Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

František Katrnoška; Michal Křížek; Lawrence Somer

Magické čtverce a sudoku

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 53 (2008), No. 2, 113–124

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141848`

Magické čtverce a sudoku

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

$s = 65$

Věnováno prof. RNDr. Karlu Segethovi, CSc., k jeho s-tým narozeninám.

František Katrnoška, Michal Křížek, Praha, Lawrence Somer, Washington

1. Úvod

První autor tohoto článku nedávno publikoval v Pokrocích přehledný článek o latinských čtvercích a jejich souvislostech s konečnými projektivními rovinami a genetickým kódem (viz [16]). Připomeňme, že *latinský čtverec řádu n* je čtvercová matice téhož řádu taková, že v každém řádku a v každém sloupci se každý prvek nějakého souboru mohutnosti n vyskytuje právě jednou (viz [9]). Dále se v [16] zavádí *zobecněný latinský čtverec,* což je čtvercová matice řádu n taková, že součty všech prvků každého řádku a každého sloupce jsou identické a jsou rovny témuž číslu. Latinské čtverce mají zajímavé aplikace při organizaci turnajů, v zemědělství či kódování (viz [5]).

V tomto článku si přiblížíme dvě speciální třídy zobecněných latinských čtverců, a sice magické čtverce a každé výsledné postavení hry sudoku. Miliony lidí na celém světě se v rámci rekreační matematiky s nadšením věnují oběma těmto třídám pro jejich matematickou krásu i pro potěšení. Jsou vřele doporučovány i didaktiky matematiky, neboť procvičují logické myšlení (viz [20]). Pojďme se tedy společně podívat na některá tvrzení i otevřené problémy týkající se magických čtverců a sudoku.

2. Magické čtverce

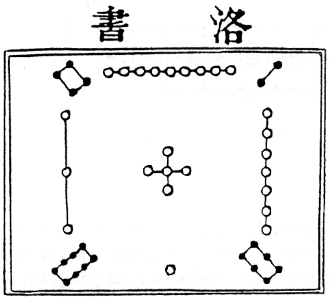
Magickým čtvercem řádu n rozumíme čtvercovou matici $M = (m_{ij})$ řádu n, která obsahuje pouze celá čísla a součet čísel v libovolném řádku, v libovolném sloupci i na obou úhlopříčkách je týž. Tento součet je vlastně stopa matice $\sum_i m_{ii}$, a proto

Doc. RNDr. František Katrnoška, CSc., Ústav matematiky VŠCHT, Technická 5, 166 28 Praha 6

Prof. RNDr. Michal Křížek, DrSc., Matematický ústav Akademie věd ČR, v.v.i., Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: krizek@math.cas.cz

Prof. Dr. Lawrence Somer, Department of Mathematics, Catholic University of America, Washington, D.C. 20064, U.S.A., e-mail: somer@cua.edu.

jej budeme značit s. Pokud M má všechny prvky stejné, pak se nazývá *konstantní magický čtverec.*



$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Obr. 1. Magický čtverec nebeské želvy.

Magické čtverce hledali již staří Číňané. Na obr. 1 je ukázka magického čtverce 3×3, který byl vyryt do želvího krunýře kolem roku 2200 př. n. l. Albrecht Dürer na svém slavném obrazu *Melencolia I* z roku 1514 zase znázornil magický čtverec 4×4, který uprostřed dolního řádku udává rok vzniku obrazu (viz obr. 2),

$$\begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podle Oxfordského anglického slovníku se slovo „magický čtverec“ poprvé objevilo až v roce 1704 v jednom technickém lexikonu.

Magický čtverec se nazývá *normální* (někdy též *klasický*), jestliže obsahuje čísla $1, 2, \ldots, n^2$. Oba čtverce z obrázků 1 a 2 jsou tedy normální.

Věta 1. *Pro každé $n \neq 2$ existuje normální magický čtverec řádu n. Jeho stopa je $\frac{1}{2}(n^3 + n)$.*

Konstruktivní důkaz toho tvrzení je uveden např. v [1], [18, s. 142–192], [22, s. 37–64], [23, s. 71]. Protože s je řádkový součet daného magického čtverce $n \times n$ a protože tento čtverec má n řádek, platí

$$s = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{1}{n} \frac{n^2(n^2+1)}{2} = \frac{1}{2} n(n^2+1). \tag{1}$$

Ze vztahu (1) dostáváme pro přirozené n tzv. *posloupnost magických konstant* (viz [32, A006003])

$$1, 5, 15, 34, \mathbf{65}, 111, 175, 260, \ldots$$

Zrcadlový obraz magického čtverce i jeho otočení o 90° je zřejmě opět magický čtverec. Odhlédneme-li od těchto symetrií diedrické grupy $\mathcal{D}_4$, pak počet normálních magických čtverců řádu 1, 2, …, 5 je

$$1, 0, 1, 880, 275305224.$$

Obr. 2. Dürerův obraz Melencolia I.

