
\end{aligned}
$$

Odtud $\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} c_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta > 0$ a tvrzení je dokázáno.

Podle uvedené věty existují v trojrozměrném prostoru E_3 tři lineárně nezávislé vektory c_1, c_2 a c_3 tak, že o jejich skalárních součinech platí

$$
\langle c_\alpha, c_\beta \rangle = c_{\alpha\beta}, \qquad \alpha,\beta = 1,2,3.
$$

Zvolme v E_3 bod A_4 a definujme body A_1, A_2 a A_3 vztahy

$$
A_\alpha = A_4 + c_\alpha, \qquad \alpha = 1,2,3.
$$

Nyní již zbývá jen dokázat, že

$$
d_{ik}^2 = |A_i - A_k|^2, \qquad i,k = 1,2,3,4. \tag{9}
$$

To platí pro $k = 4$: pak $|A_\alpha - A_4|^2 = \langle c_\alpha, c_\alpha \rangle = c_{\alpha\alpha} = d_{\alpha,4}^2$ pro $\alpha = 1,2,3$ podle (5), a ovšem i pro $i = k = 4$. Je-li nyní $i \leqq 3$, $k \leqq 3$ a $i \neq k$ (pro $i = k$ (9) platí), pak skutečně

$$
|A_i - A_k|^2 = \langle c_i - c_k, c_i - c_k \rangle = \langle c_i, c_i \rangle - 2\langle c_i, c_k \rangle + \langle c_k, c_k \rangle = d_{ik}^2.
$$

Dosadíme-li za x_4 ze součtové podmínky $-(x_1 + x_2 + x_3)$ do (1), dostaneme po úpravě a obrácení nerovnosti ekvivalentní tvrzení

$$
\begin{aligned}
&d_{14}^2 x_1^2 + d_{24}^2 x_2^2 + d_{34}^2 x_3^2 + (d_{14}^2 + d_{24}^2 - d_{12}^2) x_1 x_2 + \\
&+ (d_{14}^2 + d_{34}^2 - d_{13}^2) x_1 x_3 + (d_{24}^2 + d_{34}^2 - d_{23}^2) x_2 x_3 \ > \ 0
\end{aligned} \tag{10}
$$

pro všechny nenulové trojice reálných čísel x_1, x_2, x_3. To znamená (musíme násobit dvěma), že ekvivalentní výrok je:

Matice

$$
\begin{bmatrix}
2d_{14}^2 & d_{14}^2 + d_{24}^2 - d_{12}^2 & d_{14}^2 + d_{34}^2 - d_{13}^2 \\
d_{14}^2 + d_{24}^2 - d_{12}^2 & 2d_{24}^2 & d_{24}^2 + d_{34}^2 - d_{23}^2 \\
d_{14}^2 + d_{34}^2 - d_{13}^2 & d_{24}^2 + d_{34}^2 - d_{23}^2 & 2d_{34}^2
\end{bmatrix} \tag{11}
$$

je pozitivně definitní.

O pozitivně definitních maticích je mj. známo, že jsou mezi reálnými symetrickými maticemi charakterizovány tím, že determinanty prvního, druhého atd. řádu v levém horním rohu matice jsou všechny kladné. (Tzv. *Sylvestrovo kriterium.*) V našem případě to znamená:

Věta 8. *Nutná a postačující podmínka pro existenci čtyřstěnu s hranami délek* d_{ik} *je, že* (d_{14} *je vždy kladné*) *oba determinanty*

$$\begin{vmatrix} 2d_{14}^2 & d_{14}^2 + d_{24}^2 - d_{12}^2 \\ d_{14}^2 + d_{24}^2 - d_{12}^2 & 2d_{24}^2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 2d_{14}^2 & d_{14}^2 + d_{24}^2 - d_{12}^2 & d_{14}^2 + d_{34}^2 - d_{13}^2 \\ d_{14}^2 + d_{24}^2 - d_{12}^2 & 2d_{24}^2 & d_{24}^2 + d_{34}^2 - d_{23}^2 \\ d_{14}^2 + d_{34}^2 - d_{13}^2 & d_{24}^2 + d_{34}^2 - d_{23}^2 & 2d_{34}^2 \end{vmatrix}$$

jsou kladné.

