

A. Ondrášková; S. Ševčík; L. Rosenberg; P. Kostecký
Schumannove rezonance – Elektromagnetické „zvonenie“ Zeme (1. časť:
História a teória)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 53 (2008), No. 2, 89--104

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/141712>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2008

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Schumannove rezonancie

Elektromagnetické „zvonenie“ Zeme

(1. časť: História a teória)

Adriena Ondrášková, Sebastián Ševčík, Ladislav Rosenberg, Pavel Kostecký, Bratislava

Motto:

*Tvoj hrom zarachotil v povíchrici,
svet osvietili blesky,
triasla a chvela sa Zem.*

(Žalm 77:19)

Zaujímavý geofyzikálny jav — vlastné elektromagnetické kmity budené atmosférickými výbojmi v dutinovom rezonátore, ktorý tvorí zemský povrch a ionosféra — bol teoreticky predpovedaný v roku 1952 a jeho merania začali roku 1960. Tento jav je predmetom štúdia viacerých vedeckých disciplín: teórie šírenia elektromagnetických vln v prostredí s komplikovanou štruktúrou a vlastnosťami (vplyv geomagnetického poľa), a nauky o atmosférickej elektrine. Výsledky jeho štúdia zasahujú aj do meteorológie a klimatológie, čo sa týka globálnej búrkovej aktivity a jej účinkov. Prvé údaje zo satelitov a kozmických sond nasvedčujú, že sa prejavuje aj na iných telesách v Slnčnej sústave, ktoré majú vlastnú atmosféru s globálnou cirkuláciou a elektrickými výbojmi.

*Tento článok venujeme 120. výročiu narodenia
Winfrieda Otto Schumanna (20. 5. 1888).*

1. Úvod a história objavu

Matematik, fyzik a astronóm Karl Friedrich Gauss vyslovil ako prvý v roku 1839 názor, že pravidelné variácie geomagnetického poľa musia mať príčinu v elektrických prúdoch tečúcich vysoko nad povrchom Zeme. Lord Kelvin (1860) na tomto

RNDr. ADRIENA ONDRÁŠKOVÁ, PhD., Doc. RNDr. SEBASTIÁN ŠEVČÍK, CSc., RNDr. Ing. PAVEL KOSTECKÝ, CSc., Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra astronómie, fyziky Zeme a meteorológie, Mlynská dolina F-1, 842 48 Bratislava, Slovensko. E-mail: ondraskova@fmph.uniba.sk, Pavel.Kostecky@fmph.uniba.sk

RNDr. LADISLAV ROSENBERG, PhD., Q. B. S. E., a. s., Prievozská 6, 821 09 Bratislava.

Za podporu tohto výskumu vďačíme Vedeckej grantovej agentúre MŠ SR a SAV (VEGA), granty č. 1/9167/02, 1/2033/05 a 1/0521/08.

základe postuloval existenciu elektricky vodivých vrstiev vysoko v atmosfére, predpokladal však ich chemické zloženie zásadne odlišné od vzduchu. V roku 1878 navrhol Balfour Stewart možnosť existencie elektricky vodivých vrstiev plynov vo vysokej atmosfére, aby vysvetlil dennú variáciu geomagnetického poľa, ktorá nemohla mať príčinu v zemskom vnútri. Intuitívne hľadal príčinu v žiarení Slnka — ako dnes vieme, správne. Po prvom úspechu rádiového transatlantického spojenia (Guglielmo Marconi 1902) túto predstavu rozvinuli nezávisle Arthur Kennely a Oliver Heaviside. Pokrok rádiotechniky spresňoval tieto predstavy, až Edward Appleton (1924) priniesol (na báze magneto-iónovej teórie) jednoznačné teoretické zdôvodnenie diaľkového šírenia elektromagnetických vln pozdĺž zemského povrchu odrazom od ionosféry a súčasne navrhol priamu experimentálnu verifikáciu jej existencie. V rokoch 1924–26 bola už existencia *ionosféry* (vtedy nazývaná „Kennely-Heavisidova vrstva“) preukázaná a nepochybná. Postupne bola podrobne skúmaná jej štruktúra a vlastnosti, napokon od 70-rokov minulého storočia prišli priame merania „in situ“ od sondážnych rakiet a umelých družíc.

Históriu rádiolokačného výskumu a využitia ionosféry — veľmi zaujímavú samu o sebe — možno nájsť napr. v [1], prehľad našich súčasných znalostí o nej viď napr. v [2] a [3] (bohatý obrazový materiál).

Názny a vágne predstavy o tom, že povrch Zeme (čiastočne elektricky vodivý) a spodné vrstvy ionosféry (taktiež vodivé), oddelené troposférickým (a stratosférickým) vzduchom, ktorého elektrická vodivosť je zanedbateľná, tvoria vlastne **dutinový elektromagnetický rezonátor** , siahajú až k slávnemu J. J. Thomsonovi (objavitelovi elektrónu) v roku 1893. Celý rad fyzikov a elektrotechnikov, medzi ktorými nemožno obísť Nikolu Teslu (od narodenia ktorého nedávno uplynulo 150 rokov — 10. 7. 1856), ktorý dokonca predpokladal využitie ionosféry pre bezdrôtový prenos energie (jeho patent z roku 1905), túto fyzikálnu predstavu s rôznym stupňom exaktnosti rozvíjali, ale iba teoreticky.

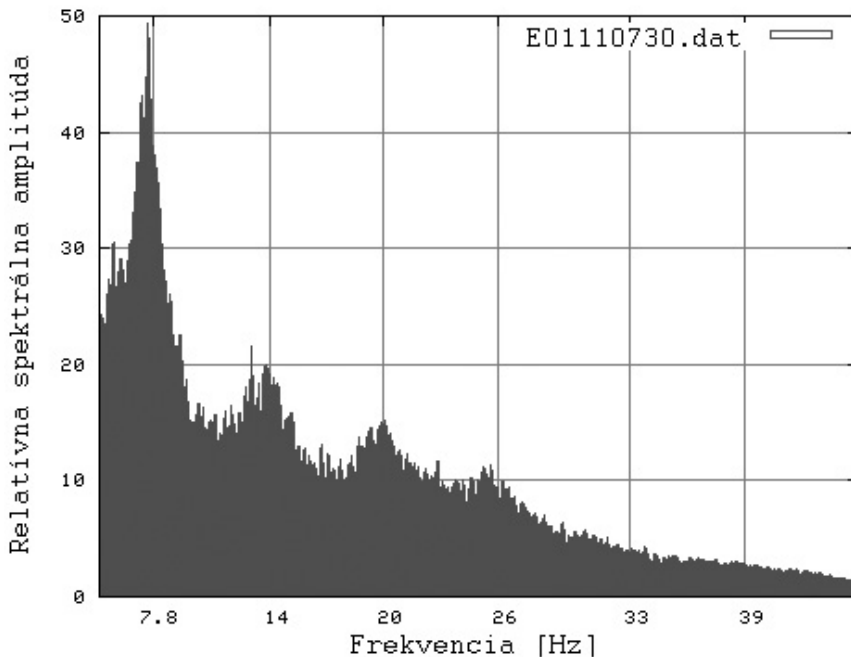
WINFRIED OTTO SCHUMANN (1888–1974) bol prvý, ktorý v sérii prác (počínajúc prácou z r. 1952 — [4]) jav fyzikálne správne a exaktné popísal a hlavne pochopil, že budenie elektromagnetických kmitov v rezonátore „zaobstará“ globálna búrková činnosť a že by tento jav mal byť experimentálne zistiteľný. Na jeho počesť sa elektromagnetické vlastné kmity v dutinovom rezonátore Zem-spodná ionosféra (budené náhodnými a nekoherentnými atmosférickými výbojmi) nazývajú **Schumannove rezonancie (SchR)**.