Francouzský matematik Bernard Frénicle de Bessy (1605–1675), přítel Pierra de Fermata, nalezl všech 880 normálních magických čtverců řádu 4. Tento seznam byl však publikován až v roce 1693 po jeho smrti (viz [4, s. 778–783]). Přesný počet normálních magických čtverců řádu 6 není znám. Pomocí metody Monte Carlo byl jejich počet odhadnut na $1.77 \cdot 10^{19}$. Následující poměrně hrubý odhad je dokázán v [29, s. 111].

Věta 2. *Počet normálních magických čtverců řádu $n > 1$ je shora ohraničen číslem*

$$\frac{(n^2)!}{8(2n+1)!}.$$

Při hledání obecných magických čtverců pro $n \geqq 3$ máme jistou libovůli, protože je třeba najít n^2 přirozených čísel splňujících soustavu $2n+2$ lineárních diofantských rovnic. Existuje tudíž poměrně velké množství metod, jak magické čtverce sestavovat.

Například Claude Gaspard Bachet de Méziriac, Qian Jianping, Phillipe de la Hire a mnozí další objevili algoritmy pro jejich konstrukci (viz [27]). Pokud je dán libovolný magický čtverec, pak také pomocí teorie grup lze najít další magické čtverce (viz [33]).

Lidé si odedávna vymýšlejí (zejména pro zábavu) rozmanité magické čtverce se zajímavými a mnohdy až překvapivými vlastnostmi. Uveďme několik příkladů:

$$\begin{bmatrix} 96 & 64 & 37 & 45 \\ 39 & 43 & 98 & 62 \\ 84 & 76 & 25 & 57 \\ 23 & 59 & 82 & 78 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{bmatrix} 69 & 46 & 73 & 54 \\ 93 & 34 & 89 & 26 \\ 48 & 67 & 52 & 75 \\ 32 & 95 & 28 & 87 \end{bmatrix}$$

je dvojice magických čtverců, z nichž první má cifry jednotlivých čísel v opačném pořadí než čtverec druhý.

Jiný bizarní magický čtverec objevil argentinský matematik Rodolfo Marcelo Kurchan. Cifry jeho prvků jsou vzájemně různé a stejnou vlastnost má i řádkový (sloupcový) součet 4 129 607 358,

$$\begin{bmatrix} 1037956284 & 1036947285 & 1027856394 & 1026847395 \\ 1026857394 & 1027846395 & 1036957284 & 1037946285 \\ 1036847295 & 1037856294 & 1026947385 & 1027956384 \\ 1027946385 & 1026957384 & 1037846295 & 1036857294 \end{bmatrix}.$$

Dénes a Keedwell uvádějí ve své knize [8] *multiplikativní magický čtverec*

$$\begin{bmatrix} 162 & 207 & 51 & 26 & 133 & 120 & 116 & 25 \\ 105 & 152 & 100 & 29 & 138 & 243 & 39 & 34 \\ 92 & 27 & 91 & 136 & 45 & 38 & 150 & 261 \\ 57 & 30 & 174 & 225 & 108 & 23 & 119 & 104 \\ 58 & 75 & 171 & 90 & 17 & 52 & 216 & 161 \\ 13 & 68 & 184 & 189 & 50 & 87 & 135 & 114 \\ 200 & 203 & 15 & 76 & 117 & 102 & 46 & 81 \\ 153 & 78 & 54 & 69 & 232 & 175 & 19 & 60 \end{bmatrix},$$

součin (resp. součet) jehož čísel v libovolném řádku, v libovolném sloupci i na obou úhlopříčkách je roven stejnému číslu 2 058 068 231 856 000 (resp. 840).