Abychom dokázali větu 2, potřebujeme k vektorům $u_1 = A_1 - A_4$, $u_2 = A_2 - A_4$, $u_3 = A_3 - A_4$ najít vektory v_1, v_2 a v_3 tak, aby v_1 byl kolmý k u_2 i u_3, v_2 byl kolmý k u_1 a u_3 a v_3 byl kolmý k u_1 a u_2. Navíc by skalární součin $\langle u_i, v_i \rangle$ měl být roven jedné pro $i = 1, 2, 3$. Protože kolmost vektorů $y = (y_1, y_2, y_3)$ a $z = (z_1, z_2, z_3)$ v E_3 v pravoúhlých souřadnicích je vyjádřena vzorcem $y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 = 0$, je řešením pro v_1 ten vektor $(\overset{1}{v}_1, \overset{1}{v}_2, \overset{1}{v}_3)$, který splňuje soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} \overset{1}{v}_1(\overset{2}{a}_1 - \overset{4}{a}_1) + \overset{1}{v}_2(\overset{2}{a}_2 - \overset{4}{a}_2) + \overset{1}{v}_3(\overset{2}{a}_3 - \overset{4}{a}_3) &= 0, \\ \overset{1}{v}_1(\overset{3}{a}_1 - \overset{4}{a}_1) + \overset{1}{v}_2(\overset{3}{a}_2 - \overset{4}{a}_2) + \overset{1}{v}_3(\overset{3}{a}_3 - \overset{4}{a}_3) &= 0, \\ \overset{1}{v}_1\overset{1}{u}_1 \qquad + \overset{1}{v}_2\overset{1}{u}_2 \qquad + \overset{1}{v}_3\overset{1}{u}_3 \qquad &= 1; \end{aligned}$$

protože $\overset{1}{u}_1 = \overset{1}{a}_1 - \overset{4}{a}_1$, $\overset{1}{u}_2 = \overset{1}{a}_2 - \overset{4}{a}_2$, $\overset{1}{u}_3 = \overset{1}{a}_3 - \overset{4}{a}_3$, je podle (6) determinant soustavy nenulový a řešení existuje a je jediné.

Obdobně existují vektory $v_2 = (\overset{2}{v}_1, \overset{2}{v}_2, \overset{2}{v}_3)$ a $v_3 = (\overset{3}{v}_1, \overset{3}{v}_2, \overset{3}{v}_3)$.

Celkem tedy dostáváme: vektory v_1, v_2 a v_3 splňují

$$\langle u_i, v_i \rangle = 1 \text{ pro } i = 1, 2, 3, \ \langle u_i, v_j \rangle = 0 \text{ pro } i \neq j, \ i, j = 1, 2, 3. \tag{12}$$

Ještě definujeme vektor v_4 vztahem $v_4 = -(v_1 + v_2 + v_3)$. Platí nyní

Věta 9. *Nechť* v_1, v_2 *a* v_3 *jsou vektory z (12). Pak každý z vektorů* v_i, $i = 1, 2, 3, 4$, *je kolmý ke stěně čtyřstěnu protější k vrcholu* A_i, *a přitom vektory* $-v_i$ *jsou vektory vnějších normál čtyřstěnu v tom smyslu, že polopřímka* $A_i + \lambda(-v_i)$, $\lambda > 0$, *protíná protější stěnu.*