W. O. Schumann bol nemeckej národnosti (rodák z Tübingenu), časť detstva prežil dokonca v Prahe (za Rakúska-Uhorska). Pôvodným vzdelaním elektroinžinier (1912), študoval ďalej teoretickú fyziku, v roku 1924 sa stal profesorom na technike v Mníchove. Od roku 1947 až do smrti pracoval v USA. Podrobnejší životopis a rozbor jeho prác (aj prác jeho predchodcov) nájdeme v obsiahlom článku [5].

Prvá experimentálna verifikácia prišla v roku 1960, keď M. Balsler a C. A. Wagner z M.I.T. v USA [6] na observatóriu West Greenwich (Rhode Island, USA) preukázali v spektre „atmosférického šumu“ v pásme ELF (**E**xtrêmement **L**ow **F**requencies — od 3 do 300 Hz, čo zodpovedá vlnovým dĺžkam 10^3 – 10^5 km vo vákuu) maximá — spektrálne

„píky“ na frekvenciách približne 7.8, 14.1, 20 a 26 Hz. Na obr. 1 je príklad frekvenčného spektra vertikálnej elektrickej zložky poľa (v intervale 5–45 Hz) zo 6-minútového záznamu 11. 1. 2008 od 07:30 UT na observatóriu v Modre (viď nižšie). Zvislé čiary na obrázku odpovedajú priemerným frekvenciám jednotlivých módov.

Ako neskôr ukážeme (v 2. časti článku), dominantné zložky elektromagnetického poľa SchR sú *vertikálna elektrická zložka* E_z a dve *horizontálne magnetické zložky* H_x a H_y . Na meranie E_z sa v súčasnosti štandardne používajú kapacitné antény („ball antenna“), tvorené vodivým telesom na izolujúcom stožiarí nad povrchom Zeme. Sníma sa elektrické napätie medzi vodivou elektródou a zemským povrchom (uzemňovacími doskami pod päťou stožiara). Magnetické zložky sa snímajú indukčnými senzormi („search-coil sensors“), čo sú valcové cievky s veľkým počtom závitov na otvorených feromagnetických jadrách. Vzhľadom na ich smerovosť treba použiť dva samostatné senzory s vzájomne ortogonálnymi osami (v smeroch N-S a E-W). Signály senzorov treba zosilniť vo frekvenčnom pásme SchR (vymedzí sa sústavou filtrov), podrobiť analógovo-digitálnej konverzii a uložiť pre ďalšie počítačové spracovanie.



Obr. 1. Typické frekvenčné spektrum (v intervale 5–45 Hz) vertikálnej elektrickej zložky poľa — z dát nameraných na AGO Modra 11. 1. 2008, 07:30–07:36 UT. Amplitúda je zobrazená v relatívnych jednotkách, zvislé čiary vyznačujú dlhodobé priemery frekvencií prvých 6 schumannovských módov.

Na Astronomickom a geofyzikálnom observatóriu (AGO) Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Modre-Piesky (asi 45 km od Bratislavy)

sa od r. 2001 vykonávajú pravidelné merania a spektrálne analýzy vertikálnej elektrickej zložky Schumannových rezonancií [7]. Frekvenčné spektrá v reálnom čase je možné nájsť na: <http://193.87.5.150>. Merania magnetických zložiek poľa SchR máme na AGO zatiaľ v pokusnom štádiu, prebiehajú overovacie experimenty. Problematika Schumannových rezonancií je na Katedre astronómie, fyziky Zeme a meteorológie našej fakulty (vedúci Prof. RNDr. Peter Moczo, DrSc.) zahrnutá vo výskumnom programe oddelenia „Fyzika Zeme“ a v magisterskom študijnom programe Fyzika Zeme a planét, v rámci ktorého vzniklo niekoľko diplomových prác. V súčasnosti práce pokračujú a sústreďujú sa aj na štúdium *tranzientných javov* v pásme Schumannových rezonancií (budú podrobnejšie diskutované v 2. časti článku).

Šírenie elektromagnetických vln v pásme ELF v priestore okolo Zeme

Vyznačuje sa:

- „*vlnovodným*“ *módom šírenia*: priestor medzi povrchom Zeme a spodnou ionosférou predstavuje akoby kvázidvojmerný (nakolko výška spodnej ionosféry je malá vzhľadom na polomer Zeme), do seba uzavretý „vlnovod“, elektromagnetická vlna sa šíri postupnými odrazmi od jeho hraníc. Je to zjednodušená predstava (hranice nie sú dokonale vodivé), ale slúži ako vcelku dobrá aproximácia;

- *malým útlmom šírenia*: napríklad vlna s frekvenciou 10 Hz (vlnová dĺžka rádu zemského obvodu) postupuje s útlmom cca 0.2 dB na 1000 km — čo znamená, že po obehnutí celej Zeme je zoslabenie amplitúdy vlny okolo 8 dB, čiže na 40 % počiatkovej hodnoty. Útlm šírenia s frekvenciou mierne stúpa, ale v celom pásme ELF zostáva nízky;

- *veľkou hĺbkou prenikania do hmotného prostredia*: vzdialenosť δ , na akú amplitúda rovinnej vlny (s kruhovou frekvenciou ω , dopadajúcej kolmo na hranicu prostredia) v hmotnom prostredí (vodivosť σ , relatívna permeabilita μ_r) poklesne na $1/e$ hodnoty na hranici prostredia, určuje známy vzťah:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \mu_r \sigma}}, \quad (1)$$

kde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ je permeabilita vákua. Hĺbka prenikania je teda úmerná $\omega^{-1/2}$ a $\sigma^{-1/2}$.

Elektrická vodivosť zemského povrchu (či už pevného alebo kvapalného) je zhruba o 7–8 rádov nižšia oproti vodivosti kovov. Pre frekvenciu 10 Hz a priemernú vodivosť morskej vody $\sim 3.3 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ (závisí na salinite a teplote) bude δ rádu 80–100 m. V prípade pôdy (vodivosť silne závisí od vlhkosti, priemerná hodnota je cca $0.1 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$) je hĺbka prieniku rádove 500 m. Vodivosť hornín (skalných masívov) vykazuje tiež značný rozptyl, priemernej hodnote okolo $0.003 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ zodpovedá hĺbka prieniku rádu 3–5 km.

