Terrence Tao

Co je dobrá matematika?

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 53 (2008), No. 1, 22–35

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141837

Co je dobrá matematika?

Terence Tao, Los Angeles

Abstrakt: Článek přináší některé mé osobní myšlenky a názory na to, co je „dobrá matematika“, a zda bychom se měli snažit definovat tento pojem přesněji. Jako příklad je uveden příběh Szemerédiovy věty.

1. Mnoho pohledů na matematickou kvalitu

Všichni souhlasíme, že matematici by se měli snažit vytvářet dobrou matematiku. Ale jak definovat „dobrou matematiku“ a měli bychom se do toho vůbec pustit? Podívejme se nejprve na první otázku. Téměř okamžitě si uvědomíme, že existují různé druhy matematiky, které by mohly být označeny jako „dobré“. Například, „dobrou matematiku“ bychom mohli charakterizovat jako (bez ohledu na pořadí):

(i) Dobré matematické *řešení problémů* (např. významný průlom v řešení důležitého matematického problému).
(ii) Dobrá matematická *technika* (např. mistrovské použití již existujících metod nebo rozvoj nových prostředků).
(iii) Dobrá matematická *teorie* (např. systém pojmů nebo volba označení, které systematicky sjednocuje a zobecňuje již existující výsledky).
(iv) Dobrý matematický *vhled* (např. významné zjednodušení pojmů nebo nalezení sjednocujícího principu, heuristiky, analogie nebo tématu).
(v) Dobrý matematický *výsledek* (např. objev neočekávaného a fascinujícího nového matematického jevu, souvislosti nebo protipříkladu).
(vi) Dobrá matematická *aplikace* (např. na důležité problémy fyziky, strojírenství, počítačové vědy, statistiky apod. nebo aplikace jedné oblasti matematiky na jinou).
(vii) Dobrý matematický *výklad* (např. podrobné a přehledné shrnutí aktuálního matematického tématu nebo jasný a dobře motivovaný argument).
(viii) Dobrá *didaktika* matematiky (např. přednáška nebo styl psaní, který umožňuje ostatním, aby se učili a tvořili v matematice efektivněji, nebo příspěvky ke vzdělávání v matematice).
(ix) Dobrá matematická *vize* (např. dlouhodobý a plodný program nebo soubor domněnek).

Terence Tao, Department of Mathematics, University of California, Los Angeles, California 90095-1555. E-mail: `tao@math.ucla.edu`

Z anglického originálu: What is good mathematics? *Bulletin (New Series) of the Americal Mathematical Society,* vol. **44**, No. 4, October 2007, 623–634, přeložila Naďa Stehlíková.

(x) Dobrý matematický *vkus* (např. výzkumný cíl, který je sám o sobě zajímavý a má dopad na důležitá témata, oblasti či otázky).
(xi) Dobré matematické „*vztahy s veřejností*“ (např. účinné předvedení matematického výsledku pro nematematiky nebo z jedné oblasti matematiky do jiné).
(xii) Dobrá *metamatematika* (např. pokroky v základech matematiky, její filozofii, historii, ve vědecké práci či způsobech práce v matematice).
(xiii) *Rigorózní* matematika (se všemi podrobnostmi správně a pečlivě popsanými).
(xiv) *Krásná* matematika (např. úžasné Ramanujanovy identity, výsledky, které lze jednoduše (a pěkně) vyslovit, ale obtížně dokázat).
(xv) *Elegantní* matematika (např. dosažení těžkého výsledku s minimálním úsilím).
(xvi) *Tvořivá* matematika (např. zcela nová a originální technika, hledisko nebo typ výsledku).
(xvii) *Užitečná* matematika (např. lemma nebo metoda, která se bude v budoucnu v matematice opakovaně používat).
(xviii) *Silná* matematika (např. výrazný výsledek, který odpovídá známým protipříkladům, nebo výsledek, který odvozuje neočekávaně silné tvrzení ze zdánlivě slabého předpokladu).
(xix) *Hluboká* matematika (např. výsledek, který je zjevně netriviální, např. zachycení sotva patrného jevu, který je mimo dosah jednodušších prostředků).
(xx) *Intuitivní* matematika (např. argument, který lze přirozeně a lehce vizualizovat).
(xxi) *Definitivní* matematika (např. klasifikace všech objektů určitého typu, konečné slovo o matematickém tématu).
(xxii) atd. atd.[1])

Jak ukazuje tento seznam, pojem matematické kvality má hodně dimenzí a chybí mu zřejmé uspořádání.[2]) Věřím, že tomu tak je proto, že matematika sama je komplexní, má mnoho rozměrů a vyvíjí se neočekávanými a adaptivními způsoby. Každá z výše zmíněných kvalit představuje jiný způsob, jímž my jako komunita zvyšujeme naše porozumění a použití oboru. Zdá se, že neexistuje všeobecný souhlas, co se týče relativní důležitosti či váhy každé z výše uvedených kvalit. To je částečně dáno taktickými důvody — oblast matematiky v určitém stádiu vývoje může být schůdnější pro jeden pohled spíše než pro jiný. Částečně jsou zde také kulturní důvody — jakákoli oblast nebo škola matematiky má tendenci přitahovat matematiky podobného smýšlení, kteří dávají přednost podobným pohledům na obor. Také to odráží rozmanitost matematických schopností. Různí matematici vynikají v různých oblastech matematiky a hodí se tak k různým typům matematické práce. (Viz také [12], kde je podobná diskuse.)

Věřím, že tato rozmanitá a mnohavrstevná povaha „dobré matematiky“ je pro matematiku jako celek zdravá, protože nám umožňuje věnovat se mnoha různým

---

[1]) Tento seznam nemá být vyčerpávající. Zejména se soustřeďuje na ten druh matematiky, který lze nalézt v matematických odborných článcích spíše než ve škole, učebnicích nebo článcích v disciplínách blízkých matematice typu přírodních věd.