Kolmost v_1, v_2 a v_3 k příslušným stěnám plyne z (12), protože v_1 je kolmý ke dvěma lineárně nezávislým vektorům u_2, u_3 protější stěny, atd. Že jde skutečně o vnější normálu, plyne pro v_1 takto: přímka $A_1 + \lambda(-v_1)$ protne stěnu $A_2A_3A_4$ (pokud vůbec) v bodě tvaru $A_4 + pu_2 + qu_3$. Avšak $A_1 + \lambda(-v_1) = A_4 + pu_2 + qu_3$ skutečně nastane: můžeme to přepsat do tvaru

$$u_1 - pu_2 - qu_3 = \lambda v_1; \tag{13}$$

to je jistě splnitelné pro nějaké p, q a λ, protože u_1, u_2 a u_3 jsou lineárně nezávislé (nekomplanární). Násobme (13) skalárně (to lze!) vektorem v_1. Dostaneme $1 = \lambda\langle v_1, v_1\rangle$, a protože $\langle v_1, v_1\rangle$ je kladné, je i λ kladné a tvrzení ve větě je pro v_1 dokázáno. Obdobně to platí pro v_2 a v_3. Dokažme nyní kolmost v_4 k rovině $A_1A_2A_3$. Stačí dokázat, že v_4 je kolmý k vektorům $u_1 - u_2$ a $u_1 - u_3$ této roviny. Avšak $\langle v_4, u_1 - u_2\rangle = \langle -(v_1+v_2+v_3), u_1 - u_2\rangle$, což podle (12) dává po roznásobení nulu. Stejně se dokáže kolmost v_4 k $u_1 - u_3$. Ověření toho, že v_4 je vnější normála, přenecháme čtenáři.

Je geometricky patrné, že úhel vektorů v_i a v_j, $i \neq j$, je výplňkový (do 180 stupňů) k vnitřnímu úhlu stěn proti A_i a A_j. Protože kosinus úhlu φ vektorů y a z je roven

$$\cos\varphi = \frac{\langle y, z\rangle}{\sqrt{\langle y, y\rangle}\sqrt{\langle z, z\rangle}}, \tag{14}$$

rozhoduje *znaménko* skalárního součinu $\langle v_i, v_j\rangle$ o tom, zda vnitřní úhel φ_{ij} mezi protějšími stěnami k A_i a A_j je ostrý (je-li $\langle v_i, v_j\rangle < 0$), tupý (je-li $\langle v_i, v_j\rangle > 0$), nebo pravý (je-li $\langle v_i, v_j\rangle = 0$).

Problém možných úhlů stěn čtyřstěnu jsme tedy převedli na ekvivalentní problém možných znamének prvků Gramovy matice vnějších normál

$$G(v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle & \langle v_1, v_3\rangle & \langle v_1, v_4\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \langle v_2, v_3\rangle & \langle v_2, v_4\rangle \\ \langle v_3, v_1\rangle & \langle v_3, v_2\rangle & \langle v_3, v_3\rangle & \langle v_3, v_4\rangle \\ \langle v_4, v_1\rangle & \langle v_4, v_2\rangle & \langle v_4, v_3\rangle & \langle v_4, v_4\rangle \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Z definice vektoru v_4 a předchozí věty o Gramových maticích plyne, že matice $G(v_1, v_2, v_3, v_4)$ má součet řádků roven nulovému řádku.

Ukažme, že nutná podmínka pro znaménkovou strukturu takovéto matice je 1. kladnost diagonálních prvků, 2. symetrie, a 3. tzv. nerozložitelnost záporné části matice, tj. matice vzniklé po nahrazení všech kladných prvků nulami. Tato třetí vlastnost (pro 4-řádkové matice) znamená, že matice neobsahuje ani nulovou část typu

$$\begin{bmatrix} \star & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star \end{bmatrix}, \tag{16}$$

ani nulovou část typu

$$\begin{bmatrix} \star & \star & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star \end{bmatrix}, \tag{17}$$

a to ani po záměně některých řádků (a zároveň sloupců); hvězdička $\star$ zde znamená libovolné číslo.

