Michal Křížek; Jakub Šolc
Od Keplerových mozaik k pětičetné symetrii

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 54 (2009), No. 1, 41–56

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141885

Od Keplerových mozaik k pětičetné symetrii

Michal Křížek, Jakub Šolc, Praha

1. Keplerovy mozaiky

Německý učenec Johannes Kepler (1571–1630), který působil u dvora Rudolfa II. v Praze, je známý především svými astronomickými objevy. Dodnes obdivujeme, jak mohl analýzou dat, která získal Tycho Brahe pozorováním Marsu, objevit své tři zákony o pohybu planet[1]) a Keplerovu rovnici (viz [11]). Kepler se však věnoval i tématům, která spadají do oblasti matematiky. Jeho slavná domněnka o nejhustším uspořádání koulí není dodnes vyřešena.[2]) Kepler patří k zakladatelům krystalografie. Obdivoval krásu sněhových vloček na Karlově mostě a v díle *Strena seu De nive sexangula* (1611) si kladl otázku, proč vykazují právě jen šestičetnou rotační symetrii, i když má každá vločka jiný tvar. Dále zkonstruoval zajímavá hvězdicovitá tělesa, viz [21] a obrázky 1 a 2. Nalézal účinné numerické metody ke zpracování pozorovaných dat. Byl také jedním z prvních skutečných uživatelů logaritmů. Přesnost jeho výpočtů byla srovnatelná s dnešními výsledky zpracovanými s podporou výpočetní techniky. Keplerova práce o stereometrii vinných sudů *Nova stereometria doliorum vinariorum* popisuje metodu určování objemu rotačních těles, a tím přispěla k rozvoji integrálního počtu.

Ve svém díle *Harmonices mundi* (1619) se Kepler zabýval otázkou, jaká pokrytí (tj. mozaiky, parketáže) lze vytvořit z pravidelných n-úhelníků tak, aby sousední n-úhelníky vždy sousedily celou stranou. Navíc požadoval, aby každý vrchol byl stejného typu $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, tj. aby byl obklopen postupně pravidelným n_1-úhelníkem, n_2-úhelníkem atd. Přitom k-tici $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ budeme považovat za ekvivalentní $(n_k, \ldots, n_2, n_1)$, tj. nebude nám záležet na tom, zda vrcholy n-úhelníků kolem daného vrcholu číslujeme po směru či proti směru hodinových ručiček. Rovněž k-tice $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ a $(n_2, \ldots, n_k, n_1)$ budeme považovat za ekvivalentní, tj. nebude záležet na tom, odkud začneme n-úhelníky číslovat. Takové pokrytí nazveme *polopravidelné.* Pokud speciálně $n_1 = n_2 = \ldots = n_k$, pak hovoříme o *pravidelném pokrytí.* Dvě

[1]) První dva zákony Kepler objevil v Praze a uveřejnil je ve svém stěžejním díle *Astronomia nova* v roce 1609, tj. právě před 400 lety. To je jeden z důvodů, proč si jej v letošním Mezinárodním roce astronomie připomínáme.

[2]) Existuje sice „počítačový důkaz“, srov. [9, s. 104], ale protože není v celočíselné aritmetice (jen v aritmetice „počítačově reálné“), širší matematická veřejnost jeho správnost neuznává.

Prof. RNDr. Michal Křížek, DrSc., Matematický ústav AV ČR, Žitná 25, 117 10 Praha 1.
Mgr. Ing. Jakub Šolc, Stavební fakulta ČVUT v Praze. Thákurova 7, 166 29 Praha 6.
E-mail: `krizek@cesnet.cz` a `solc@mat.fsv.cvut.cz`

pokrytí budeme považovat za ekvivalentní, pokud jedno dostaneme z druhého pomocí posunutí, otočení a dilatace.

Věta (Keplerova). *Existuje právě* 12 *různých polopravidelných pokrytí roviny, z toho jsou* 3 *pravidelná.*

Naznačme si základní myšlenku důkazu. Vnitřní úhel v pravidelném n_i-úhelníku je roven

$$\frac{n_i - 2}{n_i} 180^\circ.$$

Proto pro vrchol typu $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ platí následující nutná (nikoliv však postačující) podmínka existence polopravidelného pokrytí

$$\frac{n_1 - 2}{n_1} 180 + \frac{n_2 - 2}{n_2} 180 + \cdots + \frac{n_k - 2}{n_k} 180 = 360.$$

Odtud jednoduchými úpravami dostaneme diofantickou rovnici

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k} = \frac{k-2}{2}. \tag{1}$$

Pravá strana (1) musí být kladná, a tedy $k \geqq 3$. Protože bod lze obklopit 6 rovnostrannými trojúhelníky a všechny ostatní n-úhelníky mají vnitřní úhly větší, získáme další nutnou podmínku $k \leqq 6$ řešitelnosti (1). Srovnáme-li složky výsledné k-tice pro přehlednost podle velikosti, dostaneme následujících 17 řešení rovnice (1).
Trojice:

$$(3,7,42),\quad (3,8,24),\quad (3,9,18),\quad (3,10,15),\quad (3,12,12),$$
$$(4,5,20),\quad (4,6,12),\quad (4,8,8),\quad (5,5,10),\quad (6,6,6);$$

čtveřice:

$$(3,3,4,12),\quad (3,3,6,6),\quad (3,4,4,6),\quad (4,4,4,4);$$

pětice:

$$(3,3,3,3,6),\quad (3,3,3,4,4);$$

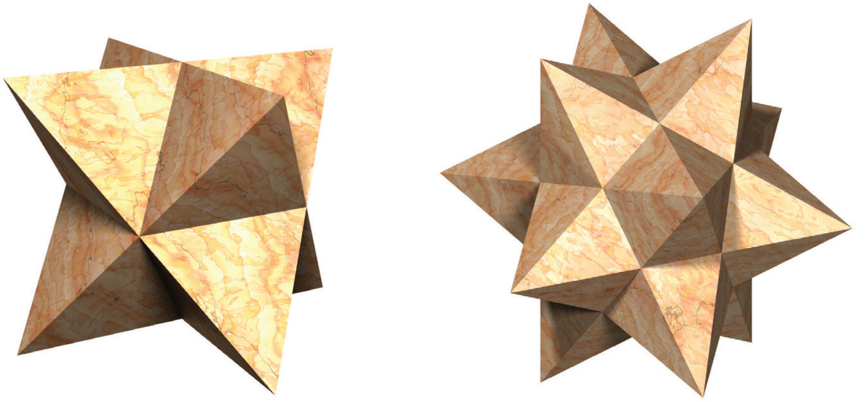
šestice:

$$(3,3,3,3,3,3).$$

Ne všechna řešení ale odpovídají polopravidelným pokrytím celé roviny. Například bod lze obklopit dvěma pětiúhelníky a jedním desetiúhelníkem, ale snadno můžeme ověřit, že to nestačí na pokrytí celé roviny. Navíc složky uvedených sedmnácti k-tic jsou srovnány podle velikosti, což dále už nebudeme požadovat.