[2]) Zejména stojí zato upozornit, že matematická přesnost, která je vysoce důležitá, je jen jednou částí toho, co určuje dobrou matematiku.

přístupům k oboru a využívat rozličných typů matematického talentu pro společný cíl většího pokroku v matematice a jejího porozumění. I když je každý z výše uvedených atributů v matematice obecně přijímán jako žádoucí, může oboru škodit, pokud se rozhodneme pěstovat jen jeden nebo dva z nich na úkor ostatních. Podívejme se například na následující hypotetický (a trochu nadnesený) scénář.

- Uvažovaná oblast matematiky je stále vybroušenější a vyumělkovanější. Její jednotlivé výsledky se zobecňují a vylepšují jen kvůli nim samým, ale oblast jako celek se ubírá bezcílně bez nějakého určitého směru nebo pocitu pokroku.
- Oblast je přeplněna mnoha ohromujícími domněnkami, ale bez naděje na rigorózní rozvoj alespoň jediné z nich.
- V oblasti se používají zejména *ad hoc* metody pro řešení souboru problémů, které nemají žádné jednotící téma, vztah nebo účel.
- Oblast je příliš konzervativní a teoretická a neustále předělává a sjednocuje předchozí výsledky do stále techničtějších formálních systémů, které však nepřinášejí žádný vzrušující pokrok.
- Oblast uctívá klasické výsledky a neustále vytváří jejich kratší, jednodušší a elegantnější důkazy, ale nepřináší žádné skutečně originální a nové výsledky nad rámec klasické literatury.

V každé z těchto tříd prokazuje matematika jako obor hodně aktivity a krátkodobého pokroku, ale z dlouhodobého hlediska riskuje pokles své důležitosti a nezdar při získávání mladších matematiků pro obor. Naštěstí je pro oblast matematiky obtížné tímto způsobem stagnovat, protože je neustále vyzývána a znovu oživována svými vztahy k jiným oblastem matematiky (nebo blízkým vědám) a tím, že je konfrontována s mnoha typy „dobré matematiky“, k nimž má respekt. Tyto samoopravné mechanismy pomáhají udržovat matematiku v rovnováze, jednotě, produktivitě a plnou života.

Podívejme se teď na další otázku vyslovenou výše, a sice, zda bychom se vůbec měli snažit najít definici „dobré matematiky“. Riskujeme při tom dojem namyšlenosti a přílišného sebevědomí. Konkrétně můžeme přehlédnout exotické příklady skutečného matematického pokroku, protože spadají mimo široce přijímanou definici[3]) „dobré matematiky“. Na druhé straně existuje také opačné nebezpečí, a sice v tom, že všechny přístupy k matematice jsou stejně přijatelné a mají nárok na stejné zdroje[4]) pro jakoukoli oblast matematiky nebo že všechny příspěvky k matematice jsou stejně důležité. Takové názory si sice zaslouží obdiv pro svůj idealismus, ale vysávají z matematiky její smysl pro směr a účel a mohou také vést k méně ideálnímu přidělování matematických

[3]) S tím spojená obtíž spočívá v tom, že kromě pozoruhodné výjimky matematické přesnosti většina ostatních výše uvedených kvalit je poněkud subjektivní a obsahuje neodmyslitelnou nepřesnost nebo nejistotu. Děkuji Gil Kalaiovi za zdůraznění tohoto aspektu.

[4]) Příkladem vzácných zdrojů jsou peníze, čas, pozornost, talent a stránky ve špičkových časopisech.

zdrojů.[5]) Skutečnost je někde uprostřed. Pro každou oblast matematiky ukáží její existující výsledky, folklór, intuice a zkušenosti (či jejich nedostatek), které typy přístupů v ní mohou být pravděpodobně úspěšné a zaslouží si tedy většinu zdrojů a které jsou spíše spekulativní a zasluhují si pozornost jen několika svobodomyslných matematiků jen proto, aby se využily všechny možnosti. Například ve vyzrálých a dobře rozvinutých oblastech má smysl sledovat systematické programy a vyvíjet obecné teorie vysoce přesným způsobem, konzervativně používat vyzkoušené metody a prokázané intuice, zatímco v novějších a méně etablovaných oblastech se může více zdůraznit tvorba a řešení hypotéz, experimentování s různými přístupy a spolehnout se do určité míry na nepřesné heuristické metody a analogie. Z taktického hlediska je tedy smysluplné dosáhnout alespoň částečné (ale vyvíjející se) shody v rámci každé oblasti, které kvality matematického pokroku si nejvíce ceníme, abychom mohli oblast rozvinout a podporovat ji co nejúčinněji v každém stádiu jejího vývoje. Například jedna oblast může více vyžadovat řešení naléhavých problémů, zatímco jiná oblast se může domáhat teoretického rámce pro organizaci změti existujících výsledků nebo velkolepého programu nebo série domněnek, které by podnítily nové výsledky. Jiné oblasti by měly velký užitek z nových a jednodušších důkazů klíčových vět, zatímco ještě další oblasti mohou vyžadovat dobrou publicitu a srozumitelný úvod do předmětu, aby přilákaly více aktivity a zájmu. Tedy určení toho, co tvoří dobrou matematiku v dané oblasti, může a mělo by záležet do velké míry na stavu oblasti samé. Mělo by jít o určení, které je neustále vylepšováno a diskutováno jak uvnitř oblasti, tak mezi externími pozorovateli. Jak jsem zmínil již dříve, je docela možné, že shoda ohledně toho, jak by se měla oblast vyvíjet, povede k nerovnováze v rámci dané oblasti, pokud není včas objevena a napravena.