Speciálním magickým čtvercům se dávají nejrůznější jména, např. bimagický, trimagický, panmagický, ďábelský, satanský (viz např. [21], [22], [31]). Uveďme si příklad *apokalyptického magického čtverce* 6×6

$$\begin{bmatrix} 3 & 107 & 5 & \mathbf{131} & 109 & 311 \\ 7 & 331 & 193 & 11 & \mathbf{83} & 41 \\ 103 & 53 & 71 & 89 & 151 & \mathbf{199} \\ \mathbf{113} & 61 & 97 & 197 & 167 & 31 \\ 367 & \mathbf{13} & 173 & 59 & 17 & 37 \\ 73 & 101 & \mathbf{127} & 179 & 139 & 47 \end{bmatrix},$$

který objevil Allan W. Johnson (viz [21]). Má některé vskutku pozoruhodné vlastnosti. Povšimněte si, že jeho prvky jsou vzájemně různá prvočísla. Součet čísel v každém řádku, sloupci a na obou diagonálách je roven *apokalyptickému číslu* 666, které je zmiňováno ve Zjevení Janově v Novém zákonu v kap. 13 o šelmě. Součet 666 je ale i na tzv. přerušených diagonálách v obou směrech. Jedna z nich je pro zvýraznění vytištěna tučně a pro ni máme $113 + 13 + 127 + 131 + 83 + 199 = 666$. Jiná taková přerušená diagonála dává $3 + 101 + 173 + 197 + 151 + 41 = 666$ atd.

Samotné apokalyptické číslo 666 má řadu zvláštních reprezentací. Například je součtem čtverců po sobě jdoucích prvočísel

$$666 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2,$$

je největším trojúhelníkovým číslem T_i, které má stejné cifry, tj.

$$666 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 36 = T_{36},$$

a jeho cifry jsou dokonalá čísla. Je také tzv. *Smithovým číslem.* To znamená, že součet cifer čísla 666 je roven součtu cifer všech jeho prvočinitelů (včetně násobnosti), čili $666 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$ a přitom platí

$$6 + 6 + 6 = 2 + 3 + 3 + 3 + 7.$$

Číslo 666 je také součtem dvou palindromických prvočísel $666 = 313 + 353$,

$$666 = 1^6 - 2^6 + 3^6, \quad 666 = 6 + 6 + 6 + 6^3 + 6^3 + 6^3 \text{ aj.}$$

Navíc hodnota Eulerovy funkce je $\varphi(666) = 6 \cdot 6 \cdot 6$.

Věta 3. *Součet dvou magických čtverců stejného řádu je magický čtverec. Vynásobíme-li magický čtverec celým číslem, dostaneme opět magický čtverec.*

Důkaz je zřejmý. Pomocí věty 3 lze definovat moduly magických čtverců nad celými čísly (viz např. [2], [24], [29], [30]). Nyní větu 3 využijeme k důkazu velmi překvapivého tvrzení.

Věta 4. *Pro libovolné $n \geqq 3$ existuje magický čtverec řádu n obsahující pouze prvočísla.*

Důkaz. Nechť $n \geqq 3$ je dáno. Podle slavné Greenovy-Taovy věty množina prvočísel obsahuje libovolně dlouhé aritmetické posloupnosti prvočísel (viz [13], [17]). Můžeme tedy najít n^2 prvočísel $p_1, p_2, \ldots, p_{n^2}$, která tvoří aritmetickou posloupnost s počátečním členem $a = p_1$ a diferencí $d = p_2 - p_1$.

Podle věty 1 existuje normální magický čtverec řádu n. Vynásobíme-li jej nejprve d a přičteme konstantní čtverec, jehož prvky jsou $a - d$, dostaneme hledaný magický čtverec. Jinými slovy čísla $1, 2, \ldots, n^2$ v normálním magickém čtverci nahradíme ve stejném pořadí prvočísly $p_1, p_2, \ldots, p_{n^2}$. Přitom součty jednotlivých řádků, sloupců i diagonál budou podobně jako v důkazu věty 1 rovny

$$s = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} (a + (k-1)d) = \frac{1}{2} n(2a + (n^2 - 1)d). \quad \square$$

Použijeme-li metodu z důkazu věty 4 např. na magický čtverec z obrázku 1 a na aritmetickou posloupnost prvočísel

$$199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879$$

s počátečním členem $a = 199$ a diferencí $d = 210$, dostaneme prvočíselný magický čtverec

$$\begin{bmatrix} 829 & 1879 & 409 \\ 619 & 1039 & 1459 \\ 1669 & 199 & 1249 \end{bmatrix}.$$

