Jamel Abidi; Mohamed Lassaad Ben Yattou

Le minimum de deux fonctions plurisousharmoniques et une nouvelle caracterisation des fonctions holomorphes

Mathematica Bohemica, Vol. 136 (2011), No. 3, 301–310

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141651

LE MINIMUM DE DEUX FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES ET UNE NOUVELLE CARACTERISATION DES FONCTIONS HOLOMORPHES

Jamel Abidi, Mohamed Lassaad Ben Yattou, Tunis

(Received April 3, 2010)

Abstract. We prove, among other results, that $\min(u,v)$ is plurisubharmonic (psh) when u,v belong to a family of functions in $\mathrm{psh}(D)\cap\Lambda_\alpha(D)$, where $\Lambda_\alpha(D)$ is the α-Lipchitz functional space with $1<\alpha<2$. Then we establish a new characterization of holomorphic functions defined on open sets of $\mathbb{C}^n$.

Keywords: maximum principle, plurisubharmonic function

MSC 2010: 32A10, 32D20, 32U05, 32U30

1. Introduction

Dans ce papier nous cherchons à déterminer des conditions sur deux fonctions u et v continues et psh sur un ouvert U de $\mathbb{C}^N$, pour que leur minimum soit psh sur U. Il apparait que le sous-ensemble $E=\{z\in U/u(z)=v(z)\}$ est obstruant. L'importance du fait que $\min(u,v)$ puisse être psh est révélée par les propositions suivantes ainsi que par d'autres conséquences indiquées dans la suite. Aussi on s'interesse à caractériser les fonctions holomorphes par les fonctions plurisousharmoniques. Soit U ouvert de $\mathbb{R}^d,(d\geqslant 2)$, $h(U)$ et $\mathrm{sh}(U)$ désignent respectivement l'ensemble des fonctions harmoniques et sousharmoniques sur U. Sur les fonctions harmoniques et sousharmoniques on pourra consulter les ouvrages [6], [11], [23] et [25]. Pour $\theta\colon U\to\mathbb{C}$, $\mathrm{supp}(\theta)$ est le support de θ. Si $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, $C^k(U)=\{\theta\colon U\to\mathbb{C}/\theta$ est de classe C^k dans $U\}$, $C(U)=\{\varphi\colon U\to\mathbb{C}/\varphi$ est continue sur $U\}$ et $C_c^\infty(U)=\{\theta\in C^\infty(U)/\theta$ est à support compact dans $U\}$. $H^\alpha(\alpha\geqslant 0)$ est la mesure α-dimensionnelle de Hausdorff (cf. [7], [28]). Pour $E\subset U$, E° est l'intérieur de E, m_d est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Si $f\colon U\to\mathbb{R}$ de classe C^1, $\mathrm{grad}(f)$ est le gradiant de f. Pour $h\in\mathbb{R}^n$, $\|h\|$ est la norme euclidienne de h.

Soit D un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $\mathrm{prh}(D)$ et $\mathrm{psh}(D)$ sont respectivement l'ensemble des fonctions pluriharmoniques et plurisousharmoniques dans D et $H(D)$ est l'ensemble des fonctions holomorphes dans D.

Sur les fonctions plurisousharmoniques et holomorphes on pourra consulter [8], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [19], [22], [25], [27], [30], [31]. Des résultats sur le prolongement des fonctions sousharmoniques et n-sousharmoniques (cf. [26]) ont été obtenus dans [1], [3], [15] et [24]. Sur l'extension des fonctions plurisousharmoniques et holomorphes on pourra consulter [4], [5], [9], [10], [15], [19], [21] [24] et [28].