Z výše řečeného se může zdát, že problematika ohodnocení matematické kvality je sice důležitá, ale je také beznadějně komplikovaná zejména proto, že mnoho dobrých matematických výsledků může získat vysoké skóre z některých již uvedených kvalit, ale ne z jiných. Navíc mnoho z těchto kvalit je subjektivních a dají se přesně změřit až zpětně. Nicméně je pozoruhodné,[6]) že dobrá matematika v jednom z výše uvedených smyslů často vede k dobrým pracím z matematiky v mnoha dalších ohledech, což nás opravňuje k opatrnému závěru, že nakonec snad existuje univerzální pohled na dobrou matematiku a všechny nahoře uvedené indikátory představují odlišné cesty k získání nových matematických výsledků nebo rozdílná stádia či aspekty rozvoje matematického příběhu.

[5]) Jiné řešení tohoto problému spočívá ve využití faktu, že matematické zdroje mají také více rozměrů. Například můžeme udělovat ceny za výklad, kreativitu apod. či mít různé časopisy věnované různým typům výsledků. Děkuji Gil Kalaiovi za tuto poznámku.

[6]) Tento jev je také trochu spojen se „zázračnou účinností matematiky“, kterou pozoroval Wigner [38].

2. Ilustrace — Szemerédiova věta

Teď přejdeme od obecného ke konkrétnímu a budeme ilustrovat jev popsaný v předchozím odstavci historií a kontextem *Szemerédiovy věty* [32] — krásného a oslavovaného výsledku, který tvrdí, že každá podmnožina přirozených čísel kladné horní hustoty[7]) nutně obsahuje libovolně dlouhé aritmetické posloupnosti. Vyhnu se všem technickým detailům. Čtenáře odkazuji na [33] a tam uvedené odkazy.

Existuje několik přirozených míst, odkud začít tento příběh. Já začnu *Ramseyovou větou* [23], která říká, že jakýkoli dostatečně velký úplný graf obarvený konečně mnoha barvami obsahuje velké monochromatické úplné podgrafy. (Např. mějme libovolných šest lidí. Buď se tři budou navzájem znát, nebo budou jeden pro druhého cizí, za předpokladu ovšem, že „s někým se znát" je dobře definovaný a symetrický vztah.) Tento výsledek má sice jednoduchý důkaz (neobsahující nic víc než několikeré použití Dirichletova přihrádkového principu), avšak představoval objev nového jevu a vytvořil nový druh matematického výsledku: *věty Ramseyova typu*, z nichž každá je jinou formalizací tohoto nově získaného vhledu v matematice, a sice že *úplný chaos je nemožný*.

Jedna z prvních vět Ramseyova typu (která vlastně předchází Ramseyovu větu o několik let) byla *van der Waerdenova věta* [37]: Mějme libovolné konečné obarvení přirozených čísel. Pak alespoň jedna z barevných tříd musí obsahovat libovolně dlouhé aritmetické posloupnosti. Vysoce rekurzivní důkaz van der Waerdena byl velmi elegantní, ale měl nevýhodu, že nabízel neuvěřitelně hrubé *kvantitativní* odhady pro výskyt první aritmetické posloupnosti dané délky. Odhad vskutku zahrnoval Ackermannovu funkci této délky a počtu barev. Erdős a Turán [4] měli dobrou matematickou intuici a této kvantitativní otázce se dále věnovali,[8]) protože byli navíc motivováni touhou pokročit v řešení otázky (tehdy na úrovni domněnky), zda prvočísla obsahují libovolně dlouhé posloupnosti. Potom předložili několik silných domněnek, z nichž jedna se stala Szemerédiho větou. Další bylo krásné, ale (stále otevřené) silnější tvrzení, že jakákoli podmnožina přirozených čísel, jejichž převrácená čísla tvoří řadu, která není absolutně konvergentní, obsahuje libovolně dlouhé aritmetické posloupnosti.

První pokrok týkající se těchto domněnek přinesla série protipříkladů, která vrcholila v Behrendově elegantní konstrukci [1] „středně řídké" množiny[9]) (jejíž hustota v $\{1,\ldots,N\}$ je asymptoticky větší než $N^{-\varepsilon}$ pro libovolné dané $\varepsilon > 0$) bez aritmetických posloupností délky 3. Tato konstrukce vyloučila nejambicióznější z Erdősových--Turánových domněnek (která předpokládala, že polynomiálně řídké množiny[10]) obsa-

[7]) Horní hustota podmnožiny $M \subset \mathbb{N}$ se definuje jako $\limsup_{n\to\infty} \frac{|M(n)|}{n}$, kde $|M(n)|$ označuje počet prvků množiny $M(n) = \{m \in M \mid m \leqq n\}$. (Pozn. red.)

[8]) Erdős se také věnoval otázce kvantitativních odhadů pro původní Ramseyovu větu, což vedlo kromě jiného k nalezení nesmírně důležité *pravděpodobnostní metody* v kombinatorice, ale to je historie sama o sobě, jíž se zde nemůžeme věnovat.

[9]) angl. moderately sparse set

[10]) angl. polynomially sparse set

hují mnoho aritmetických posloupností), a tím také vyloučila podstatnou třídu elementárních přístupů k těmto problémům (např. ty, které jsou založeny na nerovnostech, jako např. Cauchyova-Schwarzova nebo Hölderova nerovnost). I když tyto příklady nevyřešily problém úplně, ukázaly, že pokud platí Erdősovy-Turánovy domněnky, budou nutně mít netriviální (a tak zřejmě zajímavý) důkaz.