První dvě vlastnosti jsou zřejmé. Třetí dokážeme sporem. Předpokládejme nejprve, že záporná část matice (15) obsahuje po nějaké záměně nulovou část typu (16). To znamená, že všechny prvky na nulových místech jsou v původní matici nezáporné (a v diagonále kladné). Součet řádků by měl být nulový, ale na prvním místě je kladné číslo, což je spor. Nechť nyní záporná část matice (15) obsahuje po nějaké záměně nulovou část typu (17). Nechť první řádek odpovídá v_i, druhý v_j. Nulové prvky v (17) jako dříve znamenají v původní matici nezáporné prvky. Protože součet řádků má být nulový, je z prvního sloupce $\langle v_i, v_i\rangle + \langle v_j, v_i\rangle \leqq 0$, z druhého $\langle v_i, v_j\rangle + \langle v_j, v_j\rangle \leqq 0$. Sečtením obou nerovností dostaneme po úpravě $\langle v_i + v_j, v_i + v_j\rangle \leqq 0$; levá strana je čtverec délky vektoru $v_i + v_j$, který je vždy nezáporný. Proto $v_i = -v_j$, což je spor, protože vektory obou normál nemohou být rovnoběžné.

Lze dokázat [1, str. 28], že vlastnosti 1., 2. a 3. jsou i postačující pro znaménkovou strukturu matice (15). Abychom dokončili důkaz věty 2, ukažme, že z podmínky 3. plyne, že se ve čtyřstěnu dostaneme z každého vrcholu do každého po červených hranách. Vyjděme z A_1. V prvním řádku je podle (16) nějaký záporný prvek – nechť je to na místě (1,2), takže hrana A_1A_2 je červená. Kdyby ani z A_1, ani z A_2 nevedla červená hrana do dalšího vrcholu, nastal by případ (17), což není možné. Proto je další vrchol, např. A_3, spojen s A_1 i A_2. Zbylý vrchol A_4 je pak podle (16) spojen s některým z předchozích vrcholů, jak jsme chtěli dokázat.

Že už žádná další podmínka pro obarvení není, plyne z (nedokazovaného) obrácení.

Snad stojí za zmínku, že násobíme-li v matici (15) všechny řádky a všechny sloupce, a to i-tý řádek číslem $1/\sqrt{\langle v_i, v_i\rangle}$, k-tý sloupec číslem $1/\sqrt{\langle v_k, v_k\rangle}$, dostaneme matici, kterou podle vzorce (14) můžeme napsat jako

$$\begin{bmatrix} 1 & -\cos\varphi_{12} & -\cos\varphi_{13} & -\cos\varphi_{14} \\ -\cos\varphi_{12} & 1 & -\cos\varphi_{23} & -\cos\varphi_{24} \\ -\cos\varphi_{13} & -\cos\varphi_{23} & 1 & -\cos\varphi_{34} \\ -\cos\varphi_{14} & -\cos\varphi_{24} & -\cos\varphi_{34} & 1 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

protože úhel φ_{ik} je výplňkový k úhlu normál v_i a v_k.

Matice (18) je pozitivně semidefinitní, má opět rohové determinanty do řádu 3 včetně kladné, ale determinant celé matice je roven nule. Tyto vlastnosti úplně charakterizují soustavu šesti vnitřních úhlů čtyřstěnu.

Větu 3 nemusíme dokazovat, věta 4 byla jako příklad v matematické olympiádě. Větu 6 by bylo možno dokázat pomocí tzv. sférické trigonometrie, avšak teorie matic umožňuje to dokázat algebraicky.

Ukažme nejprve, že Gramovy matice $G(u_1, u_2, u_3)$ a $G(v_1, v_2, v_3)$ vektorů z (12) jsou vzájemně inverzní. Jak jsme již viděli, lze vektor v_1 psát jako

$$v_1 = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3.$$

Po skalárním násobení vektory v_1, v_2 a v_3 dostaneme podle (12) $c_1 = \langle v_1, v_1\rangle$, $c_2 = \langle v_1, v_2\rangle$, $c_3 = \langle v_1, v_3\rangle$, takže celkem

$$v_1 = \langle v_1, v_1\rangle u_1 + \langle v_1, v_2\rangle u_2 + \langle v_1, v_3\rangle u_3,$$

a obdobně

$$v_2 = \langle v_2, v_1\rangle u_1 + \langle v_2, v_2\rangle u_2 + \langle v_2, v_3\rangle u_3,$$
$$v_3 = \langle v_3, v_1\rangle u_1 + \langle v_3, v_2\rangle u_2 + \langle v_3, v_3\rangle u_3.$$

Po skalárním násobení každé z těchto rovnic vektory u_1, u_2 a u_3 odtud dostáváme podmínky, že součin $G(u_1, u_2, u_3)$ a $G(v_1, v_2, v_3)$ je jednotková matice.