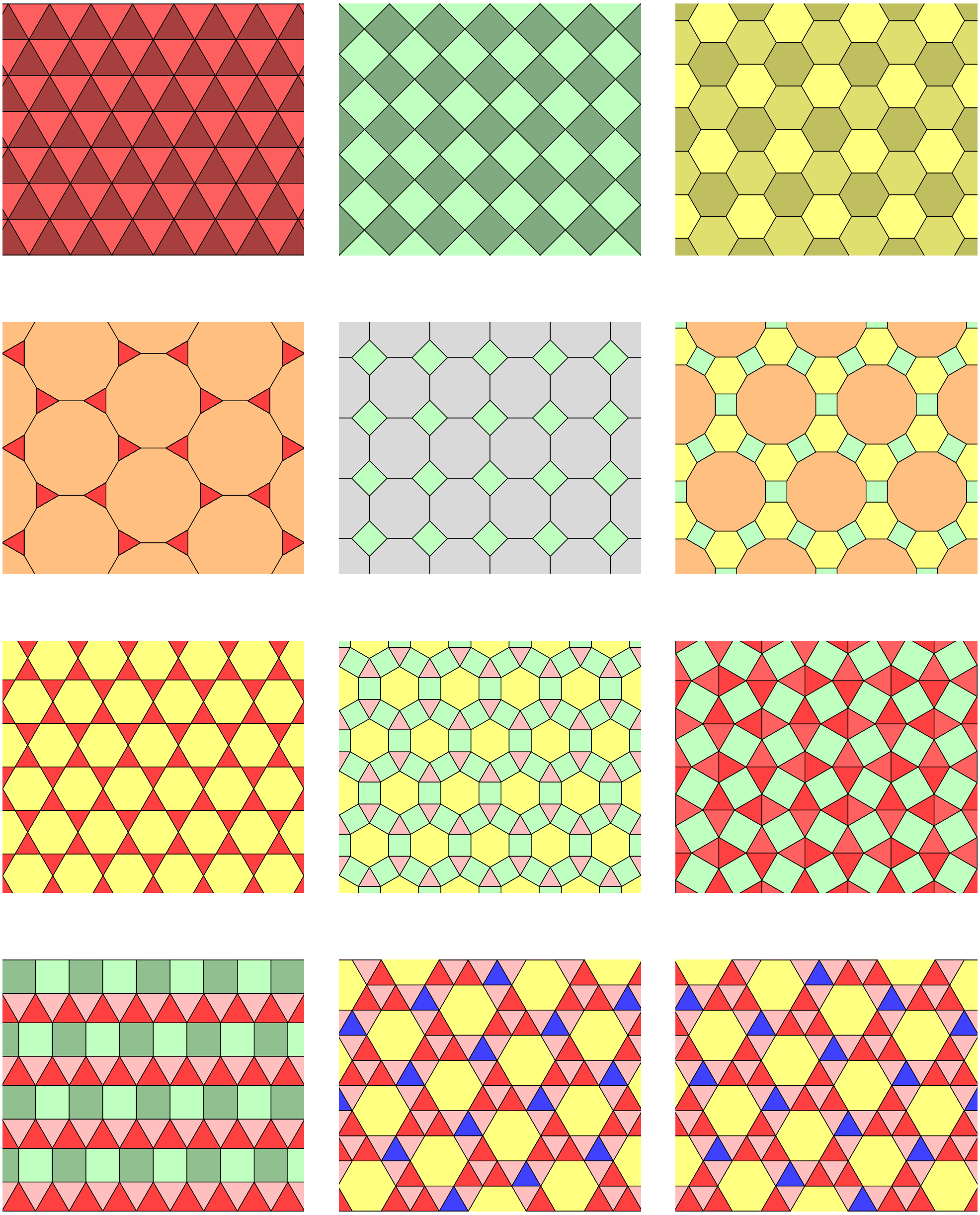
Postupným prověřováním předchozích případů získáme jen následujících 12 řešení (viz obr. 3):

(3, 3, 3, 3, 3, 3),	(4, 4, 4, 4),	(6, 6, 6),
(3, 12, 12),	(4, 8, 8),	(4, 6, 12),
(3, 6, 3, 6),	(3, 4, 6, 4),	(3, 3, 4, 3, 4),
(3, 3, 3, 4, 4),	(3, 3, 3, 3, 6),	(3, 3, 3, 3, 6).



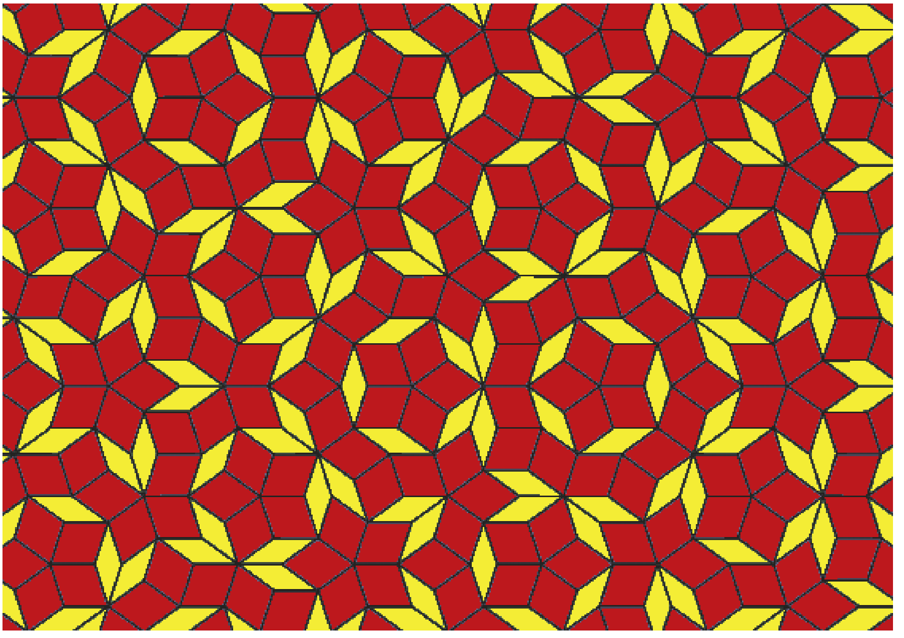
Obr. 1. Keplerovy hvězdy. Stella octangula vlevo je sjednocením dvou pravidelných čtyřstěnů a lze ji vepsat do krychle. Vpravo je hvězdicovitý dvanáctistěn – ke každé stěně pravidelného dvanáctistěnu je připojen pětiboký jehlan. Přitom hrany hvězdy můžeme získat vhodným propojením vrcholů pravidelného dvacetistěnu.

Obr. 2. Jedna ze čtyř velkých Keplerových hvězd v Růžové zahradě na zámku Konopiště. Grupa jejích symetrií je alternující grupa A_5, jež se používá k důkazu neexistence obecného vzorce pro určení kořenů polynomu 5. stupně.