Rudolf Ondrejka (1928–2001) objevil magický čtverec obsahující prvočísla, která netvoří aritmetickou posloupnost

$$\begin{bmatrix} 17 & 89 & 71 \\ 113 & 59 & 5 \\ 47 & 29 & 101 \end{bmatrix}.$$

Autor apokalyptického čtverce zkonstruoval jiný magický čtverec, který obsahuje po sobě jdoucí prvočísla,

$$\begin{bmatrix} 37 & 83 & 97 & 41 \\ 53 & 61 & 71 & 73 \\ 89 & 67 & 59 & 43 \\ 79 & 47 & 31 & 101 \end{bmatrix}.$$

Z těchto příkladů je zřejmé, že algoritmus uvedený v konstruktivním důkazu věty 4 nedává všechny prvočíselné magické čtverce.

Magické čtverce stejného řádu lze mezi sebou násobit a umocňovat stejně jako matice (viz [28]), i když obecně nedostaneme magické čtverce. Platí ale následující věta.

Věta 5. *Je-li M magický čtverec řádu 3 a k liché přirozené číslo, pak M^k je také magický čtverec.*

Důkaz tohoto tvrzení probíhá indukcí, ale provádět jej nebudeme. Opírá se o základní algebraické vlastnosti a o následující skutečnost. Přímo z definice plyne, že vlastní číslo každého magického čtverce libovolného řádu je stopa s a odpovídající (pravý i levý) vlastní vektor je $(1, 1, \ldots, 1)$. Pro dva magické čtverce M_1 a M_2 lze ukázat, že stejný vlastní vektor má součin $M_1 M_2$ i jeho transpozice. Přitom odpovídající vlastní číslo je $s_1 s_2$, kde s_i je stopa matice M_i pro $i = 1, 2$.

Vyzkoušejte si také, že M^2 pro M z obrázku 1 magický čtverec nedá, ale

$$M^3 = \begin{bmatrix} 1149 & 1029 & 1197 \\ 1173 & 1125 & 1077 \\ 1053 & 1221 & 1101 \end{bmatrix}.$$

magický čtverec je. Asi nepřekvapí, že odpovídající stopa s je rovna

$$s = 3375 = 15^3.$$

Větu 5 lze zobecnit i na magické čtverce řádu 4 a 5 za jistých dodatečných podmínek na vedlejší diagonály matice M (viz [28]).

Věta 6. *Nechť n dělí $2s$. Je-li každé číslo magického čtverce řádu n odečteno od $2s/n$, pak dostaneme opět magický čtverec.*

D ů k a z. Jestliže $M = (m_{ij})$ je daný magický čtverec, pak $\overline{M} = (\frac{2s}{n} - m_{ij})$ obsahuje podle předpokladu jen celá čísla. Řádkové, sloupcové i diagonální součty $\overline{M}$ se pak rovnají $2s - s = s$. $\square$

Magický čtverec $\overline{M}$, jehož konstrukce je ve větě 6 (i jejím důkazu), se nazývá *komplementární magický čtverec*. Například komplementární čtverec k apokalyptickému čtverci je opět magický čtverec, ale ne všechny jeho prvky jsou prvočísla. Různé metody konstrukcí magických čtverců lze nalézt např. v [1], [18], [22], [23]. Rozsáhlý seznam literatury o magických čtvercích se uvádí např. v [34].

Magické čtverce se zobecňují nejrůznějšími způsoby na magické hvězdy, kruhy, šestiúhelníky apod. V literatuře se také můžeme setkat s magickými krychlemi a vícerozměrnými hyperkrychlemi (viz [8], [22, s. 238]). Například klasickou magickou krychli $3 \times 3 \times 3$, jejíž čtyři prostorové diagonály mají stejný součet 42, lze po vrstvách zapsat takto:

$$\begin{bmatrix} 2 & 13 & 27 \\ 22 & 9 & 11 \\ 18 & 20 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 16 & 21 & 5 \\ 3 & 14 & 25 \\ 23 & 7 & 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 24 & 8 & 10 \\ 17 & 19 & 6 \\ 1 & 15 & 26 \end{bmatrix}.$$

3. Sudoku — Rubikova kostka 21. století

Každé výsledné postavení populární hry sudoku je speciálním případem latinského čtverce 9×9. Připomeňme, že čtverec sudoku je rozdělen na 9 bloků typu 3×3. Ve výsledném postavení *sudoku* musí každý blok, každý řádek a každý sloupec obsahovat právě jednu z číslic $1, 2, \ldots, 9$.