Další velký pokrok byl dílem Rotha [27], který použil *Hardyho-Littlewoodovu kružnicovou metodu*[11]) spolu s novou metodou opírající se *o přírůstek hustoty* krásně elegantním způsobem a vytvořil tak *Rothovu větu*: Každá množina přirozených čísel kladné hustoty obsahuje nekonečně mnoho aritmetických posloupností délky 3. Bylo pak přirozené zkusit rozšířit Rothovy metody na delší posloupnosti. Roth a řada dalších se o to po mnoho let pokoušela, ale bez úspěchu. Důvod neúspěchu nebyl zcela pochopen, dokud se mnohem později neobjevila Gowersova práce. Vyžadovalo to ohromný talent Endre Szemerédiho [31], [32], který se vrátil ke zcela kombinatorickým metodám (konkrétně posunul metodu opírající se o přírůstek hustoty na pozoruhodné nové úrovně technické složitosti), aby se Rothova věta rozšířila nejdříve na posloupnosti délky čtyři[12]) a pak na posloupnosti libovolné délky, čímž vznikla jeho slavná věta. Szemerédiův důkaz byl virtuózním a technicky velmi obtížným kouskem a přinesl mnoho nových myšlenek a technik, z nichž nejdůležitější byl nový způsob, jak nahlížet na extrémně velké grafy, a sice aproximovat je modely ohraničené složitosti. Tento výsledek, slavné a velmi užitečné *Szemerédiovo lemma o regularitě*, si zaslouží pozornost v mnoha ohledech. Jak bylo řečeno výše, přineslo zcela nový vhled, co se týče struktury velkých grafů (který je teď v moderním jazyce považován za *větu o struktuře* stejně tak jako za *větu o kompaktnosti* pro takové grafy), podalo novou důkazovou techniku (*metodu přírůstku energie*[13])), která se později v tomto příběhu ukáže jako klíčová, a také vedlo k neuvěřitelně velkému počtu neočekávaných aplikací, od teorie grafů přes testování vlastností až k aditivní kombinatorice. Úplný příběh tohoto lemmatu je bohužel příliš dlouhý, aby zde mohl být vyprávěn.

Zatímco Szemerédiův úspěch je nepochybně zlatý hřeb tohoto konkrétního příběhu, nešlo v něm v žádném případě o poslední slovo na dané téma. Szemerédiův důkaz jeho věty, i když byl elementární, byl pozoruhodně spletitý a ne lehce pochopitelný. Také ne zcela vyřešil původní otázky, které motivovaly Erdőse a Turána, protože důkaz sám využíval van der Waerdenovy věty ve dvou klíčových kritických bodech, a tak nepřinesl žádné vylepšené kvantitativní odhady. Furstenberg pak prokázal matematický cit, když hledal zcela odlišný (a vysoce neelementární[14])) důkaz, založený na analogii mezi

[11]) Historie kružnicové metody je další velký příběh, který zde nemůžeme podrobněji popsat. Postačí však říci, že tato metoda je (v moderním jazyce) součástí současných standardních postupů a že Fourierova analýza je důležitým nástrojem také pro řešení problémů v aditivní kombinatorice.

[12]) Krátce poté byl Roth [28] schopen zkombinovat některé ze Szemerédiových myšlenek se svou vlastní Fourierovou analytickou metodou a vytvořil smíšený důkaz Szemerédiovy věty pro posloupnosti délky 4.

[13]) angl. energy increment method

[14]) Některé verze Furstenbergova argumentu se například silně opírají o axiom výběru, i když ho můžeme také formulovat bez axiomu výběru.

kombinatorickou teorií čísel a ergodickou teorií, který brzy formalizoval jako velmi užitečný *Furstenbergův princip korespondence.* Z tohoto principu[15]) okamžitě vyvodíme, že Szemerédiova věta je ekvivalentní *větě o vícenásobných rekurencích* pro systémy zachovávající míru. Pak se přirozeně tato věta (teď známá jako *Furstenbergova věta o rekurenci*) začala dokazovat přímo metodami ergodické teorie, konkrétně použitím různých klasifikací a strukturálních rozkladů (např. ergodický rozklad), které jsou pro takové systémy k dispozici. Furstenberg vskutku brzy vytvořil *Furstenbergovu větu o struktuře*, která popisuje libovolný systém zachovávající míru jako slabě smíšené rozšíření systému kompaktních rozšíření, a s pomocí této věty a několika dalších argumentů (včetně varianty van der Waerdenova argumentu) byl schopen vytvořit větu o vícenásobných rekurencích, a tak podat nový důkaz Szemerédiovy věty. Stojí také za zmínku, že Furstenberg napsal výbornou knihu o tomto a podobných tématech [6], která systematicky formalizuje základní teorii a současně výrazně přispívá k růstu a dalšímu vývoji v této oblasti.