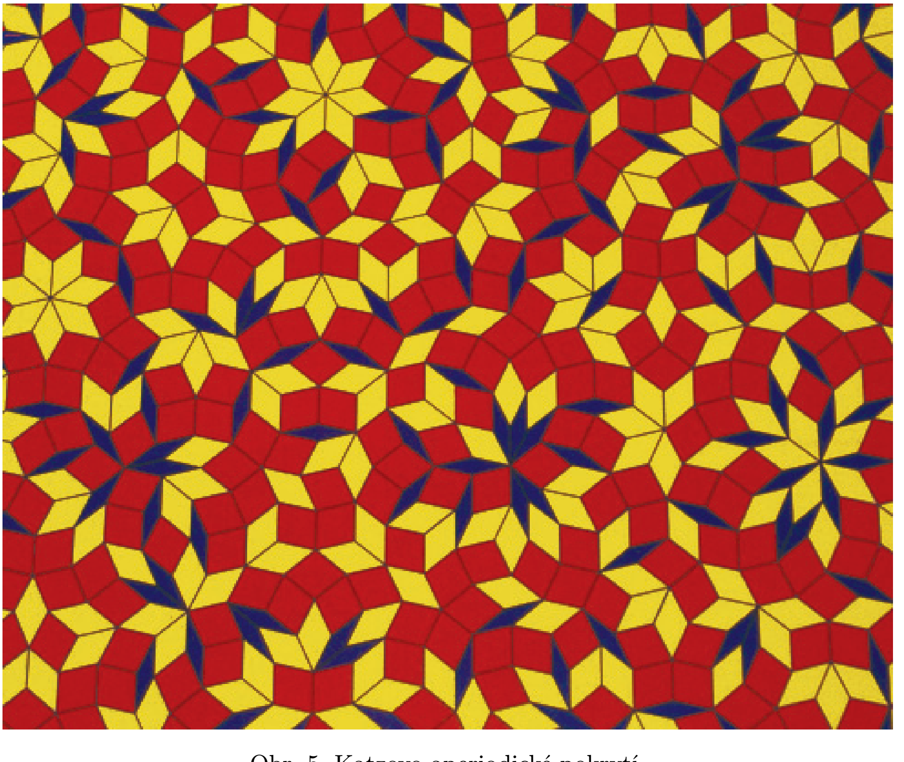


Obr. 3. Keplerovy mozaiky. Typy jejich vrcholů ve stejném uspořádání jsou:

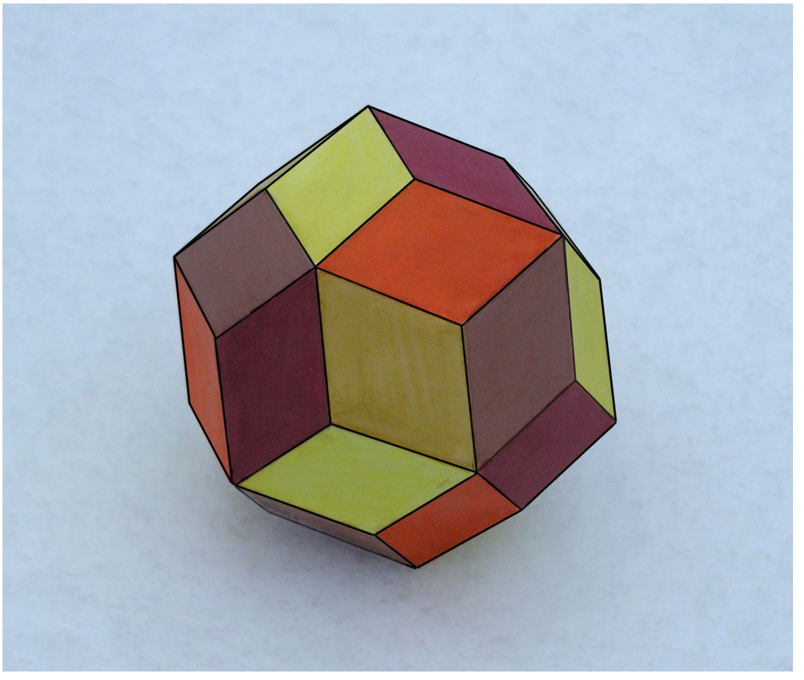
(3, 3, 3, 3, 3, 3),	(4, 4, 4, 4),	(6, 6, 6),
(3, 12, 12),	(4, 8, 8),	(4, 6, 12),
(3, 6, 3, 6),	(3, 4, 6, 4),	(3, 3, 4, 3, 4),
(3, 3, 3, 4, 4),	(3, 3, 3, 3, 6),	(3, 3, 3, 3, 6).



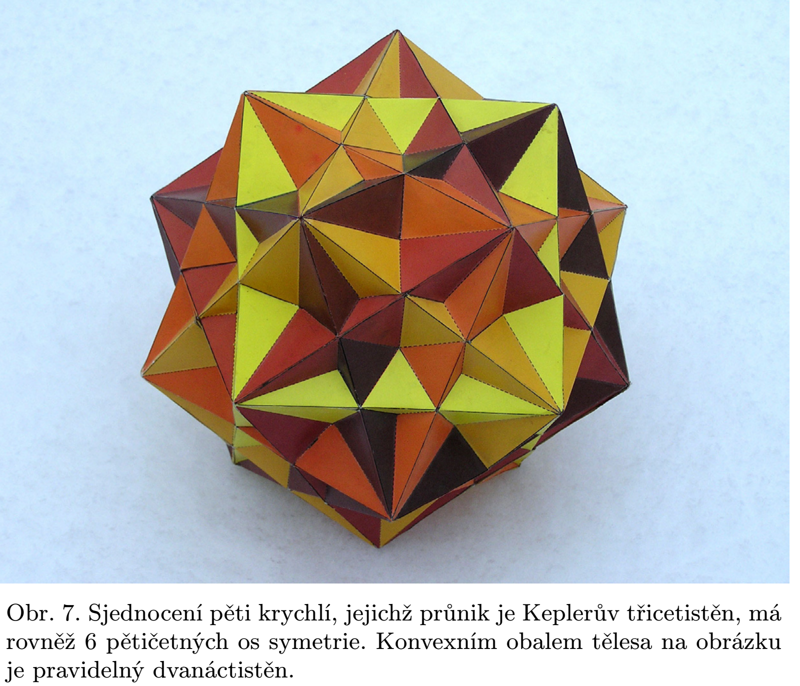
Obr. 4. Penrosovo aperiodické pokrytí.



Obr. 5. Katzovo aperiodické pokrytí.



Obr. 6. Keplerův třicetistěn je průnikem pěti různě natočených a různě obarvených krychlí. Má 6 pětičetných rotačních os symetrie.