2. Résultats et préliminaires

Proposition 2.1. *Soient* $u, v \in \mathrm{psh}(U) \cap C(U)$ *(*U *ouvert de* $\mathbb{C}^n$*). Alors* $\min(u,v) = \frac{1}{2}[u+v-|u-v|] = u+v-\max(u,v)$*. D'autre part* $\min(u,v)$ *est psh si et seulement si* $dd^c u + dd^c v \geqslant dd^c \max(u,v)$*.*

P r e u v e. Les identités sont facilement vérifiables. Si $\min(u,v)$ est psh, $dd^c \min(u,v) \geqslant 0$; ce qui impliquera $dd^c u + dd^c v = dd^c(u+v) \geqslant dd^c \max(u,v)$. Réciproquement, si $dd^c u + dd^c v \geqslant dd^c \max(u,v)$, alors $dd^c \min(u,v) \geqslant 0$; ce qui impliquera aussi d'aprés le lemme de Weyl que $\min(u,v)$ est psh.

Corollaire 2.1. *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{C}^n$, $u, v \in \mathrm{psh}(U) \cap C(U)$ *telles que* $dd^c \max(u,v)$ *ne charge pas* $E = \{z \in U / u(z) = v(z)\}$*. Alors* $\min(u,v) \in \mathrm{psh}(U)$*.*

P r e u v e. Par hypothèse $dd^c \max(u,v) = \chi_{U \setminus E} dd^c \max(u,v)$ ($\chi_{U \setminus E}$ est la fonction caractéristique de $U \setminus E$). Mais sur $U \setminus E$, on a $dd^c \max(u,v) \leqslant dd^c u + dd^c v$. Donc $dd^c \max(u,v) \leqslant \chi_{(U-E)}(dd^c u + dd^c v) \leqslant dd^c u + dd^c v$, sur U. On déduit que $\min(u,v)$ est psh sur U.

Théorème 2.1. *Soient* u *et* $v \in \mathrm{sh}(D) \cap C(D)$*, où* D *est un domaine de* $\mathbb{R}^n$*.*
On suppose que $D \setminus E$ *est connexe* ($E = \{x \in D / u(x) = v(x)\}$)*.*
Alors, $\min(u,v)$ *est sousharmonique sur* D*.*

P r e u v e. Soit $x_0 \in E$. Montrons que x_0 est un extrêmum absolu de $(u-v)$ sur D. On a $u(x_0) = v(x_0)$, donc $(u-v)(x_0) = 0$.

Posons $w = u - v, w$ est continue sur D.

$D \setminus E = D_1 \cup D_2$ où $D_1 = \{x \in D / u(x) > v(x)\}, D_2 = \{x \in D / u(x) < v(x)\}$. D_1 et D_2 sont deux ouverts disjoints de D et $D_1 \cup D_2 = D \setminus E$.

Comme $D \setminus E$ est connexe alors $D_1 = \emptyset$ ou $D_2 = \emptyset$.

Si $D_2 = \emptyset$. Alors $w > 0$ sur $D \setminus E$ et $w = 0$ sur E.

Donc $w \geqslant 0 = w(x_0)$ sur D. Il résulte que $u - v \geqslant 0$ sur D.

Donc $\min(u,v) = v$ sur D et par suite $\min(u,v) \in \mathrm{sh}(D)$.

Corollaire 2.2. *Soient u et $v \in \operatorname{psh}(D) \cap C(D)$, D domaine dans $\mathbb{C}^n$.*
Supposons que $D \setminus E$ est connexe ($E = \{x \in D/u(x) = v(x)\}$).
Alors, $\min(u, v)$ est plurisousharmonique sur D.

P r e u v e. Evidente.

L'exemple des fonctions $u_1(z) = \log |z|$ et $v_1(z) = -\log |z|$ ($z \in \mathbb{C}^*$) suggèrent le problème suivant.

Soient $u, v \in \operatorname{psh}(D) \cap C(D)$, D ouvert de $\mathbb{C}^n$.

Si $E^\circ = \emptyset$ ($E = \{z \in D/u(z) = v(z)\}$) et si $D \setminus E$ n'est pas connexe, trouvez des conditions suffisantes pour que $\min(u, v)$ soit psh dans D?

