Sara Robinson

Počítačový vědec objevil algoritmus pro řešení fundamentálního problému teorie grafů v malém paměťovém prostoru

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 53 (2008), No. 1, 42--47

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141839

Počítačový vědec objevil algoritmus pro řešení fundamentálního problému teorie grafů v malém paměťovém prostoru

Sara Robinson, Los Angeles

Významné souvislosti jsou často nalezeny šťastnou náhodou, když se vědec snaží dokázat něco jiného. To se stalo roku 1970, když Leslie Valiant, nyní profesor informatiky na Harvard University, objevil, že jistý typ grafů, zavedený v teorii informace, má významné důsledky i v informatice. Zkoumání důsledků tohoto objevu aktivně probíhá doposud.

Od doby Valiantova objevu používají počítačoví vědci tyto takzvané expandující grafy neboli expandéry při návrhu komunikačních sítí, třídících algoritmů, samoopravujících kódů s kódováním a dekódováním v lineárním čase a také při řešení problémů statistické fyziky. V čisté matematice byly expandéry využity k řešení problémů z teorie míry, geometrie, topologie a výpočetní teorie grup.

Čerstvým výsledkem použití techniky expandérů je práce Omera Reingolda, informatika z Weizmann Institute of Science, který vyřešil dlouho otevřený problém ve výpočetní složitosti. Reingold vymyslel algoritmus, který potřebuje nejmenší možný (až na konstantní faktor) paměťový prostor pro rozhodnutí, zda dva vrcholy v daném neorientovaném grafu jsou spojeny, a který pro spojené vrcholy uvede cestu mezi nimi.

Představte si situaci, že jste se ztratili bez mapy ve městě, kde se nedomluvíte, a potřebujete najít cestu zpět k autu. K dispozici máte pouze maličký zápisník, který se vejde do kapsy. Reingoldův algoritmus, popsaný v předběžné verzi článku v listopadu 2004, by vám poskytl systematický návod, jak prozkoumávat město, ulici za ulicí, až dojdete k autu. A navíc stejná posloupnost odbočení doleva a doprava by fungovala v libovolném jiném městě.

Tento výsledek přichází v době, kdy ohromné soubory dat jsou běžné, a proto získávají na významu paměťově nenáročné algoritmy, třebas zatím nejsou příliš časté, říká Avi Wigderson, profesor informatiky na Institute for Advanced Study v Princetonu. Dodává, že mezi algoritmy s malou paměťovou náročností má však Reingoldův algoritmus centrální úlohu, protože z něj plyne existence paměťově nenáročných algoritmů pro řadu dalších významných problémů, jakými jsou hledání minimální kostry grafu nebo rozhodnutí, zda existuje rovinné nakreslení grafu.

Problém zjistit, zda dva vrcholy v neorientovaném grafu jsou spojené, označovaný jako „neorientovaná souvislost“, je speciálním případem podobně formulovaného

---

Z anglického originálu: *Computer Scientist finds small-memory algorithm for fundamental graph problem*, SIAM News, Vol. 38, Nr. 1, Jan./Feb. 2005, přeložil: RNDr. Lukáš Petrů, e-mail:`lukas.petru@seznam.cz`.

problému pro orientované grafy. Pokud by i pro něj existoval algoritmus s malou paměťovou náročností, mělo by to dalekosáhlé filozofické důsledky, říká Madhu Sudan, profesor informatiky na MIT. Podobně paměťově efektivní algoritmus pro orientovanou souvislost by vyřešil paměťovou analogii problému P versus NP.

Pro Reingolda byl však tento problém svůdný hlavně v souvislosti s důležitým směrem soudobého výzkumu, kterým je otázka vzájemné efektivní náhrady dvou výpočetních zdrojů, paměti a náhodnosti. Pro mnoho výpočetních problémů existuje s ohledem na čas a paměť efektivní randomizovaný algoritmus (tj. algoritmus s náhodnými kroky), ale není znám žádný podobně efektivní deterministický algoritmus. Neorientovaná souvislost, pro kterou byl od 70. let minulého století znám jednoduchý randomizovaný algoritmus s logaritmickou paměťovou složitostí, byla až dosud jedním z takových problémů. Podle Reingolda je jeho nový algoritmus indicií k obecnějšímu závěru: náhodnost nemůže ušetřit paměť. „Věřím, že můj algoritmus nakonec povede k takto obecnému výsledku, a to je teď můj hlavní cíl," říká. (Porozumět vzájemné efektivní náhradě mezi časem a náhodností je považováno za mnohem těžší problém.)

Šťastně nalezená souvislost

V létě 1974 L. Valiant, badatel z univerzity v Leedsu v Anglii, přemýšlel o jednom základním problému nově se rodící disciplíny, teorie výpočetní složitosti. Snažil se dokázat, že určité jednoduché funkce, jako je součin dvou n-ciferných čísel, není možné vypočítat pomocí lineárního počtu operací.