Obr. 7. Sjednocení pěti krychlí, jejichž průnik je Keplerův třicetistěn, má rovněž 6 pětičetných os symetrie. Konvexním obalem tělesa na obrázku je pravidelný dvanáctistěn.

Poslední dvě řešení jsou číselně stejná. Všimněte si ale, že poslední pokrytí na obr. 3 je zrcadlovým obrazem předposledního a tato pokrytí nejsou ekvivalentní (tj. existuje jejich levá a pravá forma). Ostatních 10 pokrytí má osu souměrnosti.

Povšimněme si ještě, že Keplerovy polopravidelné mozaiky nemají pětičetnou rotační symetrii, ale mají dvojčetnou nebo trojčetnou nebo čtyřčetnou nebo šestičetnou symetrii (tj. otočením mozaiky kolem vhodného bodu o $360°/k$ pro vhodné $k \in \{2, 3, 4, 6\}$ dostaneme tutéž mozaiku, odhlédneme-li od obarvení). Keplerovy mozaiky se používají k ozdobnému dláždění některých chodníků, pro parketáže a umělecké mozaiky, jako vzory na tapety a látky, v počítačové grafice, ale i při popisu uhlíkatých nanotrubic.

2. Penrosovy mozaiky

Označme

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{a} \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \tag{2}$$

kořeny kvadratické rovnice $x^2 - x - 1 = 0$. Číslo α se nazývá *zlatý řez* (lat. sectio aurea) a často se v literatuře označuje též φ. Je to jedno z nejzáhadnějších iracionálních čísel, jak ještě uvidíme. Objevuje se v některých naprosto nečekaných situacích, viz např. [12, kap. 7.1].

Zlatý řez představuje již od antiky základní estetický poměr. Obdélník, jehož délky stran jsou v poměru α, je pokládán za nejkrásnější. Takový obdélník vznikne např. jako konvexní obal dvou protilehlých hran pravidelného dvacetistěnu (viz obr. 10). Poměr délek úhlopříčky a strany pravidelného pětiúhelníka je α; přitom se i samotné úhlopříčky dělí v poměru zlatého řezu. Poloměr kružnice opsané pravidelnému desetiúhelníku k délce jeho strany je rovněž v poměru α. Objem pravidelného dvanáctistěnu, resp. dvacetistěnu je roven $2+7\alpha/2$, resp. $5(1+\alpha)/6$, má-li délku hrany jedna. Johannes Kepler popsal třicetistěn (tzv. *Keplerův třicetistěn*), který je průnikem pěti různě natočených krychlí se stejným středem (srov. obr. 6 a 7). Všech třicet stěn tvoří shodné kosočtverce a poměr jejich úhlopříček je také roven $\alpha = -1/\beta$.

Souřadnice pravidelného čtyřrozměrného simplexu se středem v počátku souřadnic lze také vyjádřit pomocí zlatého řezu $(3\alpha - 1, \beta, \beta, \beta)^\top$, $(\beta, 3\alpha - 1, \beta, \beta)^\top$, $(\beta, \beta, 3\alpha - 1, \beta)^\top$, $(\beta, \beta, \beta, 3\alpha - 1)^\top$ a $(-2, -2, -2, -2)^\top$. Ve čtyřrozměrném prostoru ale existuje další pravidelné těleso, které je vskutku nádherným matematickým objektem. Jeho trojrozměrný povrch[3]) se totiž skládá ze 600 pravidelných čtyřstěnů (viz [20]). Poměr poloměru koule opsané tomuto tělesu k délce hrany je opět α. Podobných příkladů je celá řada.

Počátkem sedmdesátých let 20. století britský matematik a fyzik Roger Penrose objevil pokrytí roviny dvěma typy dlaždic, které vykazuje lokální pětičetnou rotační symetrii (viz obr. 4) a také úzce souvisí se zlatým řezem. Obě dlaždice mají tvar

[3]) Na povrchu je 720 hran, které tvoří celkem 72 pravidelných desetiúhelníků se společným středem. (Podobně je na povrchu pravidelného osmistěnu 12 hran, které tvoří 3 čtverce.)

kosočtverce a jejich strany jsou stejně dlouhé. První dlaždice má ostrý úhel roven 72° a druhá 36°. Nazývají se *Penrosovy dlaždice.*

Přitom platí

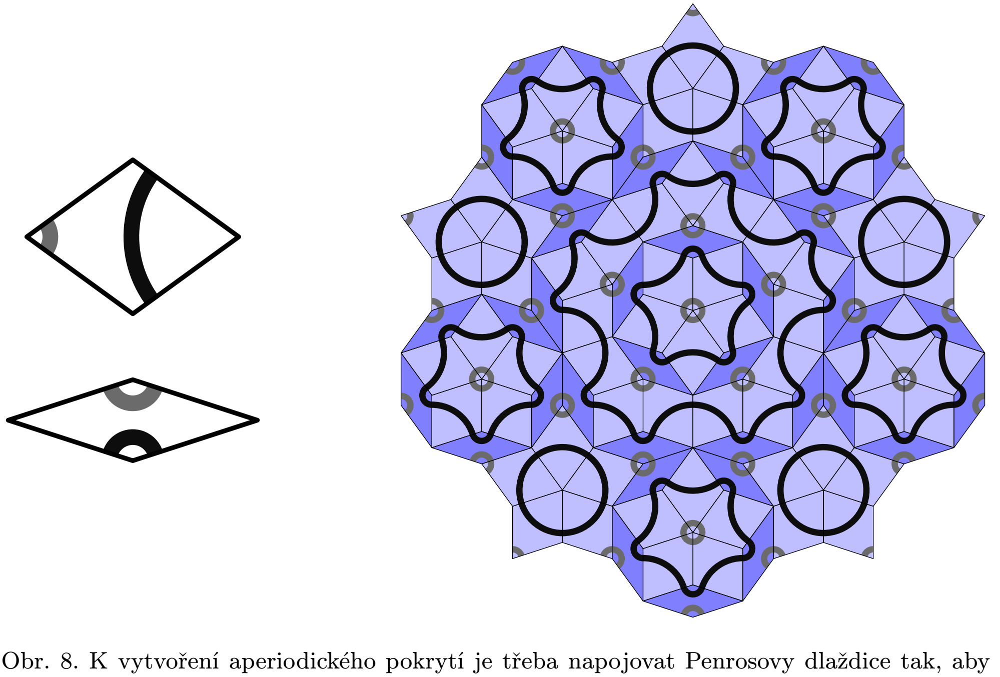
$$\cos 72^\circ = \frac{1}{2\alpha}.$$

Předpokládejme, že dlaždice mají jednotkové délky stran. Pak první dlaždice má obsah $\sin 72^\circ = 2\sin 36^\circ \cos 36^\circ$ a druhá dlaždice $\sin 36^\circ$. Poměr jejich obsahů je tedy také roven zlatému řezu

$$\sin 72^\circ : \sin 36^\circ = 2\cos 36^\circ = \alpha.$$

Penrose přiznává, že se inspiroval Keplerovým dílem *Harmonices mundi,* kde se vyšetřují možnosti pokrytí roviny pětiúhelníkovými dlaždicemi. Pro konstrukci Penrosova pokrytí je třeba, aby všechny dlaždice splňovaly tzv. *Penrosovo pravidlo:*

Dlaždice je třeba napojovat tak, aby na sebe spojitě navazovaly oblouky stejné barvy nakreslené na dlaždicích (viz obr. 8).