Například matice

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 6 & 8 & 9 & 2 & 4 & 5 & 7 & 3 \\ 9 & 2 & 4 & 5 & 7 & 3 & 1 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 3 & 1 & 6 & 8 & 9 & 2 & 4 \\ \hline 8 & 1 & 6 & 4 & 9 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 & 3 & 5 & 7 & 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 1 & 6 & 4 & 9 & 2 \\ \hline 6 & 8 & 1 & 2 & 4 & 9 & 7 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 9 & 7 & 3 & 5 & 6 & 8 & 1 \\ 7 & 3 & 5 & 6 & 8 & 1 & 2 & 4 & 9 \end{array}\right]$$

je výsledné postavení hry sudoku. Všimněte si ale, že čísla na každé diagonále jsou vzájemně různá. V tomto speciálním případě se tedy jedná o sudoku, které je zároveň magickým čtvercem 9×9. Obě námi studované třídy mají tedy neprázdný průnik.

Prostřední blok 3×3 je zároveň normálním magickým čtvercem z obrázku 1. Okolní bloky mají řádkové i sloupcové součty 15.

Hra sudoku se poprvé objevila v květnu 1979 v edici *Dell Pencil Puzzles & Word Games #16* na straně 6 pod názvem *Number Place.* Vymyslel ji architekt Howard Garns (viz [7], [12]), který bohužel o několik let později zemřel, a tak se nedočkal jejího obrovského rozkvětu v 21. století. Sudoku vděčí za svůj úspěch zejména Wayne Gouldovi z Nového Zélandu, který se během svého pobytu v Japonsku seznámil s touto hrou a později psal celkem 6 let (až do roku 1997) program, který automaticky generuje úlohy sudoku 9×9 dávající jediná řešení. Do sítě 9×9 se postupně a zcela náhodně přidávají cifry z množiny $\{1, 2, \ldots, 9\}$ tak, aby byla splněna pravidla výsledného postavení sudoku. Jakmile program zjistí, že úloha má právě jedno řešení, přestane přidávat další cifry a zadání je hotovo.

Samotné slovo *sudoku* je japonská zkratka věty: „*Suuji wa dokushin ni kagiru*“, což znamená „číslice musí zůstat samotná“. Je ale paradoxní, že sami Japonci, kteří mají sudoku velice v oblibě, používají pro ni původní anglický název Number Place. Název *sudoku* totiž vymyslelo nakladatelství Nikoli a nechalo si jej v Japonsku patentovat. Proto se ostatní japonští vydavatelé přidržují anglického termínu, aby se vyhnuli poplatkům. Jelikož je však registrace platná jen pro Japonsko, zbytek světa používá japonskou zkratku *sudoku.*

Místo čísel $1, 2, \ldots, 9$ můžeme samozřejmě psát libovolné jiné symboly, ale to zde dělat nebudeme. Pro $m \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ položíme $n = m^2$ a budeme uvažovat jen ty latinské čtverce, které obsahují čísla $1, 2, \ldots, n$. Takový čtverec nazveme *výsledným postavením sudoku* $n \times n$, jestliže každý z jeho n bloků $m \times m$ obsahuje právě všechna čísla $1, 2, \ldots, n$.

Vzniká otázka, kolik je takových čtverců pro dané n.

Věta 7. *Celkový počet výsledných postavení sudoku* $n \times n$ *pro* $n = 1, 4, 9$ *je po řadě roven* 1, 288 *a* $2^{20} \cdot 3^8 \cdot 5 \cdot 7$.

Důkaz. Omezíme se jen na případ $n = 4$. (Případ $n = 1$ je zřejmý a případ $n = 9$ se podrobně vyšetřuje v [11].) Uvažujme následujících dvanáct matic, které jsou výsledným postavením pro sudoku 4×4:

$$
\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right], \quad
\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right], \quad
\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right], \quad
\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right],
$$

$$
\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right], \quad
\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right], \quad
\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right], \quad
\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right],
$$

$$
\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right], \quad
\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right], \quad
\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right], \quad
\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right].
$$