Poté, co znázornil tento výpočet pomocí obvodu — orientovaného acyklického grafu, kde jsou počáteční vstupní cifry propojeny pomocí logických hradel ve vrcholech s koncovými výstupními ciframi — si Valiant všiml, že od každé z k vstupních cifer ke každé z k výstupních cifer musí být přeneseno hodně informace. Toto pozorování zachytil pomocí vlastnosti z teorie grafů: Pro každé dvě k-prvkové množiny vstupních a výstupních cifer existuje k vrcholově disjunktních cest, které je spojují.

Valianta napadlo, že grafy s tak mnoha disjunktními cestami asi mají mnoho hran. Kdyby to tak bylo, pak by uvažovaný obvod měl více než lineární velikost (v počtu vstupních a výstupních vrcholů), což by potvrdilo hledaný dolní odhad. Nakonec Valiant tuto grafovou podmínku zredukoval na jednodušší a dále bádal, zda existují grafy s takovými vlastnostmi.

Krátce nato, při cestě do Paříže, náhodou narazil na odkaz na článek z teorie kódování, který řešil jeho grafový problém. Byl napsán o rok dříve Markem Pinskerem, ruským informačním teoretikem, a byla v něm definice a důkaz existence grafů lineární velikosti, které Pinsker nazval „koncentrátory" a které přesně splňovaly zjednodušenou Valiantovu podmínku. Koncentrátory se vyvinuly z hlouběji ležícího konceptu expandérů, který Pinsker a L. A. Bassalygo zavedli v článku o propojovacích sítích z roku 1971. Podobně jako koncentrátory jsou i expandéry zdánlivě rozporné: mají být zároveň dobře propojené a řídké.

Z Pinskerovy konstrukce koncentrátorů se Valiantovi podařilo odvodit grafy, které mají přesně onu silnější grafovou vlastnost jeho obvodů, ale jen lineárně mnoho hran. V názvu navázal na Pinskera a pojmenoval své grafy „superkoncentrátory“.

I když Valiant nebyl schopen vyřešit svou původní otázku o funkcích (zůstává otevřená dodnes), ukázal, že jeho superkoncentrátory mají mnoho důležitých aplikací v návrhu algoritmů a sítí. Touto prací byla síla koncentrátorů, superkoncentrátorů a expandérů představena společenstvím matematiků a informatiků a nadále hraje podstatnou roli v mnoha oblastech výzkumu, nejnověji v Reingoldově výsledku o souvislosti neorientovaných grafů.

Neorientovaná souvislost v logaritmickém prostoru: 35-leté hledání

Časová složitost neorientované souvislosti byla určena v 70. letech minulého století. Obvyklé algoritmy prohledávání grafu — prohledávání do šířky a prohledávání do hloubky — potřebují čas lineární v počtu vrcholů a hran, a lépe to nejde. Tyto algoritmy ovšem potřebují také paměťový prostor lineární velikosti.

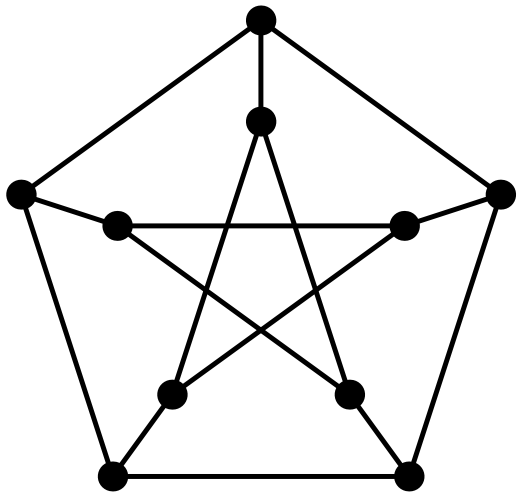
Reingoldův algoritmus pro dané dva vrcholy a neorientovaný graf najde cestu, která je spojuje (pokud existuje) a potřebuje pouze množství paměti logaritmické v počtu vrcholů. Díky tomuto algoritmu se daný problém dostává do skupiny, kterou vědci nazývají „log-space“ problémy, tj. do množiny problémů, které je možno řešit s pamětí o velikosti konstantního násobku logaritmu velikosti problému. Protože zapamatování jména byť jediného vrcholu grafu s n vrcholy vyžaduje logaritmickou paměť, potřebuje tento algoritmus až na konstantní násobek nejmenší možný paměťový prostor. Díky němu je možné projít grafem jen se schopností zapamatovat si pokaždé pouze konstantní počet vrcholů.