Práve prenikanie týchto vln hlboko pod hladinu morí a oceánov stimulovalo výskum ich šírenia pre vojenské účely — komunikácia s ponorkami pod hladinou, kde využitie vyšších frekvencií neprichádza do úvahy. V USA aj v bývalom ZSSR, pozri napr. [8], [9], boli vybudované sofistikované komunikačné systémy (napr. ruský „Zeus“ na 82 Hz), napriek mimoriadne nízkej rýchlosti prenosu informácií na frekvenciách v pásme ELF. Nevýhodou takých systémov sú taktiež potrebné gigantické rozmery podmorských antén (desiatky km!) a ich mizivá energetická účinnosť. V súčasnosti sa už podobné systémy prestávajú používať.

Pre zaujímavosť uvedme, že *pozostatky supernov* (ktoré možno v niektorých prípadoch pozorovať v mikrovlnných pásmach a výnimočne aj opticky) musia byť mimoriadne intenzívnymi zdrojmi *magnetodipólového elektromagnetického žiarenia* práve v pásme ELF. Napríklad známy *pulzar v Krabej hmlovine* (pozostatok galaktickej supernovy z r. 1054) generuje na frekvencii práve okolo 30 Hz (rotačná perióda ~ 33 ms) žiarivý výkon $\sim 4 \cdot 10^{31}$ W, čo odpovedá 10^5 -násobku celkového žiarivého výkonu Slnka [10]. Ide vlastne o gigantický „alternátor“, ktorý konvertuje rotačnú energiu zvyšku po explózii supernovy („neutrónová hviezda“) na energiu elektromagnetického poľa, žartovne nazvaný „megavlnová piecka — megawave oven“. Žiaľ, opacita medzihviezdnej plazmy (hoci veľmi riedkej) spolu s obrovskou vzdialenosťou zdroja spôsobuje veľmi silnú absorpciu tohto žiarenia. Priama detekcia je zatiaľ mimo možnosti pozemskej aparatury [11], [12].

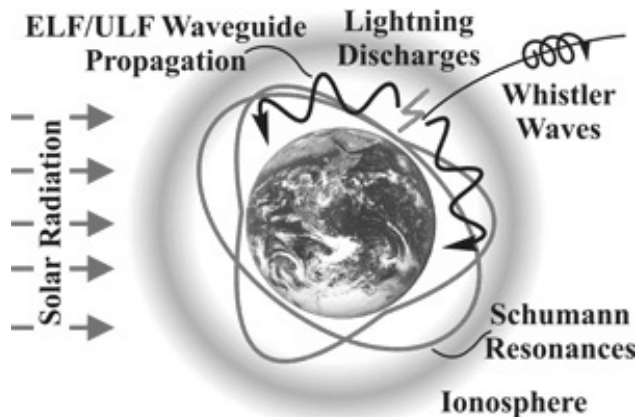
2. Základné vlastnosti elektromagnetického rezonátora Zem — spodná ionosféra

a) Rezonátor s ideálne vodivými hranicami

Ak uvažujeme veľmi vysokú (prakticky nekonečnú) vodivosť ohraničujúcich plôch, riešením Maxwellových rovníc v sférickom súradnom systéme (r, θ, φ) dostaneme dva systémy **vlastných módov** elektromagnetického poľa označovaných ako **TE-** (transverzálne elektrické) a **TM-** (transverzálne magnetické) módy. Odvodenie možno nájsť v učebniciach elektromagnetického poľa, napr. [13], alebo v súhrnnej monografii o Schumannových rezonanciách [14]. Ide v podstate o **stojaté vlnenie**, ktoré vzniká konštruktívnou interferenciou vln postupujúcich opačnými smermi (obr. 2), a to buď pozdĺž zemského povrchu — *longitudinálne* (TM-vlny), resp. kolmo naň — *radiálne* (TE-vlny).

Schumannove rezonancie, ktoré sú predmetom nášho článku, predstavujú longitudinálne vlastné módy (TM). Radiálne rezonancie sa prejavujú na podstatne vyšších frekvenciách (zhruba v pomere zemského polomeru k výške „hranice“ ionosféry) oproti schumannovským, tj. približne od 800 Hz vyššie, a sú veľmi obťažne detekovateľné pre silný útlm.

Elektromagnetický rezonátor Zem-ionosféra je trojdimenzionálny objekt, preto v ňom musia existovať [14] *tri typy* rezonancií: **longitudinálne** („klasické“ Schumannove rezonancie, ktorými sa zaoberá náš prehľad), **tranzverzálne** — uvedené vyššie



Obr. 2. Schématické znázornenie vzniku Schumannových rezonancií (prevzaté z [14]).

(mohli by byť označené ako **radiálne**) a **azimutálne** — prejavujúce sa v *jemnej štruktúre (štiepení)* rezonančných píkov longitudinálnych rezonancií v prítomnosti geomagnetického poľa.

Systém Maxwellových rovníc riešime v **sférickej geometrii** — vo vnútornom prostredí rezonátora, ktoré považujeme za nevodivé a nemagnetické (charakterizované relatívnou permitivitou $\varepsilon_r = 1$). Povrch Zeme berieme ako nekonečne elektricky vodivý¹).

Hornú hranicu rezonátora uvažujeme ako homogénne prostredie s absolútnou permitivitou ε (vo všeobecnosti komplexnou), čo nám umožňuje zahrnúť aj vodivé prostredia — u prostredí s nízkou hustotou (plynných, kedy možno zanedbať Lorentzovu korekciu na lokálne pole) je komplexná permitivita prostredia $\varepsilon = \varepsilon_0 - i \cdot (\sigma/\omega)$, kde σ je vodivosť prostredia, ω je kruhová frekvencia (na tomto mieste a všade ďalej „i“ predstavuje imaginárnu jednotku). V celom objeme rezonátora aj na jeho hraniciach uvažujeme relatívnu permeabilitu $\mu_r = 1$.

Riešenie možno zjednodušiť zavedením dvoch skalárnych **Debyeových potenciálov** [15] U a V , ktoré spĺňajú tú istú vlnovú rovnicu pre funkcie $r \cdot U$ a $r \cdot V$ osve:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \Delta_T + \varepsilon_r k^2 \right) r \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = 0, \quad (2)$$

kde k je konštanta šírenia (vlnové číslo) vo vákuu $k^2 = \omega^2 \cdot \varepsilon_0 \mu_0$ a Δ_T je transverzálna časť Laplaceovho operátora:

$$\Delta_T = \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (2a)$$

¹) V tomto priblížení je tesne pri zemskom povrchu (kde zvyčajne meráme) „mixovanie“ TE- a TM-vln zanedbateľné (vo všeobecnom prípade ale nastáva — vid [18], odst. 7.5., s. 293).

Túto rovnicu možno riešiť tradičnou metódou separácie premenných, tj. každý skalárny potenciál bude súčinom troch funkcií — funkcie radiálnej vzdialenosti $R(r)$, funkcie polárneho uhla (analogia doplnku zemepisnej šírky) $T(\theta)$ a funkcie rovníkového uhla (analogia zemepisnej dĺžky) $\Phi(\varphi)$:

$$F(r, \theta, \varphi) = R(r) \cdot T(\theta) \cdot \Phi(\varphi). \quad (3)$$

Funkcie $T(\theta)$ a $\Phi(\varphi)$ možno skombinovať do známych „sférických harmonických funkcií“ $Y_{n,m}$ — viď ďalej (8a).