Povšimněte si,[1]) že levý horní blok 2×2 je ve všech 12 případech stejný. Diagonála pravých dolních bloků obsahuje všech $4 \cdot 3 = 12$ vzájemně různých dvojic z čísel 1, 2, 3, 4. Ostatní čísla lze pak již jednoznačně určit. Počet navzájem různých výsledných postavení sudoku 4×4 je proto

$$4! \cdot 12 = 288.$$

Všechny tyto možnosti vzniknou permutacemi prvků $1, 2, 3, 4$ ve výše uvedených dvanácti maticích. $\square$

Podobným způsobem Bertran Felgenhauer z Technické univerzity v Drážďanech a Frazer Jarvis z Univerzity v Sheffieldu (GB) odvodili, že počet všech možných výsledných postavení sudoku 9×9 činí

$$9!\,2^{13}\,3^4 = 6\,670\,903\,752\,021\,072\,936\,960 \approx 6.671 \cdot 10^{21}$$

(viz [11], [32, A107739, A109741]). Pokud ale vyloučíme „ekvivalentní“ konfigurace modulo všechny symetrie (tj. permutace čísel $1, 2, \ldots, 9$, zrcadlový obraz, rotace, permutace prvních tří řádků, permutace posledních tří sloupců, řádkové permutace bloků apod.), je počet vzájemně různých postavení sudoku[2]) jen 5 472 730 538, tj. přibližně jako je počet obyvatel na naší planetě, viz [25]. Pro srovnání ještě uveďme, že počet všech latinských čtverců 9×9 je přibližně $5.525 \cdot 10^{27}$ (viz [3], [15]).

Pro sudoku 16×16 ale zatím není znám počet všech možností výsledných postavení. Nicméně v [15, s. 714–715] je dokázán následující netriviální horní odhad.

Věta 8. *Počet výsledných postavení $n \times n$ sudoku je shora ohraničen číslem*

$$m^{2m^4} \mathrm{e}^{-2.5m^4 + O(m^3 \log m)}$$

pro dostatečně velké $n = m^2$.

Jako důsledek je v [15] odvozena tato pravděpodobnostní věta.

Věta 9. *Nechť p_m je pravděpodobnost, že náhodně zvolený latinský čtverec řádu $n = m^2$ je zároveň výsledným postavením hry sudoku. Pak*

$$p_m \leqq \mathrm{e}^{-0.5m^4 + O(m^3 \log m)}.$$

Speciálně tedy vidíme, že $p_m \to 0$ pro $m \to \infty$.

Problém řešení sudoku 4×4 je poměrně snadný. Existují jednoduché postačující podmínky pro existenci jediného řešení. Pokud například levý horní blok obsahuje 3

---

[1]) Poznamenejme, že poslední dva čtverce m_{ij} a k_{ij} v prostředním řádku jsou magické. Zároveň jsou to tzv. ortogonální latinské čtverce, tj. matice dvojic (m_{ij}, k_{ij}) obsahuje pouze vzájemně různé dvojice (podrobnosti viz [16]).

[2]) Pro sudoku 4×4 dokonce existují pouze 2 neekvivalentní konfigurace modulo všechny symetrie, viz [15, s. 713].

cifry a levý dolní blok 2 cifry, pak má úloha jediné řešení a toto řešení lze snadno najít. Uveďme sudoku 4×4, která je zadána jen čtyřmi čísly:

$$
\left[\begin{array}{cc|cc}
. & 2 & . & . \\
. & . & 2 & . \\
\hline
. & . & . & 3 \\
4 & . & . & .
\end{array}\right]
\qquad\qquad
\left[\begin{array}{cc|cc}
1 & 2 & 3 & 4 \\
3 & 4 & 2 & 1 \\
\hline
2 & 1 & 4 & 3 \\
4 & 3 & 1 & 2
\end{array}\right].
$$

Čtenář se může přesvědčit, že jediné řešení je vpravo. Tři zadaná čísla však k jedinému řešení nikdy nestačí (viz [15]).

Mnohem komplikovanější je ale řešit sudoku 9×9. Přestože existuje velké množství nejrůznějších postupů, může být řešení konkrétní úlohy dosti složité. Například se eliminují nemožné cifry a redukuje se tak množina přípustných řešení. Velice populární je také metoda pokusu a omylu. Většina programů pro hledání řešení kombinuje střídavě několik algoritmů. Pokud nám některý z nich nedá žádnou novou číslici, použije se další, a tak se to dokola opakuje (i když nemusíme vždy najít řešení).

Přitom občas může dojít k paradoxní situaci, že řešení sudoku s menším počtem zadaných cifer je mnohem lehčí než s větším počtem cifer.