Hledání paměťově nenáročných algoritmů pro neorientovanou souvislost začalo na začátku 70. let, současně se zrodem expandérů, které byly nakonec použity k sestrojení těchto algoritmů. První pokus se objevil roku 1970, kdy J. Savitch navrhl algoritmus s paměťovou složitostí $\mathcal{O}\big((\log n)^2\big)$, který běží v superpolynomiálním čase. Poté roku 1979 v této otázce pokročili Romas Aleliunas, Richard Karp, Richard Lipton, László Lovász a Charles Rackoff, když ukázali, že náhodná procházka, která začne v libovolném vrcholu neorientovaného souvislého grafu, navštíví všechny vrcholy v polynomiálním počtu kroků. Protože jejich algoritmus náhodné procházky si musí pamatovat pouze aktuální vrchol a počet již provedených kroků, získali tím pro neorientovanou souvislost pravděpodobnostní algoritmus s logaritmickou paměťovou složitostí. Problémem nyní bylo, jak z algoritmu odstranit náhodnost.

Další významný pokrok nastal roku 1992, kdy Noam Nisan rozvinul původní kritický vhled Steva Cooka, známého definicí pojmu NP-úplnosti. V 70. letech Cook vymyslel koncept „univerzální prohledávací sekvence“ (UPS) pro libovolný graf dané velikosti — předem dané sekvence směrů, která zaručuje navštívení každého vrcholu v souvislé komponentě — a vyjádřil domněnku, že takováto sekvence by mohla vyřešit problém prostorové složitosti neorientované souvislosti.

Alenliunas a kol. ve svém článku reagovali na Cookovu výzvu a spočítali, že UPS polynomiální délky existuje, ale neuměli ji přímo sestrojit. Nisan ve své PhD práci na University of California v Berkeley později ukázal, jak generovat UPS s délkou blízko polynomiální při použití $\mathcal{O}\big((\log n)^2\big)$ prostoru. Krátce nato Nisan s Wigdersonem a Endrem Szemerédim vylepšili Nisanovu práci o UPS a snížili prostorovou složitost na $\mathcal{O}\big((\log n)^{3/2}\big)$. Dosáhli toho pomocí postupného generování nových menších grafů, které zachovávaly souvislost původního grafu. Wigderson a další kolegové následně dokázali snížit mocnitele ještě více, až na 4/3.

V listopadu 2004 Reingold uzavřel hledání, když popsal metodu vytvoření univerzální prozkoumávací sekvence (podobná UPS) polynomiální délky s použitím logaritmické paměti. Jeho metoda je postavena na technice zcela odlišné od předchozích: místo zmenšování vstupního grafu ho jeho algoritmus zvětšuje.



Obr. 1. Petersenův graf představuje dobrý (i když malý) expandér.

Expandéry

Ze spousty ekvivalentních definic expandujících grafů je nejnázornější ta geometrická:

(n, d, c)-*expandér*, $c > 0$, je d-regulární graf o n vrcholech, pro který oddělení libovolných $k < n/2$ vrcholů od zbytku grafu vyžaduje odstranění alespoň ck hran.

Tato definice sice zachycuje pojem vysokého propojení, ale zaručuje řídkost grafu pouze v případě, že stupeň vrcholů d je malý vzhledem k počtu uzlů. V aplikacích je obvykle potřeba mít ne jeden, ale nekonečný systém expandérů pevného stupně d. Jak počet vrcholů roste, graf stále více řídne.

Nejjednodušší důkaz existence takových rodin grafů používá pravděpodobnostní konstrukci původně vyvinutou Pinskerem. Ten ukázal, že téměř každý náhodný graf je expandér, i když neuměl tyto grafy konkrétně sestrojit.

S tímto problémem se obrátil na ruského matematika Gregoriho A. Margulise, který v roce 1973 uvedl první explicitní konstrukci rodiny expandérů. Margulisova konstrukce je spolu s většinou pozdějších konstrukcí založena na algebraické vlastnosti expandérů, na vztahu mezi expanzními vlastnostmi grafu a poměrem mezi největším a druhým největším vlastním číslem matice sousednosti. Graf s vrcholy stupně d je dobrý expandér, pokud velikost druhého největšího vlastního čísla jeho matice sousednosti je ostře menší než d. (Proto rodina grafů je rodinou expandérů, pokud druhá největší vlastní čísla všech grafů jsou stejnoměrně omezena hodnotou $\lambda < d$.)

Expandéry mají také tu dobrou pravděpodobnostní vlastnost, že na nich náhodné procházky rychle konvergují k rovnoměrnému rozdělení a rychlost konvergence je určena druhým vlastním číslem. Informatici vytvořili algoritmy pro aproximaci kombinatorických vlastností fyzikálních systémů, které jsou založeny na této vlastnosti expandérů.