Ak spätne vyjadříme zložky \mathbf{E} a \mathbf{H} cez potenciály U a V , dostaneme:

$$E_r = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \varepsilon_r k^2 \right) \frac{r}{\sqrt{\varepsilon_r}} U, \quad H_r = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \varepsilon_r k^2 \right) rV, \quad (4)$$

$$E_\theta = \frac{1}{r\sqrt{\varepsilon_r}} \frac{\partial^2(rU)}{\partial r \partial \theta} - \frac{i\omega\mu_0}{\sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad H_\theta = \frac{1}{r\sqrt{\varepsilon_r}} \frac{\partial^2(rV)}{\partial r \partial \theta} - \frac{i\omega\varepsilon_0\sqrt{\varepsilon_r}}{\sin\theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad (5)$$

$$E_\varphi = \frac{1}{r \sin\theta \sqrt{\varepsilon_r}} \frac{\partial^2(rU)}{\partial r \partial \varphi} + i\omega\mu_0 \frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad H_\varphi = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial^2(rV)}{\partial r \partial \varphi} - i\omega\varepsilon_0\sqrt{\varepsilon_r} \frac{\partial U}{\partial \theta}. \quad (6)$$

Polia \mathbf{E} a \mathbf{H} sú vo všeobecnosti zložené z dvoch typov parciálnych vlnových polí:

- transverzálne magnetické (TM) vlny, pre ktoré potenciál $V = 0$,
- transverzálne elektrické (TE) vlny, pre ktoré analogicky $U = 0$.

Pre TM-vlny je radiálna zložka magnetickej intensity $H_r = 0$, preto ich niektorí autori označujú ako „elektrické“ (iba elektrická intenzita \mathbf{E} má radiálnu zložku) a naopak, TE-vlny (v poli ktorých má radiálnu zložku iba \mathbf{H}) označujú ako „magnetické“. Ide o istú nedôslednosť v označovaní, pridržíme sa termínov TE- a TM-vlny.

Radiálna zložka potenciálu $R(r)$ vyhovuje rovnici:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 \varepsilon_r - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] (rR) = 0, \quad (7)$$

kde n je celé číslo (separačný index, udávajúci stupeň sférickej harmonickej funkcie $Y_{n,m}$ v uhlovej zložke potenciálu), $k = \omega/c$ predstavuje vlnové číslo (konštantu šírenia) vo vákuu a ε_r je relatívna permitivita prostredia.

Všeobecným riešením *radiálnej vlnovej rovnice* (7) je lineárna kombinácia Hankelových funkcií polocelého rádu („sférických“ Hankelových funkcií 1. a 2. druhu — [16], [17]) $h_n^{(1)}$, $h_n^{(2)}$ v tvare (platí pre každý potenciál U aj V samostatne — pochopiteľne s odlišnými „sadami“ koeficientov $\{A\}$ a $\{B\}$):

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[A_{n,m} h_n^{(1)}(kr) + B_{n,m} h_n^{(2)}(kr) \right] Y_{n,m}(\theta, \varphi). \quad (8a)$$

Funkcie $h_n^{(1)}$, $h_n^{(2)}$ definujeme cez Hankelove funkcie $H_{n+1/2}^{(1)}$, $H_{n+1/2}^{(2)}$ 1. a 2. druhu polocelého rádu:

$$h_n^{(j)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+1/2}^{(j)}(x). \quad (j = 1, 2) \quad (8b)$$

Závislosť na uhloch — „doplňku zemepisnej šírky“ $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$ a „zemepisnej dĺžke“ $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ — reprezentuje dobre známa sférická harmonická funkcia stupňa n a rádu m :

$$Y_{n,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \cdot P_{n,m}(\cos \theta) \exp(im\varphi), \quad (9)$$

kde $P_{n,m}(\cos \theta)$ je adjungovaná Legendreova funkcia stupňa n , rádu m argumentu $(\cos \theta)$.

Vlastné módy rezonátora, čiže v podstate *stojaté elektromagnetické vlnenie*, je potrebné vyšetrovať na základe okrajových podmienok. Vlastné módy rezonátora možno chápať ako výsledok *konštruktívnej interferencie* vln šíriacich sa od zdroja rôznymi smermi. Takáto interferencia bude plne konštruktívna iba pre určité diskkrétne frekvencie. Približne možno povedať, že základnému módu odpovedá vlnová dĺžka rovná obvodu Zeme (~ 40.000 km). K okrajovým podmienkam pre amplitúdy polí na hraniciach rezonátora pristupuje tzv. Sommerfeldova podmienka, ktorá zabezpečuje, aby riešenie nad hornou hranicou rezonátora (pre $r > R+h$, kde R predstavuje polomer Zeme a h „výšku ionosféry“) obsahovalo iba postupnú vlnu šíriacu sa smerom $r \rightarrow \infty$, preto vo výraze pre potenciály (8a) v prípade $r > R+h$, tj. „vo vnútri“ ionosféry, zostane iba radiálna funkcia 2. druhu $h_n^{(2)}$ (jej singularita v počiatku nevedí, nakoľko riešenie má zmysel pre $R \leq r \leq R+h$).

Ak uvažujeme obidve hranice rezonátora ideálne (nekonečne) vodivé, musia sa na nich tangenciálne zložky vektora elektrického poľa \mathbf{E} anulovať. Za predpokladu, že $h \ll R$, obidve podmienky vedú na disperzný vzťah:

$$k_n R = \sqrt{n(n+1)}, \quad \text{presnejšie } k_n R = \sqrt{n(n+1)(1-h/R)}.$$

Činiteľ $(1-h/R)$ má svojou podstatou „geometrickú interpretáciu“. V približnej predstave vlny „skáčucej“ postupnými odrazmi striedavo od povrchu Zeme a hranice ionosféry naznačuje akoby „predĺženie“ dráhy vlny a teda zníženie jej fázovej rýchlosti (uvažovanej vzhľadom na obvod Zeme). Závislosť na $\sqrt{n(n+1)}$ je priamym dôsledkom sférickej symetrie problému, vďaka ktorej dochádza v tomto ideálnom modeli k *degenerácii módov* — nezávislosti vlastnej frekvencie a rozloženia poľa na indexe („*druhom kvantovom čísle*“) m vo sférickej harmonickej funkcii $Y_{n,m}(\theta, \varphi)$ v rov. (9).

V tomto veľmi zjednodušenom modeli, ktorý bol predmetom pionierskej práce W. O. Schumanna [4], vychádzajú rezonančné frekvencie pre rezonátor Zem-ionosféra na **10.6 Hz** (základný mód pre $n = 1$), ďalšie postupne na **18.3 – 25.9 – 33.5 – ... Hz** ($n = 2, 3, 4, \dots$).