Donald Knuth převádí řešení sudoku na maticový problém. Otázkou, jak vyřešit konkrétní sudoku, se zde zabývat nebudeme, protože v literatuře lze nalézt obrovské množství nejrůznějších metod (viz např. [7], [20]). Soustředíme se ale na problém jednoznačnosti řešení sudoku 9×9.

Uvažujme následující úlohu

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
9 & 2 & 6 & 5 & 7 & 1 & 4 & 8 & 3 \\
3 & 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 2 & 7 & 9 \\
8 & 7 & 4 & 9 & 2 & 3 & 5 & 1 & 6 \\
\hline
5 & 8 & 2 & 3 & 6 & 7 & 1 & 9 & 4 \\
1 & 4 & 9 & 2 & 5 & 8 & 3 & 6 & 7 \\
7 & 6 & 3 & 1 & x & y & 8 & 2 & 5 \\
\hline
2 & 3 & 8 & 7 & y & x & 6 & 5 & 1 \\
6 & 1 & 7 & 8 & 3 & 5 & 9 & 4 & 2 \\
4 & 9 & 5 & 6 & 1 & 2 & 7 & 3 & 8
\end{array}\right].
$$

Vidíme, že má dvě řešení $x = 4$, $y = 9$ a $x = 9$, $y = 4$. Odtud plyne, že ani 77 zadaných číslic nám ještě obecně nezaručuje jednoznačnost řešení. K jednoznačnosti však stačí alespoň 78 zadaných číslic.

Na druhé straně existují desetitisíce příkladů, kdy pouhých 17 zadaných číslic ve výchozím postavení vede na právě jediné řešení (17 je pro srovnání počet prvků na obou hlavních diagonálách). Zatím ale není známo, zda existuje zadání sudoku se 16 číslicemi, které by mělo jediné řešení. Uveďme si příklad se 16 číslicemi, který má právě 2 řešení (srov. též [7]):

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & . & . & . & . & . & . & . & 5 \\
. & . & . & . & 3 & . & . & . & . \\
. & . & 2 & . & 4 & . & . & . & . \\
\hline
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 3 & 4 & . & . & . & 7 & . & . \\
. & . & . & 2 & . & 6 & . & . & 1 \\
\hline
2 & . & . & . & . & 5 & . & . & . \\
. & 7 & . & . & . & . & . & 3 & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . & .
\end{array}\right]. \tag{2}
$$

Představme ještě nutnou podmínku jednoznačnosti řešení.

Věta 10. *Jestliže má postavení sudoku $n \times n$ jediné řešení, pak mezi zadanými čísly jich musí být alespoň $n-1$ různých.*

Tato věta je přímým důsledkem mnohem silnějších tvrzení z teorie grafů o chromatických polynomech [15]. Je z ní mj. patrno, že úloha (2) nemůže mít jediné řešení, protože se v ní nevyskytují cifry 8 a 9. Kdybychom totiž předpokládali, že má jediné řešení, snadno dojdeme ke sporu, neboť stačí prohodit 8 a 9.

První světový šampionát v řešení standardního sudoku 9×9 se uskutečnil teprve v roce 2006 v italském městě Lucca. Jeho absolutní vítězkou se stala ekonomka Jana Tylová (1974) z České republiky. Světový šampionát v roce 2007 se konal v Praze. Zde vyhrál Američan Thomas Snyder a české družstvo skončilo na třetím místě.[3]) V USA již vzniklo několik organizací podporujících organizování soutěží sudoku (např. The United States Sudoku Association Inc.).

Existuje obrovské množství nejrůznějších variant sudoku v dvojrozměrném i vícerozměrném prostoru (viz např. [7]). V článku [19] se můžete blíže seznámit se sudoku 16×16. Na samotný závěr ještě poznamenejme, že zatím není známo, zda sudoku $n \times n$ představuje tzv. NP-úplný problém (viz [7]).

Poděkování. Autoři děkují Robertu Babilonovi, Milanu Prágerovi a Marku Wolfovi za cenné připomínky. Práce byla podpořena granty IAA 100190803 GA AV ČR a 1P05ME749 MŠMT.

L i t e r a t u r a

[1] Andrews, W. S.: *Magic squares and cubes.* Dover, New York 1960.

[2] Barton, O., Sudbery, J.: *Magic squares and matrix models of Lie algebras.* Adv. Math. *180* (2003), 596–647.