V teorii matic se (i v trochu obecnějším tvaru) dokazuje věta:

Věta 10. *Má-li pozitivně definitní matice všechny nediagonální prvky nekladné (tj. $\leqq 0$), pak inverzní matice je nezáporná.*

Pro matici třetího řádu snadno dokážete: Je-li

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

regulární matice, pak inverzní matice je (determinant označíme Δ)

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}, \end{bmatrix}$$

kde

$$b_{11} = \frac{1}{\Delta}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}),\; b_{12} = \frac{1}{\Delta}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}),$$

atd. (cyklicky a záměnou 1 a 2).

Je-li nyní A pozitivně definitní, je jednak $a_{ik} = a_{ki}$ pro všechna i, k, jednak také $a_{ii} > 0$, $a_{ii}a_{kk} - a_{ik}^2 > 0$ a $\Delta > 0$ podle Sylvestrova kritéria. Platí-li nyní $a_{12} \leqq 0$, $a_{13} \leqq 0$ a $a_{23} \leqq 0$, plyne odtud $b_{12} \geqq 0$, $b_{23} \geqq 0$ i $b_{13} \geqq 0$, a ovšem také $b_{ii} > 0$.

Použijme větu 10 na případ netupoúhlého čtyřstěnu. Pro vektory v_1, v_2 a v_3 pak platí, že Gramova matice $G(v_1, v_2, v_3)$ je pozitivně definitní a má nediagonální prvky nekladné. Podle věty 10 je inverzní matice, tedy $G(u_1, u_2, u_3)$, nezáporná. Proto jsou skalární součiny $\langle u_i, u_j \rangle$ nezáporné pro $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3.$, a tedy je každý vnitřní úhel trojúhelníkových stěn při vrcholu A_4 ostrý nebo pravý. Totéž platí (po vhodných záměnách) i u ostatních vrcholů. Tím jsme větu 6 dokázali.

Věta 5 je dobře známa. O ostatních větách odkazujeme na [1].

3. Číselné matice

V předchozím odstavci jsme se zmínili o řešení soustav lineárních rovnic. Dnes je to úlohou tzv. numerické matematiky, aby tuto úlohu (a mnohé jiné) řešila, často pro počet rovnic několika tisíc (i milionů). To je velmi složité i na velkých počítačích. Naštěstí mívají matice takových soustav, zejména, jde-li o zpracování „rozumného“ technického problému, dobré vlastnosti, např. pozitivní definitnost, nebo obsahují velké množství (třeba 90 procent i více) nulových prvků, apod.

Někdy však i zdánlivě jednoduchá matice působí problémy. Dobrou ukázkou je tzv. *Hilbertova matice* H_n (má n řádků i n sloupců; píšeme ji takto obecně, jak je zvykem)

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \cdots & \frac{1}{n+3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \cdots & \frac{1}{n+4} \\ \cdots & . & . & . & . & . & \cdots & . \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \frac{1}{n+4} & \frac{1}{n+5} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}.$$

Má velmi malý determinant, rovný $\frac{1}{n!}\binom{1}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{2}\binom{5}{2}\cdots\binom{2n-2}{n-1}\binom{2n-1}{n-1}$, takže soustavu rovnic s touto maticí už pro $n = 10$ obvyklými metodami nevypočtou ani velké počítače.

Připojujeme několik poznatků.