Pretože rezonátor tvoria dve oddelené hraničné plochy, je prípustné aj tzv. *elektrostatické* riešenie pre $n = 0$, ktoré zodpovedá homogénemu radiálnemu elektrickému

poľu a absencii magnetického poľa. Takéto pole naozaj existuje (podrobnejšie v druhej časti článku), pri zemskom povrchu má priemernú intenzitu $100\text{--}150\text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$ (pričom povrch Zeme nesie negatívnu polaritu). Označuje sa ako „*fair-weather field*“. Zemský povrch a spodnú hranicu ionosféry môžeme chápať ako elektródy sférického kondenzátora.

b) Reálny rezonátor Zem – ionosféra

Dôležitou veličinou, ktorá kvantifikuje energetické straty v rezonátore, je *činiteľ kvality* (bežne označovaný Q). Disipácia energie v rezonátore nastáva jednak v materiáli hraníc (konečná vodivosť!), prípadne aj v nedokonalom dielektriku (izolujúcom prostredí), ktoré vyplňuje objem rezonátora. V prípade rezonátora Zem – ionosféra dominuje prvá príčina. Nedokonalé izolačné vlastnosti troposférického a stratosférického vzduchu prispievajú k ohmickým stratám zanedbateľnou mierou (v globálnom meradle). Ak teda uvažíme iba straty v prostredí ionosféry (povrch Zeme berieme ako dokonale vodivý, čo sa ukazuje pri analýze SchR ako oprávnené), môžeme činiteľ kvality Q vyjadriť ako:

$$Q = \frac{1}{2\delta} \frac{P_V}{P_S}. \quad (10)$$

Objemový integrál v čitateli

$$P_V = \iiint_{R \leq r \leq R+h} (\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}|^2) dV \quad (10a)$$

predstavuje celkovú elektromagnetickú energiu vo vnútri (v objeme) rezonátora, zatiaľčo plošný integrál

$$P_S = \iint_{r=R+h} \mu_0 (H_\theta^2 + H_\varphi^2) dS \quad (10b)$$

odpovedá energii disipovanej vo vonkajšom hraničnom povrchu rezonátora (δ je hĺbka prieniku elmg. poľa do materiálu hraníc — viď (1)), čiže na hranici ionosféry, keďže zemský povrch berieme ako ideálne vodivý.

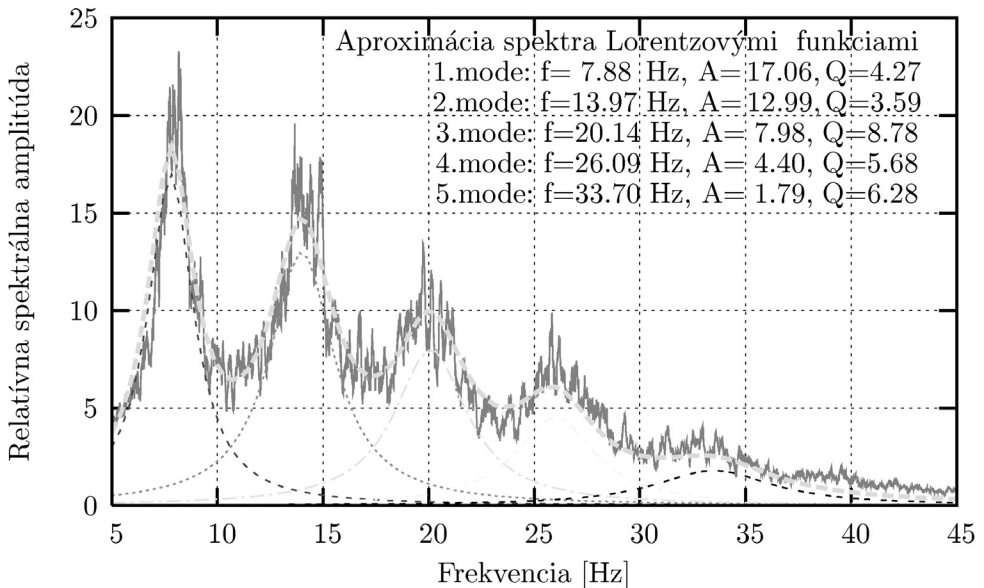
Pretože energie elektrického aj magnetického poľa (prvý a druhý sčítanec vo výraze pre P_V) sú rovnaké, možno približne činiteľ Q vyjadriť ako podiel „*výšky hranice ionosféry*“ h k *hĺbke prieniku* δ . Pre náš rezonátor dostávame veľmi nízke hodnoty Q rádu 4–6 (v každom prípade $Q < 10$), lebo v priblížení skalárnej vodivosti je hĺbka prieniku elektromagnetického poľa do spodnej ionosféry okolo 10–15 km [18] (čím vyššia vodivosť hraníc, tým menšia hĺbka prieniku a teda vyšší činiteľ Q).

Ak je tento činiteľ vysoký (rádu stovák alebo tisícov — ako u rezonátorov v technickej praxi), možno profily „spektrálnych čiar“, zodpovedajúcich vlastným módom rezonátora, vyjadriť známou Lorentzovou funkciou:

$$A(\omega) = \frac{A_0}{1 + 2Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}, \quad (11)$$

kde ω_0 je kruhová frekvencia „stredú čiar“ (maxima amplitúdy, hodnota ktorého je A_0). S tým súvisí definícia činiteľa Q (známa z elektrotechniky) ako pomeru strednej frekvencie „čiar“ (maximum amplitúdy) a polovičnej „šírky čiar“ na 0.707 amplitúdy maxima. Ale v prípade nízkeho Q sa tieto vzťahy stávajú nepoužiteľnými a nastávajú zaujímavé dôsledky:

- spektrálne „profily“ vlastných módov sa stávajú závislými na polohe miesta merania — teda v odlišných bodoch v rezonátore nameriame odlišné tvary spektrálnych čiar a teda odlišné „píkové frekvencie“ a „lokálne“ činitele kvality;
- tvar spektrálnych profilov (a nielen ich amplitúda) sa stávajú výrazne závislými na charakteristikách budiaceho zdroja (zdrojov);
- profily spektrálnych čiar sú výrazne *nesymetrické* voči píkovej frekvencii, navyše táto nesymetria má odlišný charakter v rôznych bodoch pozorovania;
- všetky vyššie uvedené charakteristiky módov (najmä „píkové frekvencie“) sú výrazne ovplyvňované charakteristikami budiaceho zdroja (zdrojov).



Obr. 3. Ukážka fitovania frekvenčného spektra sumou funkcií lorentzovského typu. V pravom hornom rohu sú výsledné parametre prvých piatich módov (v poradí: píková frekvencia v Hz, amplitúda v relatívnych jednotkách a činiteľ kvality). „Roztrasená“ čiara predstavuje „surové“ spektrum získané DFT, k nemu sa primkýna súčet aproximačných funkcií. Dáta sú z AGO Modra, používaný počítačový kód vytvoril L. Rosenberg [19].