Obr. 8. K vytvoření aperiodického pokrytí je třeba napojovat Penrosovy dlaždice tak, aby na sebe spojitě navazovaly vyznačené oblouky stejné barvy.

Nejpřekvapivější vlastností Penrosových pokrytí roviny je skutečnost, že nejsou nikdy periodická. Pokud tedy takové pokrytí posuneme o nějaký vektor, nikdy se nebude shodovat s původním pokrytím, i když existuje jen konečný počet možností, jak obklopit daný vrchol Penrosovými dlaždicemi. O Penrosově pokrytí existuje velké množství literatury. Zde připomeneme jen jeho původní článek [17], v němž se kosočtverečné dlaždice z obr. 8 poprvé objevují.

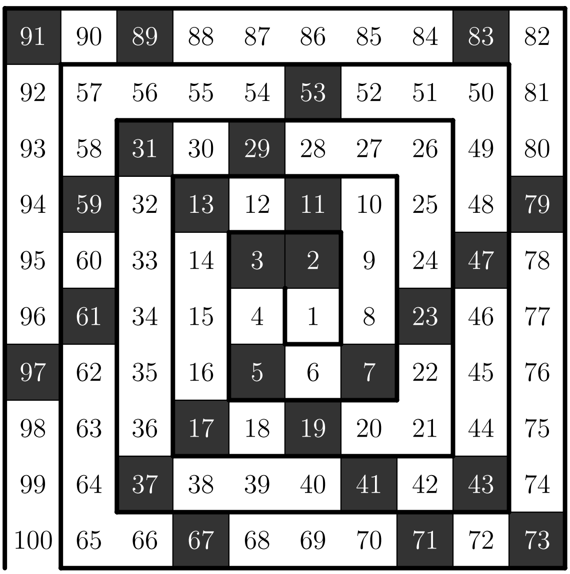
Věta (Penrosova). *Žádné pokrytí roviny Penrosovými dlaždicemi splňující Penrosovo pravidlo není periodické.*

Důkaz lze nalézt např. v monografii [8, Chapt. 10].

Z Penrosových dlaždic můžeme sestavit i periodická pokrytí, když porušíme Penrosovo pravidlo. Například tak, že pospojujeme dlaždice jednoho či druhého typu dlaždic do nekonečně dlouhých pásů, z nichž pak lze vytvářet různá periodická pokrytí. K tomu, abychom dostali aperiodické pokrytí, bohužel nestačí požadovat, aby dvě sousední dlaždice netvořily rovnoběžník. Například lze sestavit periodické pokrytí Penrosovými dlaždicemi, kde každý vrchol je obklopen čtyřmi dlaždicemi s vrcholovými úhly vždy ve stejném pořadí: 36°, 72°, 144° a 108°. V tomto případě také není splněno Penrosovo pravidlo. Poznamenejme, že Penrosovo pokrytí lze zobecnit i do vícerozměrných prostorů (viz např. [7, s. 334]).

V roce 1986 André Katz nalezl aperiodické pokrytí roviny vykazující lokální sedmičetnou rotační symetrii (viz obr. 5). Jeho tři typy dlaždic mají opět tvar kosočtverců, jejichž ostré úhly jsou postupně $180^\circ/7$, $360^\circ/7$ a $540^\circ/7$.

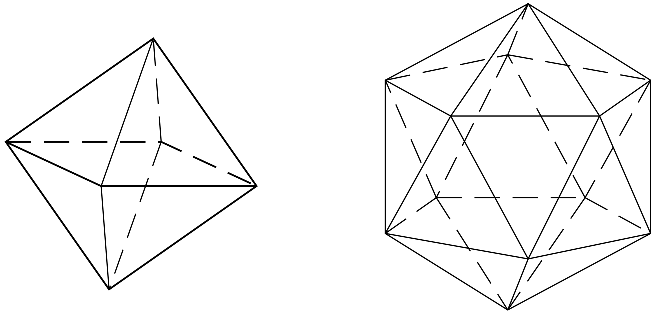
Rovinu lze také aperiodicky vyplnit pouze jedním typem dlaždic, které mají tvar např. rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka. K tomu stačí uvažovat známou Ulamovu spirálu, kterou v roce 1963 navrhl polský matematik Stanislaw Marcin Ulam (1909–1984). Prvočísla jsou v ní napsána pro odlišení na černých čtverečcích. Ty rozdělíme diagonálou se sklonem 1 na dva trojúhelníky. Ostatní čtverce rozdělíme diagonálou se sklonem (-1).



Obr. 9. Ulamova čtvercová spirála přirozených čísel. Prvočísla jsou pro odlišení znázorněna na černém podkladě.

3. Polopravidelná tělesa

Řecký filosof Platón (427–347 př. n. l.) vykládal kosmologii na základě čistě geometrických představ. Ve svém pozdním dialogu *Tímaios* se zmiňuje o pěti pravidelných tělesech v trojrozměrném prostoru. Připomeňme, že *pravidelný mnohostěn* (též *platónské těleso*) je konvexní[4]) mnohostěn, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky a v jehož každém vrcholu se stýká stejný počet stěn.



Obr. 10. Vlevo je pravidelný osmistěn. Pravidelný dvacetistěn (ikosaedr) vpravo má 6 pětičetných rotačních os symetrie.

Krychle, jež má 8 vrcholů a 6 stěn, je duální k osmistěnu, protože ten má 6 vrcholů a 8 stěn (srov. obr. 10). Podobně dvanáctistěn, který má 20 vrcholů, je duální k dvacetistěnu, který má 12 vrcholů. Čtyřstěn je duální sám k sobě.

Podobně, jako jsme vyšetřovali pravidelná a polopravidelná pokrytí roviny pravidelnými mnohoúhelníky, lze studovat i tzv. polopravidelná tělesa.

Polopravidelné těleso je konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou pravidelné mnohoúhelníky a všechny prostorové úhly ve vrcholech mnohostěnu jsou přímo či nepřímo[5]) shodné.