[3] Bammel, S., Rothstein, J.: *The number of* 9×9 *Latin squares.* Discrete Math. *11* (1975), 93–95.

[4] Berlekamp, E. R., Conwey, J. H., Guy, R. K.: *Winning ways, for you mathematical plays, Vol. 2, Games in particular.* Academic Press, London 1982.

[5] Bosák, J.: *Latinské štvorce.* Škola mladých matematiků, sv. 38, Praha 1976.

[3]) V letošním roce se mistrovství světa konalo v indickém městě Goa a český tým se umístil na prvním místě.

[6] DAVIS, T.: *The mathematics of Sudoku.* Preliminary 2007, 1–34.
[7] DELAHAYE, J.-P.: *The science behind SUDOKU.* Sci. Amer. *294* (2006), 71–77.
[8] DÉNES, J., KEEDWELL, A. D.: *Latin squares and their applications.* Akadémiai Kiadó, Budapest, Academic Press, New York 1974.
[9] EULER, L.: *Recherches sur une novelle espèce de quarres magiques.* Verh. Zeeuwsch. Genootsch. Wetensch. Vlissengen *9* (1782), 85–239.
[10] FELGENHAUSER, B., JARVIS, A. F.: *Mathematics of Sudoku I.* Math. Spectrum *39* (2006), 15–22.
[11] FELGENHAUSER, B., JARVIS, A. F.: *There are* 6670903752021072936960 *sudoku grids.* `http://www.shef.ac.uk/~pmlafj/sudoku/`.
[12] GARNS, H.: *Number Place.* Dell Pencil Puzzles and Word Games No. 16, May 1979, s. 6.
[13] GREEN, B., TAO, T.: *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions.* Ann. of Math. *167* (2008), 481–547.
[14] HAYES, B.: *Unwed numbers, the mathematics of Sudoku, a puzzle that boasts, no math. required!.* Amer. Sci. *94* (2006), 12–15.
[15] HERZBERG, A. L., MURTY, M. R.: *Sudoku squares and chromatic polynomials.* Notices Amer. Math. Soc. *54* (2007), 708–717.
[16] KATRNOŠKA, F.: *Latinské čtverce a genetický kód.* PMFA *52* (2007), 177–187.
[17] KLAZAR, M.: *Prvočísla obsahují libovolně dlouhé posloupnosti.* PMFA *49* (2004), 177–187.
[18] KRAÏTCHIK, M.: *Mathematical recreations.* Norton, New York 1942.
[19] MAMANE, B.: *Etes-vous „Sudoku-maniaque“?* Science & Vie, Avril 2006, 154–159.
[20] PEŠKO, Š.: *Riešenie sudoku v tabulkových procesoroch.* Sborník 5. konf. o matematice a fyzice na vysokých školách technických, Brno, 2007, 247–256.
[21] PICKOVER, C. A.: *Wonders of numbers.* Oxford Univ. Press, Oxford 2001.
[22] PICKOVER, C. A.: *The zen of magic squares, circles, and stars.* Princeton Univ. Press, Princeton 2002.
[23] POSTNIKOV, M. M.: *Magičeskie kvadraty.* Nauka, Moskva 1964.
[24] RATLIFF, L. J.: *The dimension of the magic square vector space.* Amer. Math. Monthly *66* (1959), 793–795.
[25] RUSSEL, E., JARVIS, A. F.: *Mathematics of Sudoku II.* Math. Spectrum *39* (2006), 54–58.
[26] SHORTZ, W.: *Sudoku easy: 100 wordless crossword puzzles.* St. Martins Griffin, New York 2005.
[27] STEPHENS, D. L.: *Matrix properies of magic squares.* Master Thesis, Texas Woman's Univ., Denton 1993.
[28] THOMPSON, A. C.: *Odd magic powers.* Amer. Math. Monthly *101* (1994), 339–342.
[29] WARD, J. E.: *Vector spaces of magic squares.* Math. Magazine *53* (1980), 108–111.
[30] WEINER, L. M.: *The algebra of semi-magic squares.* Amer. Math. Monthly *62* (1955), 237–239.
[31] ŽELEZNÝ, I.: *Magické obrazce.* IQ Mensa 8, Ivo Železný, Praha 2001.
[32] `http://www.research.att.com/~njas/sequences`.
[33] `http://www.gaspalou.fr/magic-squares/index.htm`.
[34] `http://www.markfarrar.co.uk/msqref01.htm`.
[35] `www.sudoku.com`.