Furstenberg a jeho spoluautoři si pak uvědomili, že tato nová metoda je potenciálně velmi účinná a mohla by se využít pro tvorbu mnoha dalších typů vět o rekurenci, které pak (přes princip korespondence) povedou k mnoha vysoce netriviálním kombinatorickým větám. Furstenberg, Katznelson a další sledovali tuto myšlenku a získali mnoho variant a zobecnění Szemerédiovy věty, např. různé varianty ve vyšších dimenzích, a dokonce vytvořili hustotní verzi Halesovy-Jewettovy věty [18] (což je velmi účinné a abstraktní zobecnění van der Waerdenovy věty). Dokonce ani dnes není znám „elementární“ důkaz mnoha výsledků získaných těmito konečnými technikami ergodické teorie, což ukazuje na moc této metody. Navíc jako cenný vedlejší produkt těchto snah bylo získáno mnohem hlubší porozumění strukturální klasifikaci systémů zachovávajících míru. Konkrétně bylo zjištěno, že v mnoha typech problému rekurence jsou vlastnosti asymptotické rekurence libovolného systému téměř úplně řízeny zvláštním *faktorem* tohoto systému, který je znám jako (minimální) *charakteristický faktor* systému.[16]) Určení přesné povahy tohoto charakteristického faktoru pro různé typy rekurence se pak stalo hlavním předmětem studia, protože se zjistilo, že to povede k přesnější informaci o limitujícím chování (konkrétně to ukáže, že určité asymptotické výrazy spojené s vícenásobnými rekurencemi vlastně konvergují k limitě, což byla otevřená otázka z Furstenbergových původních argumentů). Furstenbergovy a Weissovy protipříklady stejně jako výsledky Conzeho a Lesigneho nakonec vedly k závěru, že tyto charakteristické faktory by se měly dát popsat velmi speciálním (algebraickým) typem systémů zachovávajících míru, konkrétně *nilpotentními systémy* spojenými s nilpotentními grupami. Tyto závěry kulminovaly přesnými a pečlivými popisy těchto faktorů v technicky působivém článku Hosta a Kraové [20] (a následně také Zieglerové [39]), který mimo jiné vyřešil otázku zmíněnou výše a týkající se konvergence asymptotických průměrů vícenásobné rekurence. Ústřední role těchto

[15]) Existuje také podobný princip korespondence, který spojuje van der Waerdenovu větu s větou vícenásobných rekurencí pro *topologické* dynamické systémy. To vede k fascinujícímu příběhu *topologické dynamiky*, který zde kvůli nedostatku místa nemůžeme popsat.

[16]) Raným příkladem je von Neumannova ergodická věta o střední hodnotě.

charakteristických faktorů ukazovala poměrně přesně na dichotomii mezi strukturou (reprezentovanou zde nilpotentními systémy) a náhodností (která je zachycena určitým technickým typem „smíšené vlastnosti“) a vedla k poznatku, že právě tato dichotomie ve skutečnosti tvoří základ Szemerédiovy věty a příbuzných vět a dává jim sílu. Dalším rysem Hostovy-Kraové analýzy, jež zaslouží zmínku, je nápadný výskyt průměrů spojovaných s „krychlemi“ a „rovnoběžnostěny“, které se z mnoha důvodů ukazují jako přístupnější analýze než průměry vícenásobných rekurencí spojované s aritmetickými posloupnostmi.

Paralelně s tímto vývojem v oblasti ergodické teorie se jiní matematici snažili porozumět, znovu dokázat a vylepšit Szemerédiovu větu jinými způsoby. Důležitý průlom provedli Ruzsa a Szemerédi [29], když použili Szemerédiovo lemma o regularitě, zmíněné výše, a vytvořili řadu výsledků v teorii grafů včetně toho, který je dnes znám jako *lemma o odstranění trojúhelníka z grafu*. Toto lemma zhruba říká, že graf, který obsahuje malý počet trojúhelníků, se jich může zbavit odejmutím překvapivě malého počtu hran. Pak si všimli, že Behrendův příklad zmíněný výše dává jistá omezení týkající se kvantitativních odhadů v tomto lemmatu, konkrétně že vylučuje mnoho tříd elementárních přístupů k tomuto lemmatu (protože takové přístupy typicky dávají odhady polynomiálního typu). Všechny dosud známé důkazy lemmatu o odstranění trojúhelníka skutečně využívají nějaké varianty lemmatu o regularitě. Pokud použijeme toto spojení opačným způsobem, můžeme si všimnout, že z lemmatu o odstranění trojúhelníka vlastně vyplývá Rothova věta o posloupnostech délky 3. Tento objev poprvé otevřel možnost, že věty Szemerédiova typu by mohly být dokázány čistě technikami *teorie grafů*, čímž se téměř úplně vynechá aditivní struktura problému. (Poznamenejme, že přístup ergodické teorie tuto strukturu zachoval pod maskou působení operátoru posunutí na systém. Také Szemerédiův původní důkaz je jen částečně založen na teorii grafů, protože na mnoha různých místech využívá aditivní strukturu posloupností.) Nicméně trvalo nějaký čas, než se zjistilo, že metoda teorie grafů, podobně jako Fourierova analytická metoda před ní, je do značné míry omezena na zjišťování vzorů „nízké složitosti“ jako trojúhelníky nebo posloupnosti délky 3 a že zjištění posloupností větší délky by vyžadovalo značně obtížnější teorii *hypergrafů*. Toto zjištění motivovalo program (jehož průkopníky byli Frank a Rödl) na nalezení uspokojivé analogie lemmatu o regularitě pro hypergrafy, které by bylo dostatečně silné, aby mělo podobné důsledky jako Szemerédiova věta (stejně jako množství variant a zobecnění). To se pak ukázalo jako překvapivě ožehavý úkol, zejména v nutnosti pečlivě vytvořit hierarchii[17]) parametrů, které se v takové regularizaci objevují, aby dominovaly jeden druhému ve správném pořadí. Konečné verze lemmatu o regularitě a s ním spojená „lemmata o počítání“[18]), z nichž bychom mohli vyvodit Szemerédiovu větu, se skutečně objevily poměrně nedávno ([22], [24], [25], [26], [14], …). Za zmínku také stojí velmi názorný Gowersův protipříklad [10], který ukazuje, že kvantitativní

[17]) Zdá se, že tato hierarchie je spojena s množstvím rozšíření, na které narazil Furstenberg, když se podobně snažil „regularizovat“ systém zachovávající míru, i když přesné spojení je v současnosti stále ještě málo chápáno.

[18]) angl. counting lemmas

odhady v původním lemmatu o regularitě musí být alespoň typu iterované exponenciály, takže se znovu ukazuje netriviální povaha (a možnosti) tohoto lemmatu.