Speciálním případem polopravidelných těles jsou platónská pravidelná tělesa, jejichž povrch je tvořen pravidelnými mnohoúhelníky jednoho typu. Polopravidelná tělesa, jejichž povrch je tvořen pravidelnými mnohoúhelníky dvou či více typů, se dělí na archimédovská tělesa, pravidelné hranoly a pravidelné antihranoly. Jejich existenci lze vyšetřovat pomocí diofantických nerovnic (viz [12]) podobně jako v důkazu Keplerovy věty. Pravidelné hranoly (resp. pravidelné antihranoly) mají dvě protilehlé stěny tvořené stejným pravidelným n-úhelníkem a ostatní stěny jsou čtverce (resp. rovnostranné trojúhelníky). Speciálním případem pravidelného hranolu (resp. pravidelného antihranolu) je krychle (resp. pravidelný osmistěn). Přehled třinácti archimédovských

---

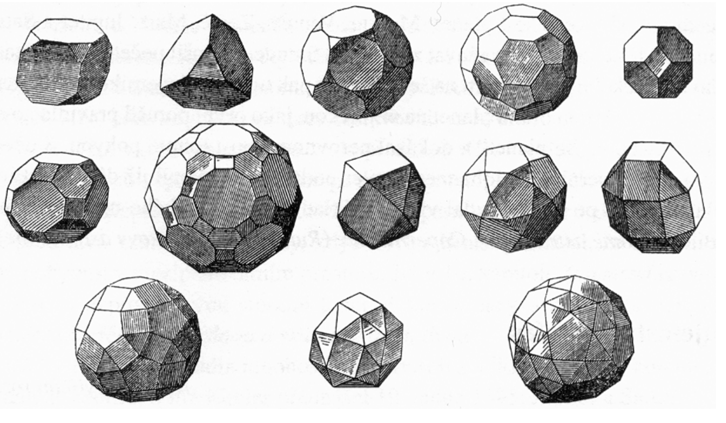
[4]) Předpoklad konvexity je podstatný. Existuje totiž nekonvexní dvacetistěn, který má na svém povrchu 20 rovnostranných trojúhelníků a v každém vrcholu se stýká 5 hran.

[5]) Prostorový úhel je nepřímo shodný se svým zrcadlovým obrazem.

těles podává Johannes Kepler ve druhé kapitole *Harmonií světa (Harmonices mundi).* Tato tělesa jsou pojmenována po antickém mysliteli Archimédovi.

Kolem roku 1905 bylo objeveno ještě čtrnácté archimédovské těleso, které vznikne otočením „horní vrstvy“ desátého tělesa z obr. 11 o 45° a ztratí tak středovou symetrii (viz [5, Fig. 27]). Další dvě archimédovská tělesa můžeme dostat jako zrcadlové obrazy posledních dvou těles z obr. 11 (tj. existuje jejich levá a pravá forma podobně jako u poslední Keplerovy mozaiky na obr. 3). Terminologie, co je archimédovské těleso, ale není jednotná. Všimněme si ještě, že několik polopravidelných těles má pětičetnou rotační symetrii vůči některým osám.

Polopravidelná tělesa mají řadu použití v krystalografii a teorii bodových grup. Používají se i pro dekorační účely (např. na nástupišti stanice Lužiny Metra B v Praze). Také klasický fotbalový míč připomíná archimédovské těleso o 12 pětiúhelníkových a 20 šestiúhelníkových stěnách (viz čtvrté těleso na obr. 11). Tento mnohostěn má 60 vrcholů a objevuje se například v chemii. Ukázalo se totiž, že existuje stabilní molekula uhlíku, tzv. fulleren C_{60}, která má 60 atomů umístěných právě ve vrcholech takového polopravidelného tělesa. Také některá pylová zrnka či viry mají tvar připomínající polopravidelná tělesa. Konstrukce triangulace povrchu koule se často odvozuje z triangulací trojúhelníkových stěn pravidelného dvacetistěnu. Pravidelný dvacetistěn (viz obr. 10) byl také použit k rozdělení trojrozměrného prostoru na ostroúhlé čtyřstěny (srov. [6] a [2]). Krychle je jediné platónské těleso, jehož shodnými exempláři lze (bez mezer) vyplnit prostor.[6]) Lze jej ale též vyplnit střídavě pravidelnými čtyřstěny a osmistěny tak, že každá trojúhelníková stěna je vždy společná jednomu čtyřstěnu a jednomu osmistěnu. Takovou krystalovou mřížku má diamant a ta z něj činí nejtvrdší z nerostů.



Obr. 11. Archimédovská tělesa z Keplerova díla Harmonices mundi.

[6]) Podle [10, kap. 6.5] lze prostor vyplnit i rovnoběžnostěnem, hexagonálním hranolem, rombickým dvanáctistěnem, prodlouženým rombickým dvanáctistěnem a Thompsonovým čtrnáctistěnem.

Poznamenejme ještě, že archimédovská tělesa lze zobecnit do vícerozměrných eukleidovských prostorů $\mathbb{R}^d$. Pro dimenze $d > 3$ existuje právě 7 polopravidelných těles (kromě hranolů a antihranolů), z toho tři pro $d = 4$ a jedno v dimenzích $d = 5, 6, 7, 8$ (viz [1]). Například ve čtyřrozměrném prostoru lze zkonstruovat polopravidelné těleso, které vykazuje pětičetnou symetrii, má jen 10 vrcholů a jeho povrch je tvořen 5 pravidelnými čtyřstěny a 5 pravidelnými osmistěny.

Prostor $\mathbb{R}^8$ lze bez mezer vyplnit polopravidelným tělesem, o jehož grupě symetrií E_8 se psalo v minulém čísle PMFA (viz [22]).[7]) Je zajímavé, že koule vepsané těmto tělesům tvoří nejhustší uspořádání stejně velkých koulí v $\mathbb{R}^8$ (viz [13] a [15]). Každá koule se přitom dotýká 240 dalších. Této vlastnosti se využívá při konstrukci jednoho z nejefektivnějších Hammingových samoopravných kódů. Množina středů koulí je

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_8) \in \mathbb{Z}^8 \cup (\mathbb{Z} + \tfrac{1}{2})^8 \mid \sum_{i=1}^{8} x_i \equiv 0 \pmod 2\}.$$

Voronoiovy buňky odpovídající těmto středům tvoří právě jednotlivé kopie tohoto zajímavého polopravidelného tělesa.

4. Jedinečnost čtyřrozměrného prostoru

Čtyřrozměrný eukleidovský prostor $\mathbb{R}^4$ má mezi ostatními eukleidovskými prostory zcela zvláštní postavení. Je dost neobvyklý ve srovnání s kteroukoliv jinou dimenzí. Obsahuje největší konečný počet pravidelných polytopů (tj. zobecnění platónských těles), kterých je v $\mathbb{R}^4$ šest, viz [3], [18]. O dvou z nich jsme se již zmínili v kapitole 2.

Čtyřrozměrný prostor je izomorfní s tělesem kvaternionů. Lieova grupa všech rotací v $\mathbb{R}^d$ je jednoduchá kromě případu $d = 4$, kdy se rozpadá na dvě kopie třídimenzionální grupy rotací.[8]) V $\mathbb{R}^4$ existuje dvourozměrná neprotínající se uzavřená neorientovatelná plocha (známá jako Kleinova láhev). V $\mathbb{R}^4$ také existuje krystalová mřížka vykazující pětičetnou symetrii (viz další kapitolu).