Poznatek 1. *Determinant každé čtvercové podmatice (se souvislou množinou řádků i sloupců) matice H_n je převrácená hodnota celého čísla.*

Poznatek 2. *Vynásobíme-li diagonální prvky matice z Poznatku 1 a matice k ní inverzní, je součet druhých odmocnin z těchto v pořadí lichých součinů roven součtu druhých odmocnin ze sudých součinů v případě sudého počtu řádků. V případě lichého počtu řádků převyšuje první součet ten druhý o jednu.*

Např. pro matici

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

je inverzní matice

$$\begin{bmatrix} 300 & -900 & 630 \\ -900 & 2880 & -2100 \\ 630 & -2100 & 1575 \end{bmatrix}$$

a druhé odmocniny ze součinu diagonálních prvků jsou 10, 24, 15. Skutečně $10 + 15 - - 24 = 1$.

Všimněte si, že vynásobíme-li obě matice prvkově, výsledná matice má řádkové součty jedna:

$$\begin{bmatrix} 100 & -225 & 126 \\ -225 & 576 & -350 \\ 126 & -350 & 225 \end{bmatrix}.$$

Poznatek 3. *Tabulka*

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1} & \frac{2}{2} & \frac{3}{3} & \frac{4}{4} & \frac{5}{5} & \cdots \\ \frac{1}{1} & 1 & \frac{3}{1} & \frac{4}{2} & \frac{5}{3} & \frac{6}{4} & \cdots \\ \frac{2}{2} & \frac{3}{1} & 1 & \frac{5}{1} & \frac{6}{2} & \frac{7}{3} & \cdots \\ \frac{3}{3} & \frac{4}{2} & \frac{5}{1} & 1 & \frac{7}{1} & \frac{8}{2} & \cdots \\ \frac{4}{4} & \frac{5}{3} & \frac{6}{2} & \frac{7}{1} & 1 & \frac{9}{1} & \cdots \\ \frac{5}{5} & \frac{6}{4} & \frac{7}{3} & \frac{8}{2} & \frac{9}{1} & 1 & \cdots \\ \cdots & & & & & & \end{bmatrix}$$

má podtabulky s jedničkami v diagonále, např. sudou

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{1} & \frac{5}{3} & \frac{6}{4} \\ \frac{3}{1} & 1 & \frac{6}{2} & \frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{6}{2} & 1 & \frac{9}{1} \\ \frac{6}{4} & \frac{7}{3} & \frac{9}{1} & 1 \end{bmatrix},$$

kdy řádkové součiny $\Pi_1 = 7\frac{1}{2}$, $\Pi_2 = 21$, $\Pi_3 = 45$, $\Pi_4 = 31\frac{1}{2}$, *splňují* $\Pi_1 + \Pi_3 = \Pi_2 + \Pi_4 (= 52\frac{1}{2})$, *a lichou,*

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{6}{2} & \frac{7}{3} \\ \frac{6}{2} & 1 & \frac{9}{1} \\ \frac{7}{3} & \frac{9}{1} & 1 \end{bmatrix},$$

kdy součiny $\Pi_1 = 7$, $\Pi_2 = 27$, $\Pi_3 = 21$, *splňují* $\Pi_1 + \Pi_3 = \Pi_2 + 1$.

Plyne to ze vzorce

$$\frac{(x_2+x_1)(x_3+x_1)\cdots(x_n+x_1)}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)} + \frac{(x_1+x_2)(x_3+x_2)\cdots(x_n+x_2)}{(x_1-x_2)(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2)} + \cdots +$$

$$+ \frac{(x_1+x_n)(x_2+x_n)\cdots(x_{n-1}+x_n)}{(x_1-x_n)(x_2-x_n)\cdots(x_{n-1}-x_n)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ sudé}, \\ 1 & \text{pro } n \text{ liché}, \end{cases}$$

kdykoliv $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *jsou reálná čísla splňující* $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

L i t e r a t u r a

[1] Fiedler, M.: *Matice a grafy v euklidovské geometrii.* Dimatia, Praha 2001.

[2] Fiedler, M.: *Notes on Hilbert and Cauchy matrices.* Linear Algebra Appl. *432* (2010), 351–356.

[3] VanderZee, E., Hirani, A. N., Zharnitsky, V., Guoy, D.: *A dihedral acute triangulation of the cube.* ArXiv:0905.3715v3 [cs.CG] 1 Jun 2009.