Fourierův analytický přístup k Szemerédiově větě, který příliš nepokročil od doby Rotha, nakonec vyřešil Gowers [11], [13]. Podobně jako u ostatních přístupů začíná tento přístup vytvořením dichotomie na množinách přirozených čísel, tedy že jsou v určitém smyslu buď *strukturované*, nebo *pseudonáhodné*. Příslušný pojem struktury zde vytvořil Roth — strukturované množiny mají obsahovat přírůstek hustoty na středně dlouhých aritmetických posloupnostech — ale správná charakteristika pseudonáhodnosti nebo „rovnoměrnosti“ byla méně jasná. Gowers vytvořil příklad (ve skutečnosti úzce spojený s příklady Furstenberga a Gowerse zmíněnými dříve), který ukázal, že charakteristiky pseudonáhodnosti založené na Fourierovi jsou pro řízení posloupností délky čtyři a více nedostatečné, a pak zavedl jiný pojem rovnoměrnosti (velmi úzce spojený s krychlovými průměry Hosta a Kraové a také s určitými pojmy regularity hypergrafu), který postačoval. Zbývalo stanovit kvantitativní a přesnou podobu dichotomie. Ukázalo se, že to je překvapivě obtížné (zejména díky omezené využitelnosti Fourierovy transformace v tomto kontextu) a v mnoha ohledech podobné snahám Hosta a Kraové a také Zieglerové dodat charakteristickým faktorům algebraickou strukturu nilpotentních systémů. Nicméně spojením Fourierových analytických nástrojů a zásadních výsledků aditivní kombinatoriky jako Freimanovy věty a Balogovy-Szemerédiovy věty (jejichž historie je také zajímavá, viz např. [35]), spolu s několika novými kombinatorickými a pravděpodobnostními metodami toho Gowers dosáhl nevšední cestou a zejména získal pozoruhodně silné kvantitativní odhady Szemerédiovy věty a van der Waerdenovy věty.[19])

Shrneme-li dosud řečené, vidíme, že vznikly čtyři paralelní důkazy Szemerédiovy věty: jeden kombinatorický, jeden v ergodické teorii, jeden v teorii hypergrafů a jeden pomocí Fourierovy analýzy a aditivní kombinatoriky. I s tolika důkazy zůstával pocit, že naše porozumění tomuto výsledku není úplné; například žádný z přístupů nebyl dostatečně silný, aby zjistil aritmetické posloupnosti v množině prvočísel, zejména díky řídkosti posloupnosti prvočísel. (Nicméně lze využít Fourierovy metody, či přesněji kružnicové metody Hardyho-Littlewooda-Vinogradova, pro nalezení nekonečně mnoha posloupností délky tři v množině prvočísel [36] a mnohem obtížněji pak částečně řešit i posloupnosti délky čtyři [19].) Avšak Green využil myšlenek teorie restrikcí[20]) v harmonické analýze (což je další fascinující příběh, který zde nebudeme rozvádět) [15] a choval se k prvočíslům, „jako by“ šlo o hustou množinu, a došel k analogii Rothovy věty pro husté podmnožiny prvočísel. To otevřelo velmi zajímavou možnost *relativní Szemerédiovy věty*, která umožňuje zjistit aritmetické posloupnosti v hustých podmnožinách i u jiných množin než množin přirozených čísel, například v hustých podmnožinách množiny prvočísel. Vskutku, odpovídající relativní Rothova věta pro

[19]) Výjimečně tvořivý důkaz van der Waerdenovy věty od Shelaha [30] stojí také za zmínku. Tento důkaz držel předchozí rekord pro nejlepší konstanty této věty. Myšlenky Shelahova důkazu ještě nebyly úspěšně včleněny mezi ostatní poznatky, ale očekávám, že se tak v budoucnu stane.

[20]) angl. restriction theory

husté podmnožiny poměrně řídkých náhodných množin se již objevila v literatuře v teorii grafů [21].

Společně s Benem Greenem[21]) jsme začali řešit úkol relativizovat Fourierovy analytické a kombinatorické přístupy vyvinuté Gowersem do takových kontextů jako husté podmnožiny řídkých náhodných nebo „pseudonáhodných" množin. Po velkém úsilí (které bylo částečně inspirováno teorií hypergrafů, která je dobře vybavena pro počítání vzorů v řídkých množinách, a také částečně Greenovým „aritmetickým lemmatem o regularitě" [16], které přenáší myšlenky lemmatu o regularitě z teorie grafů do aditivních kontextů) jsme nakonec byli schopni (v nepublikované práci) zjistit v takových množinách posloupnosti délky čtyři. V tomto okamžiku jsme si uvědomili analogie mezi přístupem založeným na lemmatu o regularitě, které jsme používali, a konstrukcemi charakterického faktoru Hosta a Kraové. Dosadili jsme[22]) do těchto konstrukcí (konkrétně jsme se hodně spoléhali na krychlové průměry), a tím jsme dokázali vytvořit uspokojivou relativní Szemerédiovu větu, která se spoléhá na určitý *princip přenosu*, jež tvrdí, zhruba řečeno, že husté podmnožiny řídkých pseudonáhodných množin se chovají, „jako by" byly husté v původním prostoru. Abychom mohli aplikovat tuto větu na prvočísla, potřebovali jsme uzavřít prvočísla do vhodné pseudonáhodné množiny (či přesněji míry), ale velkou náhodou nedávné výsledky Goldstona a Yıldırıma[23]) ve výzkumu mezer mezi prvočísly[24]) [8] vytvořily téměř přesně to, co jsme k tomu potřebovali. Tím nám umožnily konečně potvrdit starou domněnku, že prvočísla obsahují libovolně dlouhé aritmetické posloupnosti.[25])

Příběh zde přesto nekončí, ale místo toho se stále v několika směrech rozvíjí. Na jedné straně je zde teď řada dalších aplikací principu přenosu, například pro získání podobných schémat mezi Gaussovými prvočísly nebo polynomických posloupností mezi racionálními prvočísly. Další slibný směr výzkumu je vzájemné sbližování Fourierovy metody a metod z teorie hypergrafů a ergodické teorie, například pro vytvoření nekonečných verzí grafové a hypergrafové teorie (které mají také aplikace v dalších oblastech matematiky, jako např. u testování různých vlastností) či konečné verze er-

[21]) Mimochodem, původně mě na těchto problémech přitahovalo jejich spojení s dalším velkým matematickým příběhem *Kakeyaovy domněnky*, kterou zde pro nedostatek místa nemůžeme rozvádět. Nicméně je spojena poměrně překvapivým způsobem s příběhem teorie restrikcí zmíněným dříve.