Treba si uvedomiť, čo vyplýva už z definície, že Q je *globálnou* charakteristikou rezonátora ako celku. Keď sa z nameraného frekvenčného spektra snažíme určiť základné parametre jednotlivých vlastných módov („píkovú“ frekvenciu, činiteľ kvality a amplitúdu), musíme profily jednotlivých „spektrálnych čiar“ aproximovať relatívne

jednoduchými funkciami a je zásadná otázka, aké zvolíme. Preto nesie takéto určovanie vždy istý stupeň ľubovôle a pri porovnávaní výsledkov z rôznych miest pozorovania je nutná značná opatrnosť. Príklad na obr. 3 ukazuje fitovanie spektra získaného z meraných dát — spektrum z dát získaných 30. 9. 2003 na AGO Modra je aproximované súčtom 5 funkcií lorentzovského typu (vpravo hore sú hodnoty píkovej frekvencie, píkovej amplitúdy v relatívnych jednotkách a činitele kvality pre prvý až piaty mód).

Najjednoduchší model neideálneho rezonátora zodpovedá prípadu, keď zemský povrch stále uvažujeme ako ideálne vodivý (vzhľadom na reálne hodnoty jeho vodivosti voči vodivosti ionosféry je tento predpoklad veľmi dobre splnený), ale ionosféru modelujeme prostredím s *ostrou spodnou hranicou* a *konštantnou vodivosťou* σ , vyjadrenou cez komplexnú (a frekvenčne závislú) permitivitu ε_r [2]:

$$\varepsilon_r = 1 - i \frac{\omega_0^2}{\omega v_{eff}}. \quad (12)$$

V tomto výraze ω_0 značí plazmovú frekvenciu v ionosfére. Je určená prevažne koncentráciou voľných elektrónov N podľa približného vzťahu:

$$\omega_0^2 = \frac{N \cdot e^2}{m \cdot \varepsilon_0}$$

(ε_0 predstavuje permitivitu vákua, e – náboj elektrónu, m – jeho hmotnosť).

Veličina v_{eff} predstavuje efektívnu zrážkovú frekvenciu voľných elektrónov s neutrálnymi atómami, resp. molekulami. Po uvážení okrajových podmienok dostaneme v tomto prípade — podrobnosti [14, s. 22–25] — pre píkove frekvencie f_n a činitele kvality Q_n prvých piatich vlastných módov (ak prijmeme globálne priemerné hodnoty ionosférických parametrov):

n	f_n [Hz]	Q_n
1	7.8	1.4
2	14.7	2.0
3	21.6	2.4
4	28.5	2.9
5	35.5	3.2

Hodnoty f_n vychádzajú mierne vyššie oproti realite (pre 5. mód cca o 10 %), zatiaľčo Q_n sú výrazne podhodnotené (reálne hodnoty sú približne dvojnásobné).

Presnejší výpočet vyžaduje uvažovanie výškovo aj uhlovo **nehomogénnej ionosféry**, čiže:

- „difúzny“ charakter hranice ionosféry — závislosť elektrónovej koncentrácie a vodivosti na výške;
- relatívna permitivita (aj vodivosť) ionosférickej plazmy má tenzorový charakter [18] — prostredie javí *anizotropiu*;

- odlišné vlastnosti ionosféry na Slnkom osvetlenej a neosvetlenej pologuli — tzv. *asymetria deň–noc*;
- závislosť parametrov ionosféry na geomagnetickej šírke — v najjednoduchšom prípade tzv. *asymetria typu „polárnych čiapok“*;
- vplyv *geomagnetického poľa* a jeho priestorovej štruktúry na šírenie ELF vln v ionosfére (*gyrotropne vlastnosti prostredia*).

Geomagnetické pole ovplyvňuje fázovú rýchlosť vln šíriacich sa z miesta zdroja pozdĺž odlišných hlavných kružníc. Stopy vlnoplôch na zemskom povrchu potom nevytvárajú sieť kružníc so stredom v mieste zdroja, ale sú deformované v závislosti na geomagnetických súradniciach zdroja a polohe terminátora (rozhrania deň–noc vo výške ionosféry).

Presný výpočet so zahrnutím všetkých uvedených okolností nebol doteraz vykonaný. Modelové výpočty sa opierajú buď o vyjadrenie polí v reálnom rezonátore vo forme *lineárnej kombinácie* polí zodpovedajúcich jednotlivým módom *ideálneho rezonátora*, alebo numerické riešenie Maxwellových rovníc s uvažovaním vlastností jednotlivých prostredí (v prvom rade *ionosféry*).

Prvý naznačený postup [14, odst. 2.6–2.8, 5.1] — vedie na homogénnu (teoreticky nekonečnú) sústavu lineárnych rovníc pre koeficienty rozvoja reálneho poľa do módov ideálneho rezonátora (vyjadrujúce vlastne „väzbu“ *jednotlivých módov*). Názo­rne zachycuje **degeneráciu módov** v neideálnom rezonátore — zložky módov prislúchajúce sférickým harmonickým funkciám $Y_{n,m}$ (9) pre odlišný stupeň m nemajú rovnaké vlastné frekvencie. Ide o jav „*štiepenia módov*“ (*mode splitting*) známy z viacerých oblastí fyziky. V prípade Schumannových rezonancií bol zistený a overený experimentálne (polia pre rovnaký rád n , ale odlišný stupeň m vykazujú odlišnú polarizáciu).

Štiepenie módov — „jemná štruktúra“ rezonančných pík — je prejavom **azimutálnych** rezonancií [14, s. 294–299]. Príčinou je odlišná hodnota azimutálnej zložky (v smere „rovno­bež­kového uhla“ φ) fázovej rýchlosti vln šíriacich sa vzhľadom na uhol φ v opačných smeroch. To je spôsobené jednak účinkom geomagnetického poľa, jednak uhlovou nehomogenitou ionosféry (oslnená a neoslnená časť). V spektre vlastného módu rádu n by sa malo prejaviť $(2n + 1)$ „subpík“, takže základný mód by sa mal skladať z 3 blíz­kych maxím.

Štiepenie módov nie je priamo v spektre pozorovanom z jedného miesta viditeľné, nakoľko rozdiely píkových frekvencií pre určitý vlastný mód n , ale odlišné hodnoty m sú v najlepšom prípade desiatiny Hz. Nízke Q rezonátora a časová chaotičnosť zdrojov jemnú štruktúru „rozmažú“.

Tento efekt sa podarilo preukázať pomocou *vzájomnej korelačnej funkcie* signálov zo súčasných meraní na dvoch pozorovacích miestach vo vhodnej vzdialenosti (ani „príliš blízko“, ani „príliš ďaleko“, vhodná je vzdialenosť okolo 5–7 tisíc km). Vzájomná korelačná funkcia javí, v závislosti na časovom posune obidvoch korelovaných radov, kváziperiodickú štruktúru s „periódou“ nepriamo úmernou frekvenčnému od­stupu spektrálnych komponent jemnej štruktúry.

V prípade popisu poľa v reálnom rezonátore *lineárnou kombináciou módov ideálneho rezonátora* ide implicitne o vlastno­hodnotový problém, takže dostaneme komplexné

vlastné hodnoty — konštanty šírenia jednotlivých módov (reprezentujúce vlastné frekvencie spolu s činiteľmi tlmenia).

Na priame numerické riešenie Maxwellových rovníc možno použiť *metódu konečných diferencií* (FDTD), ktorá bola použitá napr. v [20], alebo v rozsiahlej monografii [21], *metódu konečných prvkov* (FEM), prípadne metódu *viacdimenzionálnych telegrafných rovníc* (TLM) [22], [23]. Výpočty tohto druhu ale treba vykonávať s uvažovaním *budiaceho zdroja*.