Pour la réponse à ce problème, sous une condition raisonable, il faudrait montrer qu'il est même possible de controler la croissance de $\min(u, v)$ en fonction de celles de u et v.

Maintenant on introduit les espaces fonctionnels de Lipschitz et de Zygmund.

3. Les espaces $\Lambda_\alpha(U)$ et $Z_\alpha(U)$

Un important article relatif à ce sujet étant celui de Krantz [18]. Confère aussi Abidi [1].

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n, n \geqslant 1$ et $f\colon U \to \mathbb{C}$.

Définition 3.1. (a) Soit $\alpha \in \,]0, 1[$. On dira que $f \in \Lambda_\alpha(U)$ (espace de Lipschitz d'indice α) si $\|f\|_{\Lambda_\alpha(U)} = \|f\|_{L^\infty(U)} + \sup\limits_{x,(x+h)\in U} |f(x+h) - f(x)|/\|h\|^\alpha < +\infty$. On notera que f est alors continue sur U.

(b) Soit $\beta \in \,]0, 1]$. $f \in \operatorname{Lip}_\beta(U)$ si $\sup\limits_{x,(x+h)\in U} |f(x+h) - f(x)|/\|h\|^\beta < +\infty$.

On a une différence claire entre $\Lambda_\alpha(U)$ et $\operatorname{Lip}_\beta(U)$.

Définition 3.2. (a) $f \in \Lambda_1(U)$ si

$$\|f\|_{\Lambda_1(U)} = \|f\|_{L^\infty(U)} + \sup_{x,(x\pm h)\in U} \left| \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{\|h\|} \right| < +\infty$$

et si f est continue.

(b) Soient $k \in \mathbb{N}^\star$ et $\alpha \in \,]k, k+1[$. $f \in \Lambda_\alpha(U)$ si $f \in C^k(U)$ et si $\|f\|_{\Lambda_\alpha} = \|f\|_{\Lambda_{(\alpha-1)}} + \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \|\partial f/\partial x_j\|_{\Lambda_{(\alpha-1)}} < +\infty$.

On notera que si $\alpha \leqslant \beta$ alors $\Lambda_\beta(U) \subset \Lambda_\alpha(U)$.

L'enoncé suivant est établi dans l'article de Krantz ([18]). Soit D un domaine borné à frontière de classe C^2 dans $\mathbb{R}^n$. Soient $\alpha \in \,]0, k[$, $k \in \mathbb{N}$ et $f \in C^k(D)$. S'il existe une constante $c > 0$ avec $\|\nabla^k f(x)\| \leqslant c[\delta_D(x)]^{\alpha-k}$, $\forall x \in D$ ($\nabla^k f(x) =$

$\nabla^{k-1}(\nabla f)(x); \nabla(f) = \mathrm{grad}(f)$ étant le gradiant de f et $\delta_D(x) = d(x, D^c)$), alors $f \in \Lambda_\alpha(D)$.

On peut prolonger aux sous-ensembles fermés la définition des espaces de Lipschitz, de la façon suivante.

Définition 3.3. Soient E un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in]k, k+1[$, $k \in \mathbb{N}^*$, $f\colon E \to \mathbb{R}$ bornée. $f \in \Lambda_\alpha(E)$ s'il existe des fonctions bornées $f_\gamma\colon E \to \mathbb{R}$ (pour tout multi-indice γ de longueur $|\gamma|$ inférieur à k) vérifiant (1)$f_0 = f$, (2) $f_\gamma(x) = \sum\limits_{|\gamma+\delta|\leqslant k} f_{\gamma+\delta}(y)(x-y)^\delta/\delta!\ + R_\gamma(x,y)$ avec $|R_\gamma(x,y)| \leqslant c\|x-y\|^{\alpha-|\gamma|}$, $\forall x, y \in E$, $c = c(f)$ ne dépend que de f et α.