[22]) To bylo z mnoha důvodů trochu ošidné, zejména díky tomu, že konstrukce ergodické teorie byly v podstatě nekonečné, zatímco u prvočísel jsme museli pracovat v konečném kontextu. Naštěstí jsem se již pokusil „zkonečnit" ergodický přístup k Szemerédiově větě [34]. I když byl můj pokus tenkrát neúplný, ukázalo se, že je dostatečně nosný, aby mohl pomoci při aplikaci na prvočísla.

[23]) V době psaní našeho článku jsme využívali konstrukce z práce Goldstona a Yıldırıma, která byla stažena kvůli nesouvisející chybě a která byla později upravena pomocí zajímavých nových myšlenek Pintze [9]. To podporuje myšlenku uvedenou dříve, že není úplně nutné, aby byla matematická práce zcela bez chyby v každém detailu, aby měla svůj význam pro další (přesnou) práci.

[24]) Příběh mezer mezi prvočísly je opět velmi zajímavý, ale nemůžeme ho zde vyprávět.

[25]) Čtenáře odkazujeme na přehledový článek Martina Klazara: *Prvočísla obsahují libovolně dlouhé aritmetické posloupnosti,* PMFA 49 (2004), 177–188. (Pozn. red.)

godické teorie. Třetí směr vede k zajištění, aby nilpotentní systémy, které řídí rekurenci v kontextu ergodické teorie, řídily také různé konečné průměry spojené s aritmetickými posloupnostmi; konkrétně já s Greenem aktivně pracujeme na počítání korelací mezi prvočísly a posloupnostmi vytvořenými nilpotentními systémy (používáme staré metody ještě z dob Vinogradova), abychom vytvořili přesnější asymptotické odhady různých vzorů, které se nacházejí v množině prvočísel. Nakonec zůstává neméně důležitá původní Erdősova-Turánova domněnka, která i po tomto velkém pokroku stále zůstává otevřená, i když se teď objevují určité velmi slibné pokroky u Bourgaina [2], [3], které by měly vést k dalšímu vývoji.

3. Závěr

Jak vidíme z výše uvedené ilustrace, ty nejlepší příklady dobré matematiky nesplňují jen jedno nebo více kritérií matematické kvality uvedené na začátku článku, ale co je důležitější, jsou součástí většího matematického *příběhu*, který se rozvíjí a vytváří mnoho dalších výsledků dobré matematiky mnoha různých typů. Můžeme skutečně říci, že historie všech oblastí matematiky je vytvářena hrstkou těchto velkých příběhů, jejich vývojem během času a jejich vzájemnou interakcí. Učiním tedy závěr, že dobrá matematika se nedá měřit jedním nebo více „lokálními“ kvalitami danými výše (i když jsou určitě důležité a stojí za to o ně usilovat a mluvit o nich), ale záleží také na „globálnější“ otázce, jak je zasazena mezi další části dobré matematiky, jak je založena na dřívějších výsledcích nebo jak podporuje budoucí pokrok. Samozřejmě bez možnosti zpětného pohledu je obtížné předvídat s určitostí, jaké druhy matematiky budou mít takovou vlastnost. Nicméně se zdá, že existuje určitý nedefinovatelný pocit, že určitá část matematiky „je na cestě k něčemu“, že jde o kousek větší skládačky, která čeká na další zkoumání. A zdá se mi, že sledování takových nepostižitelných příslibů budoucích možností je přinejmenším stejně důležitou stránkou matematického pokroku jako konkrétnější a očividnější stránky matematické kvality uvedené dříve. Věřím tedy, že dobrá matematika je více než prostě proces řešení problémů, tvorby teorií a vylepšování důkazů, aby byly kratší, silnější, jasnější, elegantnější nebo přesnější, i když jsou to všechno samozřejmě obdivuhodné cíle. Zatímco dosahujeme všech těchto cílů (a diskutujeme o tom, které z nich by měly mít v rámci dané oblasti větší prioritu), měli bychom si uvědomit možný větší kontext, do nichž by mohl být získaný výsledek zasazen. Z dlouhodobého hlediska to může vést k dalšímu rozvoji daného výsledku, dané oblasti a matematiky jako celku.

Poděkování: Děkuji Lauře Kimové za to, že přečetla a okomentovala původní verzi tohoto článku, a Gil Kalaiovi za mnoho promyšlených komentářů a návrhů.

O autorovi: Terence Tao se narodil roku 1975 v Adelaide v Austrálii. V roce 1996 dokončil své PhD. studium na princetonské univerzitě a v roce 1999 se stal řádným profesorem na University of California at Los Angeles. Oblasti výzkumu Terence Taoa zahrnují harmonickou analýzu, parciální diferenciální rovnice, kombinatoriku a teorii čísel. Získal mnoho cen včetně Salemovy ceny v roce 2000, Bochnerovy ceny v roce 2002, Fieldsovy medaile v roce 2006, SASTRA Ramanujanovy ceny také v roce 2006 a MacArthur Fellowship v roce 2007.