V roce 1983 Simon Donaldson objevil nestandardní hladkou strukturu čtyřdimenzionálního prostoru (podrobnosti viz [4], [18]). Za tento objev získal v roce 1986 Fieldsovu medaili. Později se ukázalo, že $\mathbb{R}^4$ má dokonce nespočetně mnoho hladkých struktur, zatímco všechny ostatní prostory $\mathbb{R}^d$, $d \neq 4$, připouštějí jen jedinou hladkou strukturu běžně používanou v diferenciálním a integrálním počtu – viz [19, s. 161].

Žádný simplex v $\mathbb{R}^d$ pro $d \geqq 4$ nelze rozdělit na konečný počet simplexů, které by byly podobné původnímu simplexu. Pro $d < 4$ takové simplexy však existují.

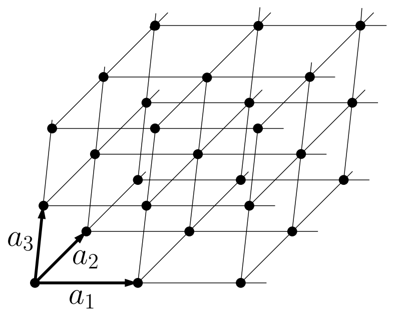
[7]) Řád grupy E_8 je $|E_8| = 4!\,6!\,8!$.

[8]) Velkým triumfem slavného Erlangenského programu bylo právě zjištění, že grupa přímých rotací $SO(n)$ prostoru $\mathbb{R}^d$ je pro $d \neq 4$ jednoduchou Lieovou grupou, zatímco grupa $SO(4)$ je lokálně izomorfní s direktním součinem $SO(3) \times SO(3)$ (viz [18]). Jednoduchá grupa nemá žádné vlastní normální podgrupy (podgrupa $H \subset G$ je normální, když pro každé $h \in H$ a $g \in G$ je $ghg^{-1} \in H$).

V $\mathbb{R}^4$ existuje několik otevřených problémů, které pro ostatní eukleidovské prostory už byly dávno rozřešeny. Například není známo, zda jej lze rozdělit na ostroúhlé simplexy (zatímco pro dimenzi $d \leqq 3$ je dokázáno, že to lze, a pro $d \geqq 5$ je dokázáno, že to nelze). Vzpomeňme také, jak dlouho trvalo, než se podařilo rozřešit slavnou Poincarého hypotézu v $\mathbb{R}^4$ (viz [16]). Možná právě pro zcela výjimečnou rozmanitost $\mathbb{R}^4$ je i náš prostoročas také čtyřrozměrný (alespoň lokálně). Jednoduchý model časoprostoru je dán čtyřrozměrnou nafukující se koulí, jejímž povrchem je třírozměrná sféra prostorových souřadnic – náš vesmír a čas plyne v radiálním směru. Takový model prostoročasu je kromě počátku lokálně izomorfní s $\mathbb{R}^4$.

5. Pětičetná symetrie ve čtyřrozměrném prostoru

Prostorová mřížka krystalických látek je tvořena hranami navzájem shodných rovnoběžnostěnných buněk definovaných pomocí tří lineárně nezávislých vektorů $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$. Budeme předpokládat, že krystalová mřížka je neohraničená a že má translační symetrii vzhledem k celočíselným násobkům vektorů a_i. Francouzský krystalograf Auguste Bravais (1811–1863) studoval bodové grupy symetrií mřížek krystalů v $\mathbb{R}^3$ (tj. shodností zobrazujících celou mřížku na sebe), ve kterých je alespoň jeden bod samodružný. Symetriemi takových mřížek mohou být např. otočení kolem přímky pouze o úhel $k \cdot 360°/n$, kde k je celé číslo a $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Krystalové mřížky tak mohou mít dvojčetnou, trojčetnou, čtyřčetnou nebo šestičetnou rotační symetrii, ale nikoliv pětičetnou. Pětičetná symetrie se může vyskytovat pouze lokálně, např. u kvazikrystalů, kde jsou sice některé atomy uspořádány do pravidelných dvacetistěnů, ale mezi nimi jsou mezery (viz [7]).



Obr. 12.

Podívejme se nyní na krystalové mřížky v prostorech vyšší dimenze. Nechť $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ označuje standardní bázový vektor o d složkách, který má na i-tém místě jedničku. Označíme-li

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

permutační matici typu $d \times d$, pak

$$e_{i+1} = Pe_i, \quad i = 1, \dots, d-1 \quad \text{a} \quad e_1 = Pe_d.$$

Platí tedy:

Věta. *Pro přirozené číslo $d \geqq 2$ je mocnina P^d jednotková matice typu $d \times d$.*

Jako bezprostřední důsledek dostáváme, že hyperkrychlová mřížka v $\mathbb{R}^5$ má pětičetnou symetrii. Vzniká ale přirozená otázka, zda *existuje mřížka s pětičetnou symetrií v prostorech dimenze menší než 5?*

Odpověď na tuto otázku je kladná pro $d = 4$. Představit si ale komplikovanou geometrii ve čtyřech rozměrech vůbec není jednoduché. Pro α, β ze vztahu (2) definujme lineárně nezávislé jednotkové vektory

$$a_1 = (1, 0, 0, 0)^\top,\ a_2 = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{\beta}{2}, 0\right)^\top,\ a_3 = \left(0, -\tfrac{\beta}{2}, -\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}\right)^\top,\ a_4 = (0, 0, 0, -1)^\top \tag{3}$$

a zrcadlení r_i vztahy (viz [14]):

$$\begin{aligned} r_i(a_i) &= -a_i, \\ r_i(a_j) &= a_i + a_j \quad \text{pro } |i-j| = 1, \\ r_i(a_j) &= a_j \quad \text{pro } |i-j| > 1, \end{aligned} \tag{4}$$

kde $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Z vyjádření (3) se lze snadno přesvědčit, že součet dvou (i více) vektorů a_i se sousedními indexy je opět jednotkový vektor.

Rovina zrcadlení daná r_i je kolmá na vektor a_i a prochází počátkem. Roviny zrcadlení odpovídající r_i a r_j se sousedními indexy svírají 60°, protože skalární součin $a_i^\top a_j = \pm\frac{1}{2}$. Pokud je vzdálenost indexů i a j větší než 1, jsou roviny zrcadlení r_i a r_j k sobě kolmé.

Dále definujme množinu vrcholů krystalové mřížky v $\mathbb{R}^4$

$$V = \Big\{ \sum_{i=1}^{4} c_i a_i \,|\, c_i \in \mathbb{Z} \Big\},$$

která má zřejmě translační symetrii v celočíselných násobcích každého směru a_i. Vlastní mřížka se tak skládá z hran shodných čtyřrozměrných rovnoběžnostěnů.