Margulisova a následné konstrukce byly hodně technické a pro dokázání expanzních vlastností využívaly silné věty algebry a teorie čísel. S tím nebyl Wigderson spokojený: „Pro mě vždy bylo cílem mít expandér, u kterého bych věděl, proč vlastně expanduje“, říká.

Jiná šťastná náhoda

V roce 1999 Wigderson a Reingold spolupracovali se Salilem Vadhanem a navrhli celkem jednoduchou kombinatorickou metodu pro postupnou konstrukci rodiny expandérů. Základem jejich metody je operace, kterou nazvali „cik-cak“ složení: Vezmeme dva grafy, velký expandér G a mnohem menší expandér H a vytvoříme nový graf velikosti přibližně rovné většímu grafu se stupněm určeným pouze menším grafem a s expanzními vlastnostmi jen o málo horšími než u obou grafů. „Expanzní vlastnosti složeného grafu vycházejí z vlastností jeho složek pomocí intuitivního argumentu o „informačním toku“ a formální popis pomocí lineární algebry zabere půl stránky,“ vysvětlil Wigderson.

Protože definice expandéru neomezuje počet hran, můžeme přidáním nových hran expanzní vlastnosti snadno vylepšit. Touto metodou však nezkonstruujeme rodinu expandérů, protože stupeň nezůstane konstantní. Klíčovou vlastností cik-cak skládání G a H je to, že zůstane zachována většina expanzních vlastností G a přitom je zredukován jeho stupeň. Pokud tedy střídavě cik-cak skládáme a přidáváme hrany, sestrojíme explicitní rodinu expandérů.

Výzkumníci v článku z roku 1999 dále ukazují, že podobné, jednodušší skládání grafů zvané „nahrazující složení“ může být použito ke generování rodiny expandérů s mírně horšími expanzními vlastnostmi. Při nahrazujícím skládání G a H je každý vrchol většího grafu G nahrazen kopií menšího grafu H. Počet vrcholů H je volen tak, aby odpovídal stupni G, takže každý vrchol v každé kopii H odpovídá právě jedné hraně v G. Výsledný graf se potom lokálně chová jako H a globálně jako G, takže přebírá expanzní vlastnosti od obou.

V roce 2004 dostal Reingold klíčový nápad — že by totiž bylo možné zmenšit paměť potřebnou k řešení neorientované souvislosti přidáním více cest ke vstupnímu grafu, aby bylo snadnější ho prohledat. A opravdu, kdyby nějak dokázal převést graf na expandér, byl by hotový: Expandér velikosti n má tu vlastnost, že jeho průměr (největší vzdálenost mezi libovolnými dvěma vrcholy) je $\mathcal{O}(\log n)$ a procedura, která by vygenerovala všechny možné cesty velikosti $\mathcal{O}(\log n)$ z počátečního bodu grafu a pak je jednu po druhé vyzkoušela, by zaručeně našla všechny vrcholy ležící v dané souvislé komponentě.

Ale až do léta 2004, kdy navštívil svého kolegu z UC Berkeley, Reingold netušil, jak toto řešení realizovat. Podstata jeho algoritmu je tato: Pro daný vstupní graf G a vrcholy S a T algoritmus střídavě přidává hrany a provádí cik-cak složení nebo nahrazující složení, čímž převede souvislou komponentu S na expandér G' s konstantním stupněm. Obtížnou částí je dokázat, že libovolný graf je možno převést na expandér pomocí grafových složení a že tuto transformaci je možné provést s logaritmickým množstvím paměti. (Transformace nevyžaduje uložení kompletního popisu G', protože každý bit popisu lze vypočítat v logaritmickém prostoru.)

Reingoldova konstrukce je zdánlivě jednoduchá, říká Wigderson; potřebovali jsme pět roků a správný vhled do problému, abychom si uvědomili souvislost mezi expandéry a cik-cak složením. „Řeknu vám, proč jsem na ten algoritmus nepřišel — všechny předchozí algoritmy graf smršťovaly; ale Reingoldův na to jde přesně opačně.“

Dodatek: Klasickým příkladem vynikající, avšak bohužel špatně načasované práce je případ studenta texaské univerzity Vladimira Trifonova, který v r. 2005 oznámil algoritmus řešící neorientovanou souvislost v paměti $\mathcal{O}((\log n)(\log\log n))$ pomocí jiné než Reingoldovy metody. Pokud je jeho algoritmus správný, byl by rychlejší než všechny ostatní známé, s výjimkou Reingoldova algoritmu.

Poznámka překladatele: Oba výsledky, Reingoldův i Trifonovův, byly oficiálně zveřejněny v r. 2005 na stejné konferenci, a sice na 37. výroční konferenci ACM „Symposium o teorii výpočtů“ STOC 2005 v Baltimore, MD, USA.