Dr. Tao přebírá Fieldsovu medaili.

L i t e r a t u r a

[1] Behrend, F. A.: *On sets of integers which contain no three terms in arithmetics progression.* Proc. Nat. Acad. Sci. *32* (1946), 331-332.

[2] Bourgain, J.: *On triples in arithmetics progression.* Geom. Func. Anal. *9* (1999), 968–984.

[3] Bourgain, J.: *Roth's theorem on arithmetic progressions revisited.* Preprint.

[4] Erdős, P., Turán, P.: *On some sequences of integers.* J. London Math. Soc. *11* (1936), 261–264.

[5] Furstenberg, H.: *Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions.* J. Analyse Math. *31* (1977), 207–256.

[6] Furstenberg, H.: *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1981.

[7] Furstenberg, H., Katznelson, Y., Ornstein, D.: *The ergodic theoretical proof of Szemerédi's theorem.* Bull. Amer. Math. Soc. *7* (1982), 527–552.

[8] Goldston, D. A., Yildirim, C. Y.: *Small gaps between primes I.* Preprint.

[9] Goldston, D. A., Pintz, J., Y. Yildirim, C.: *Primes in Tuples I.* Ann. Math., AIM Preprint 2005-19.

[10] Gowers, T.: *Lower bounds of tower type of Szemerédi's uniformity lemma.* Geom. Func. Anal. *7* (1997), 322–337.

[11] Gowers, T.: *A new proof of Szemerédi's theorem for arithmetic progressions of length four.* Geom. Func. Anal. *8* (1998), 529–551.

[12] Gowers, T.: *The two cultures of mathematics.* In: Mathematics: Frontiers and Perspectives, International Mathematical Union, V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, B. Mazur, Editors, American Mathematical Society, 2000.

[13] Gowers, T.: *A new proof of Szemerédi's theorem.* Geom. Func. Anal. *11* (2001), 465–588.

[14] Gowers, T.: *Quasirandomness, counting and regularity for 3-uniform hypergraphs.* Combin. Probab. Comput. *15* (2006), nos. 1–2, 143–184.

[15] Green, B. J.: *Roth's theorem in the primes.* Ann. of Math. *161* (2005), 1609–1636.

[16] Green, B. J.: *A Szemerédi-type regularity lemma in abelian groups.* Geom. Func. Anal. *15* (2005), no. 2, 340–376.

[17] Green, B. J., Tao, T.: *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions.* Ann. of Math. *167* (2008), no. 2, 481–547.

[18] Hales, A. W., Jewett, R. I.: *Regularity and positional games.* Trans. Amer. Math. Soc. *106* (1963), 222–229.

[19] Heath-Brown, D. R.: *Three primes and an almost prime in arithmetic progressions.* J. London Math. Soc. (2) *23* (1981), 396–414.

[20] Host, B., Kra, B.: *Non-conventional ergodic averages and nilmanifolds.* Ann. of Math. *161* (2005), 397–488.

[21] Kohayakawa, Y., Łuczak, T., Rödl, V.: *Arithmetic progresions of length three in subsets of a random set.* Acta Arith. *75* (1996), no. 2, 133–163.

[22] Nagle, B., Rödl, V., Schacht, M.: *The counting lemma for regular k-uniform hypergraphs.* Random Structures Algorithms *28* (2006), no. 2, 113–179.

[23] Ramsey, F. P.: *On a problem of formal logic.* Proc. London Math. Soc. *30* (1930), 264–285.

[24] Rödl, V., Schacht, M.: *Regular partitions of hypergraphs.* Preprint.

[25] Rödl, V., Skokan, J.: *Regularity lemma for k-uniform hypergraphs.* Random Structures Algorithms *25* (2004), no. 1, 1–42.

[26] Rödl, V., Skokan, J.: *Applications of the regularity lemma for uniform hypergraphs.* Random Structures Algorithms *28* (2006), no. 2, 180–194.

[27] Roth, K. F.: *On certain sets of integers.* J. London Math. Soc. *28* (1953), 245–252.

[28] Roth, K. F.: *Irregularities of sequences relative to arithmetic progressions.* IV. Period. Math. Hungar. *2* (1972), 301–326.

[29] Rusza, I., Szemerédi, E.: *Triple systems with no six points carrying three triangles.* Colloq. Math. Soc. J. Bólyai *18* (1978), 939–945.

[30] Shelah, S.: *Primitive recursive bounds for van der Waerden numbers.* J. Amer. Math. Soc. *1* (1988), 683–697.

[31] Szemerédi, E.: *On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression.* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. *20* (1969), 89–104.

[32] Szemerédi, E.: *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression.* Acta Arith. *27* (1975), 299–345.

[33] Tao, T.: *The dichotomy between structure and randomness, arithmetic progressions, and the primes.* To appear, ICM 2006 proceedings.

[34] Tao, T.: *A quantitative ergodic theory proof of Szemerédi's theorem.* Electron. J. Combin. *13* (2006), no. 1, Research Paper 99, 49 str. (electronic).

[35] Tao, T., Vu, V.: *Additive Combinatorics.* Cambridge Univ. Press, 2006.

[36] van der Corput, J. G.: *Über Summen von Primzahlen und Primzahlquadraten.* Math. Ann. *116* (1939), 1–50.

[37] van der Waerden, B. L.: *Beweis einer Baudetschen Vermutung.* Nieuw. Arch. Wisk. *15* (1927), 212–216.

[38] Wigner, E.: *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences.* Comm. Pure Appl. Math. *13* (1960).

[39] Ziegler, T.: *Universal characteristic factors and Furstenberg averages.* J. Amer. Math. Soc. *20* (2007), 53–97.