Si $f \in \Lambda_\alpha(U)$, $\alpha \in [k, k+1[$ et $E = \overline{U}$ alors f se prolonge en une fonction $\tilde{f} \in \Lambda_\alpha(E)$ avec $\|\tilde{f}\|_{\Lambda_\alpha(E)} \leqslant \|f\|_{\Lambda_\alpha(U)}$.

Les espaces de Lipschitz d'indice α ont des propriétés remarquables, à savoir *une propriété d'extension*. Soient $\alpha \in]0, k[$ et $f \in \Lambda_\alpha(\overline{D})$, D étant un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière de classe C^k. Alors, il existe $\tilde{f} \in \Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$ avec $\tilde{f} = f$ sur D et $\|\tilde{f}\|_{\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|f\|_{\Lambda_\alpha(\overline{D})}$, c est une constante indépendante de f. Aussi la *caractérisation suivante.*

Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction bornée continue sur $\mathbb{R}^n$. $f \in \Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$ pour $\alpha \in]0, k[(k \in \mathbb{N})$ si et seulement si, il existe $c > 0$ avec $|\Delta_h^k f(x)| \leqslant c\|h\|^\alpha$, $\forall x, h \in \mathbb{R}^n$ et $\Delta_h^k f(x)$ est la k-différence symétrique classique définie comme suit. $\Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x-h)$; $\Delta_h^2 f(x) = f(x+2h) + f(x-2h) - 2f(x)$ et ainsi de suite. Il résulte que si $f \in \Lambda_\alpha(D)$, D domaine borné à frontière de classe C^k(par exemple une boule ouverte) et si $0 < \alpha < k$, alors $|\Delta_h^k f(x)| \leqslant c\|h\|^\alpha$, $\forall x$, $(x \pm h) \in D$. (En effet il existe $\tilde{f} \in \Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$ avec $\tilde{f} = f$ sur D et $|\Delta_h^k f(x)| = |\Delta_h^k \tilde{f}(x)| \leqslant c\|h\|^\alpha$ si $x, (x \pm h) \in D$ $(D \subset \overline{D})$).

Notons que si $|f(x+h) - f(x-h)| \leqslant c\|h\|^\alpha$ pour $0 < \alpha < 1$, lorsque $(x \pm h) \in D$, alors ($\forall x, (x+h) \in D$, il vient que $|f(x+h) - f(x)| = |f(x+\frac{1}{2}h+\frac{1}{2}h) - f(x+\frac{1}{2}h-\frac{1}{2}h)| \leqslant c\|h\|^\alpha/2^\alpha$) de sorte que f est α-höldérienne sur D.

Nous définissons maintenant les espaces de Zygmund d'indice α.

Definition 3.4. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, E un sous-ensemble fermé de U et $\alpha > 0$.

(1) $u\colon U \to \mathbb{R}$ appartient à $Z_\alpha(U)$ si u est continue et $|\Delta_h^2 u(x)| \leqslant c\|h\|^\alpha$, $\forall x$, $(x \pm h) \in U$ avec $c > 0$ (c ne dépend pas de x).

(2) $u \in Z_\alpha^{\mathrm{loc}}(U)$ si pour tout $x_0 \in U$, il existe un ouvert $U_0 \subset U$ avec $x_0 \in U_0$ et $u \in Z_\alpha(U_0)$.

(3) Soit $u\colon U \setminus E \to \mathbb{R}$ continue. $u \in Z_\alpha^{\mathrm{loc}}(U, E)$ si pour tout $x_0 \in U$, il existe un ouvert U_0 inclus dans U avec $x_0 \in U_0$ et $u \in Z_\alpha(U_0 \setminus E)$.

Notons que les espaces de Lipschitz et de Zygmund sont en relation. On a en particulier le résultat suivant.