Analytické riešenie poľa budeného známym zdrojom v rezonátore s nízkym Q nie je možné, nakoľko separácia riešenia podľa časovej (t) a priestorových (\vec{r}) premenných je fyzikálne hrubo neadekvátne. *Disipácia elektromagnetickej energie* je totiž *priestorovo závislá* — mení sa po ploche hranice. Pole v rezonátore je — na frekvenciách v pásme ELF — kombináciou *stojatého vlnenia* a poľa *v blízkej zóne* každého samostatného zdroja [24]. Táto práca uvádza — na základe modelových numerických výpočtov — charakteristické závislosti f_n a Q_n na vzdialenosti od zdroja k miestu pozorovania — pre prvé tri vlastné módy rezonátora s typickými parametrami ionosféry. Každý vlastný mód má svoj priebeh poľa po povrchu Zeme, čiže svoju osobitnú — odlišnú pre intenzitu elektrického a magnetického poľa — charakteristickú závislosť na uhlových premenných θ a φ („angular pattern“) — viď [14]. Takýto „obrazec“ pre každý mód je viazaný na polohu budiaceho zdroja (zdrojov), čo vysvetľuje zmeny parametrov jednotlivých módov počas dňa, resp. priemery za ročné obdobia.

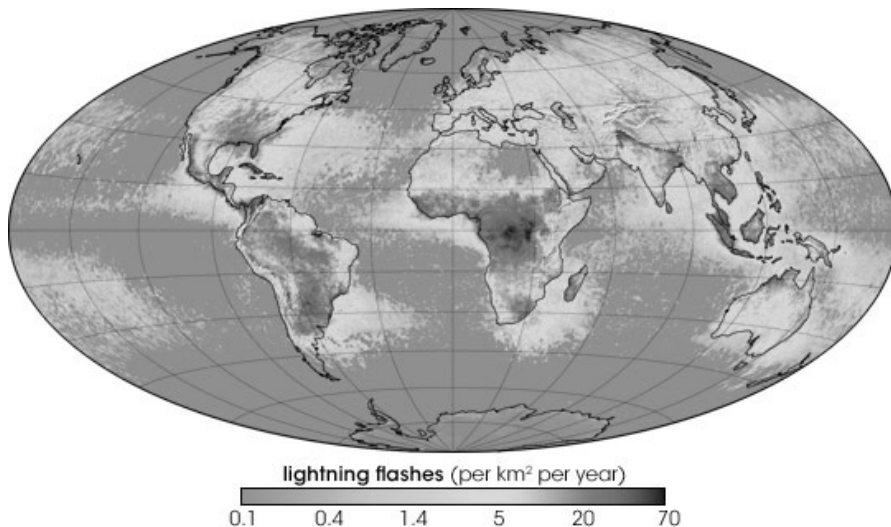
3. Budiaci mechanizmus rezonátora

Ako predpokladal už W. O. Schumann, zdroj energie pre vlastné kmity v rezonátore Zem-ionosféra predstavuje *globálna búrková činnosť*. Na obr. 4 vidíme ročný priemer hustoty atmosférických výbojov na povrchu Zeme (merané optickými metódami z vesmíru). Približne 95 % búrkovej činnosti sa sústreďuje do troch ohnísk v tropických oblastiach: rovníková Afrika, oblasť Amazónie a indonézske súostrovie, pričom v každej oblasti výbojová aktivita kulminuje okolo 13–15 hodín miestneho času. Každú sekundu prebehne nad celou Zemou okolo 100–200 výbojov [25].

Jednotlivé výboje sa výrazne líšia intenzitou, ale časové priebehy prúdových impulzov sú zhruba rovnaké, charakteristický čas výboja býva 10–20 mikrosekúnd. Preto maximum elektromagnetickej energie výboj vyžaruje na frekvenciách ~ 20 –100 kHz, teda na schumannovské pásmo (ELF) pripadá nepatrná časť. Napriek impozantnosti optických a akustických prejavov atmosférického výboja je uvoľnená energia pomerne malá, rádu 10^8 – 10^9 J (navyše, jej podstatná časť sa okamžite transformuje priamo na teplo). Toto je spolu s gigantickým objemom rezonátora ($\sim 4 \cdot 10^{10}$ km³) príčinou veľmi malej intenzity poľa Schumannových rezonancií.

Globálny elektrický obvod

Ako už bolo uvedené, na sústavu povrch Zeme – ionosféra možno nazerať ako na *obrovský sférický kondenzátor* o kapacite približne 0.05 F (je určená v podstate geomet-



Obr. 4. Mapa globálnej búrkovej činnosti za roky 1983–1985 podľa pozorovaní z vesmíru (prevzaté z [26]). Stupnica vyjadruje priemerný ročný počet výbojov na km².

rickými faktormi). Ako ukazujú merania, tento kondenzátor je takmer konštantne nabitý na napätie okolo 250–300 kV (povrch Zeme nesie **záporný** náboj).

Mechanizmami separácie nábojov – prevažne v búrkových mračnách [26], [27] – sa lokálna rovnováha neustále porušuje a bleskové výboje ju obnovujú. Globálny okruh (podrobnejšie bude o ňom pojednané v 2. časti článku) je uzatváraný veľmi slabým, prakticky konštantným prúdom nepretržite tečúcim zo zemského povrchu vertikálne hore („steady-state air-Earth current“). Napriek nepatrnej prúdovej hustote okolo $(1-3) \cdot 10^{-12} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$ (je merateľná), globálna hodnota tohto prúdu je okolo 2000 A. Kvázistacionárne elektrické pole („fair-weather field“) má pri zemskom povrchu intenzitu rádu $100 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ [27], [28], [29]. Intenzita tohto poľa javí typickú, kvázipravidelnú dennú variáciu (tzv. *Carnegieho krivka*).

Sústavu Zem–ionosféra možno približne simulovať najjednoduchším náhradným obvodom, tvoreným paralelnou kombináciou kapacity $\sim 0.05 \text{ F}$ a rezistancie $\sim 150 \Omega$. Pokiaľ by neelektrické mechanizmy separácie nábojov (prevažne v troposfére), a tým aj búrková činnosť, prestali fungovať, behom charakteristického času rádu minút by akákoľvek elektrická aktivita ustala.

Prislúchajúci výkon celozemského „atmosférického elektrického stroja“ je približne 500 MW, teda výkon iba jednej väčšej elektrárne. Hustota výkonu je „astronomicky nízka“, okolo $0.01 \text{ W} \cdot \text{km}^{-3}$. Energia je hradená z konvektívnych procesov v troposfére, ktoré koniec koncov vyvolávajú separáciu nábojov. O vzťahu medzi parametrami SchR a zmenami globálnej povrchovej teploty pojednáva napr. práca [30].