Věta. *Existuje neidentické izometrické[9]) zobrazení $\mathcal{A}$ množiny V na sebe takové, že*

$$\mathcal{A}^5(x) = x \quad \forall x \in V.$$

Důkaz. Definujme izometrické zobrazení

$$\mathcal{A} = r_1 r_3 r_2 r_4.$$

Pak podle (4) platí

$$\mathcal{A}(a_1) = r_1 r_3 r_2(a_1) = r_1 r_3(a_1 + a_2) = r_1(a_1 + a_2 + a_3) = a_2 + a_3,$$

$$\mathcal{A}(a_2) = r_1 r_3 r_2(a_2) = -r_1 r_3(a_2) = -r_1(a_2 + a_3) = -a_1 - a_2 - a_3,$$

[9]) Izometrické zobrazení zachovává vzdálenosti.

$$\mathcal{A}(a_3) = r_1r_3r_2(a_3+a_4) = r_1r_3(a_2+a_3+a_4) = r_1(a_2+a_3+a_4) = a_1+a_2+a_3+a_4,$$

$$\mathcal{A}(a_4) = -r_1r_3r_2(a_4) = -r_1r_3(a_4) = -r_1(a_3+a_4) = -a_3-a_4.$$

Odtud plyne, že $\mathcal{A}$ je lineární operátor z diskrétní množiny V do V, který zobrazuje následující prvky takto:

$$a_1 \mapsto a_2+a_3 \mapsto a_4 \mapsto -(a_3+a_4) \mapsto -(a_1+a_2) \mapsto a_1,$$
$$a_2 \mapsto -(a_1+a_2+a_3) \mapsto -(a_2+a_3+a_4) \mapsto a_3 \mapsto a_1+a_2+a_3+a_4 \mapsto a_2.$$

Vidíme, že $\mathcal{A}^5(a_i) = a_i$ pro všechna $i = 1,2,3,4$, a tedy $\mathcal{A}^5$ je identické zobrazení.

□

Podívejme se ještě podrobněji na operátor $\mathcal{A}$ z předchozí věty, který vyjádříme pomocí maticového aparátu. Zobrazení r_i jsou definována ortogonálními maticemi zrcadlení

$$A_i = I - 2a_ia_i^\top, \quad i = 1,2,3,4,$$

tj. $r_i(x) = A_ix$ pro $x \in \mathbb{R}^4$, kde

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & \beta & 1 & 0 \\ \beta & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta \\ 0 & 1 & \beta & \alpha \\ 0 & \beta & \alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pak operátor $\mathcal{A}$ je dán ortogonální maticí

$$A = A_1A_3A_2A_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -\alpha & -\beta & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & -\beta \\ 1 & \beta & 0 & -\alpha \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vlastní čísla výsledné matice A jsou

$$\lambda_{1,4} = \cos 72^\circ \pm \mathrm{i}\sin 72^\circ, \quad \lambda_{2,3} = -\cos 36^\circ \pm \mathrm{i}\sin 36^\circ.$$

Protože nejsou reálná, jediný pevný bod zobrazení $\mathcal{A}(x) = Ax$ je nula. Vzhledem k předchozí větě je mocnina A^5 jednotková matice. Poznamenejme ještě, že vlastní čísla matice

$$A^4 = A^{-1} = A^\top = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -\alpha & 0 & \beta & 1 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & -\beta & -\alpha & -1 \end{bmatrix}$$

jsou stejná jako u matice A.

Na závěr můžete ještě hledat odpověď na otázku, zda existuje mřížka vykazující sedmičetnou symetrii v $\mathbb{R}^6$.

Poděkování. Autoři děkují paní prof. Ing. Editě Pelantové, CSc., a RNDr. Ivanu Saxlovi, DrSc., za cenné diskuse. Práce na tomto článku byla podpořena grantem č. IAA 100190803 GA AV ČR a výzkumným záměrem AV0Z 10190503.

Literatura

[1] Blind, G., Blind, R.: *The semiregular polytopes.* Comment. Math. Helvetici *66* (1991), 150–154.

[2] Brandts, J., Korotov, S., Křížek, M.: *O triangulacích bez tupých úhlů.* PMFA *50* (2005), 193–207.

[3] Coxeter, H. S. M.: *Regular polytopes.* Methuen, London, New York 1948, 1963.

[4] Donaldson, S. K.: *An application of gauge theory to four-dimensional topology.* J. Differential Geom. *18* (1983), 279–315.

[5] Duncan, M., Sommerville, Y.: *Semi-regular networks of the plane in absolute geometry.* Trans. Roy. Soc. Edinburgh *41* (1905), 725–747.

[6] Eppstein, D., Sullivan, J. M., Üngör, A.: *Tiling space and slabs with acute tetrahedra.* Comput. Geom.: Theory and Appl. *27* (2004), 237–255.

[7] Fiala, J.: *Kvazikrystaly.* PMFA *36* (1991), 336–346.

[8] Grünbaum, B., Shephard, G. C.: *Tilings and patterns.* W. H. Freeman and Company, New York 1987.

[9] Hales, T. C.: *Dělové koule a včelí plásty.* PMFA *46* (2001), 101–118.

[10] Jucovič, E.: *Konvexné mnohosteny.* Veda, Bratislava 1981.

[11] Křížek, M.: *O Keplerově rovnici.* Matematika–fyzika–informatika *18* (2008/2009), 449–452.

[12] Křížek, M., Somer, L., Šolcová, A.: *Kouzlo čísel.* Edice Galileo, Academia, Praha, 2009.

[13] Levenshtein, V. I.: *On bounds for packing in n-dimensional Euclidean space.* Soviet Math. Dokl. *20* (1979), 417–421.

[14] Masáková, Z., Pelantová, E., Patera, J.: *Projekce vícerozměrných krystalografických mřížek jako matematický model pro kvazikrystaly.* Českosl. čas. fyz. *53* (2003), 325–329.

[15] Odlyzko, A. M., Sloane, N. J. A.: *New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions.* J. Combin. Theory Ser. A *26* (1979), 210–214.

[16] O'Shea, D.: *Poincarého domněnka.* Edice Galileo, Academia, Praha 2009.

[17] Penrose, R.: *Role of aesthetics in pure and applied mathematical research.* Bull. Inst. Maths. Appl. *10* (1974), 266–271.

[18] Stern, R. J.: *Instantony a topologie čtyřrozměrných variet.* PMFA *30* (1985) 82–92.

[19] Stewart, I.: *Odsud až do nekonečna.* Argo/Dokořán, Praha 2006.

[20] Stillwell, J.: *Stodvacetistěn v* $\mathbb{R}^4$. PMFA *46* (2001), 265–280.

[21] Šolcová, A.: *Johannes Kepler, zakladatel nebeské mechaniky.* Prometheus, Praha 2004.

[22] van Leeuwen, M.: *Výpočet polynomů Kazhdana, Lustiga a Vogana pro rozštěpení grupy* E_8. PMFA *53* (2008), 315–321.