L i t e r a t ú r a

- [1] DIEMINGER, W.: *Trends in Early Ionospheric Research in Germany*, Phil. Trans. Roy. Soc. London A 280 (1975), No. 1293 , 27–34.
- [2] RATCLIFFE, J. A.: *An Introduction to the Ionosphere and Magnetosphere*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1972), 296 s.
- [3] <http://www.ee.ntu.edu.tw/news/20060615-ChenPangYeang-talk.pdf>.
- [4] SCHUMANN, W. O.: *Über die Strahlungslosen Eigenschwingungen Einer Leitenden Kugel, die vom Einer Luftschicht und Einer Ionosphärenhülle Umgeben ist*, Zs. Naturforsch., 7A (1952), 149–154.
- [5] BESSER, B. P.: *Synopsis of the Historical Development of Schumann Resonances*, Radio Science, 42, RS2S02 (2007), doi: 10.1029/2006RS003495.
- [6] BALSER, M., WAGNER, C. A.: *Observations of Earth-Ionosphere Cavity Resonances*, Nature 188 (1960), 638–641.
- [7] ONDRÁŠKOVÁ, A., KOSTECKÝ, P., ŠEVČÍK, S., ROSENBERG, L.: *Long-Term Observations of Schumann Resonances at Modra Observatory*, Radio Science 42 (2007), RS2S09, doi: 10.1029/2006RS003478.
- [8] <http://www.vlf.it/submarine/sbmarine.html>.
- [9] <http://www.vlf.it/zevs/zevs.htm>.
- [10] LUZ, D. M. G. C., BERRY, D. L.: *On the effect of the pulsar magnetodipole radiation on the supernova remnant*, Mon. Not. R. Astron. Soc. 306 (1999), 191–198.
- [11] LIPUNOV, V. M.: *Detection of Magnetomultipole Radiation from Neutron Stars*, Astron. Astrophys. 127 (1983), No. 1, L1–L2.
- [12] ODEHNAL M., GRYGAR J. et al.: *Possibility of Detection of Ultra-Low-Frequency Dipole Radiation from Obliquely Rotating Magnetized Neutron Stars*, Bull. Astron. Inst. Czechoslovak. 36 (1985), No. 6, 369–375.
- [13] STRATTON, J. A.: *Teorie elektromagnetického pole*, SNTL, Praha (1961), 576 s.
- [14] NICKOLAENKO, A. P., HAYAKAWA, M.: *Resonances in the Earth-Ionosphere Cavity*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston (2002), 378 s.
- [15] WAIT, J. R.: *Electromagnetic Waves in Stratified Media*, Pergamon Press, Oxford, London 1962, 372 s.
- [16] GRAY, A., MATTHEWS, G. B.: *A Treatise on Bessel Functions and Their Applications to Physics*, Oxford Univ. Press, Oxford, London 1931, 371 s.
- [17] ANGOT, A.: *Užitá matematika pro elektrotechnické inženýry*, SNTL, Praha 1971, 819 s.
- [18] GALEJS, J.: *Terrestrial Propagation of Long Electromagnetic Waves*, Pergamon Press, Oxford, New York 1972, 360 s.
- [19] ROSENBERG, L.: *Data Processing Methodology of the Electric and Magnetic Components of the Schumann Resonances at Modra Observatory*, Acta Astron. et Geophys. Univ. Comenianae XXV (2004), 1–8.
- [20] YANG, H., PASKO, V. P.: *Three-Dimensional Finite Difference Time Domain Modelling of the Earth-Ionosphere Cavity Resonances*, Geophys. Res. Letts. 32 (2005), L03114, doi: 10.1029/2004GL021343.
- [21] TAFLOVE, A., HAGNESS, S. C.: *Computational Electrodynamics*, Artech House, Inc., Boston, London 2005, 1006 s.
- [22] MADDEN, T., THOMPSON, W.: *Low-Frequency Electromagnetic Oscillations of the Earth-Ionosphere Cavity*, Rev. Geophys. 3 (1965), No. 2, 211–253.
- [23] MORENTE, J. A., PORTÍ, J. A., SALINAS, A., MOLINA-CUBEROS, G. J., LICHTENEGGER, H., BESSER, B. P.: *Do Schumann Resonance Frequencies Depend on Altitude?* J. Geophys. Res. 109 (2004), A05306, doi: 10.1029/2003JA010305.
- [24] KUŁAK, A., MŁYNARCZYK, J., ZIĘBA, S., MICEK, S., NIECKARZ, Z.: *Studies of ELF Propagation in the Spherical Shell Cavity Using a Field Decomposition Method Based on Asymmetry of Schumann Resonance Curves*, J. Geophys. Res. 111 (2006), doi: 10.1029/2005JA011429.

- [25] KOSTECKÝ, P.: *Nad Zemou sa blýska 200-krát za sekundu*, Quark 10 (2004), No. 11, 16–18.
- [26] *The Earth's Electrical Environment (Studies in Geophysics)*, The National Academies Press, Washington, D. C., 1986, 263 s.
 Chap.2.: KRIDER, E. P., *The Physics of Lightnings*,
 Chap.15.: ROBLE, R. G., IZUR, I.: *The Global Atmospheric-Electrical Circuit*.
- [27] ADLERMAN, E. J., WILLIAMS, E. R.: *Seasonal Variation of the Global Electric Circuit*, J. Geophys. Res. 101 (1996), No. D23, 29 679–29 688.
- [28] BESPALOV, P. A., CHUGUNOV, YU. V., DAVYDENKO, S. S.: *Planetary Electric Generator Under Fair-Weather Conditions with Altitude-Dependent Atmospheric Conductivity*, J. Atm. Terr. Phys. 58 (1996), No. 5, 605–611.
- [29] RYCROFT, M., ISRAELSSON, S., PRICE, C.: *The Global Atmospheric Electric Circuit, Solar Activity and Climate Change*, J. Atm. Sol.-Terr. Phys. 62 (2000), 1563–1576.
- [30] SEKIGUCHI, M., HAYAKAWA, M., NICKOLAENKO, A. P., HOBARA, Y.: *Evidence of a Link Between the Intensity of Schumann Resonance and Global Surface Temperature*, Ann. Geophys. 24 (2006), 1809–1817.

Aposteriorní odhady chyby v metodě konečných prvků

Tomáš Vejchodský, Praha

Úvod

Základním úkolem numerické matematiky je vyvíjet metody pro přibližné řešení matematických úloh, které zpravidla nelze vyřešit přesně (nebo je to příliš obtížné či pracné). Při konkrétních výpočtech se ovšem brzy zjistí, že znalost přibližného řešení je bezcenná, pokud nemáme alespoň nějakou představu o tom, jak velké chyby jsme se dopustili.

Už v antice Archimédes počítal přibližně obvod kruhu tak, že mu vepisoval a opisoval pravidelné mnohoúhelníky. Tím získal zaručený horní a dolní odhad pro obvod kruhu,

RNDr. TOMÁŠ VEJCHODSKÝ, Ph.D., Matematický ústav Akademie věd ČR, v. v. i., Žitná 25, 115 69 Praha 1, e-mail: vejchod@math.cas.cz.

Autor děkuje AV ČR, GA AV ČR a GA ČR, které podporují jeho výzkum v rámci výzkumného záměru AV0Z10190503 a projektů IAA100760702 a 102/07/0496.