Proposition 3.1. *Soient $\alpha \in \,]0,2[$ et $u\colon \overline{D} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée (D ouvert de $\mathbb{R}^n$). Alors on a les assertions suivantes.*

(1) *Si $D = \mathbb{R}^n$; $u \in Z_\alpha(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $u \in \Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$.*

(2) *Si D est borné à frontière de classe C^2 et $u \in \Lambda_\alpha(D)$ alors, $u \in Z_\alpha(D)$.*

4. Prolongement de fonctions psh

Le résultat suivant énoncé dans le cadre des fonctions hamoniques par Carleson [3], Verdera [30] et O'Farrel [20] a été étendu aux fonctions sousharmoniques et plurisousharmoniques par Abidi [1] (cf. aussi Ullrich [29]).

Théorème 4.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (respectivement de $\mathbb{C}^n$) et E un fermé dans U. Si $\alpha \in \,]0,2[$ et si $H^{n-2+\alpha}(E) = 0$ (repectivement $H^{2n-2+\alpha}(E) = 0$), alors toute $u \in \operatorname{sh}(U \setminus E) \cap Z_\alpha^{\mathrm{loc}}(U,E)$ (respectivement $u \in \operatorname{psh}(U \setminus E) \cap Z_\alpha^{\mathrm{loc}}(U,E)$), u admet un unique prolongement $\tilde{u} \in \operatorname{sh}(U) \cap Z_\alpha^{\mathrm{loc}}(U)$ (respectivement $\tilde{u} \in \operatorname{psh}(U) \cap Z_\alpha^{\mathrm{loc}}(U)$).*

Remarque 4.1. (a) Soit $\alpha = 1$, $u(z) = \log|z|$ ($z \in \mathbb{C}^*$). Notons que $u \in h(\mathbb{C}^*) \cap \Lambda_1(\mathbb{C}^*)$ mais u n'est pas constante.

(b) Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$ avec $H^\alpha(E) > 0$, $\alpha \in \,]1,2[$. Il existe une mesure positive μ à support dans E, de masse $0 < \|\mu\| < +\infty$, telle que $u(z) = \int \log|z-w| \,\mathrm{d}\mu(w) \in h(\mathbb{C} \setminus E) \cap Z_\alpha(\mathbb{C})$ d'après Abidi [1]. Notons que $u \in \operatorname{sh}(\mathbb{C})$. Soit $D = \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,R)$ avec $R > 0$ vérifiant $E \subset D(0,R)$. $u \in h(D) \cap Z_\alpha(D)$. Si $u = c$ est constante sur D, on a

$$\begin{aligned} c = \lim_{|z|\to+\infty} u(z) &= \lim_{|z|\to+\infty} \left[\int \log|z| \,\mathrm{d}\mu(w) + \int \log\left|1 - \frac{w}{z}\right| \mathrm{d}\mu(w) \right] \\ &= \lim_{|z|\to+\infty} \log|z| \int \mathrm{d}\mu(w) = +\infty; \end{aligned}$$

ce qui est impossible.

Ceci établit une différence fondamentale entre $C(D) \cap L^\infty(D) \cap Z_\alpha(D)$ et $\Lambda_\alpha(D)$.

Proposition 4.1. *Soient D un domaine de $\mathbb{R}^n$ (respectivement de $\mathbb{C}^n$) et $u, v \in C(D) \cap \operatorname{sh}(D)$ (respectivement $u, v \in C(D) \cap \operatorname{psh}(D)$) avec $\alpha \in \,]1,2[$.*

On note $E = \{z \in D / u(z) = v(z)\}$ et on suppose que

(1) *$H^{n-2+\alpha}(E) = 0$ (respectivement $H^{2n-2+\alpha}(E) = 0$).*

(2) $\min(u,v) \in Z_\alpha^{\mathrm{loc}}(D) = Z_\alpha^{\mathrm{loc}}(D \setminus E)$ (car $E^\circ = \emptyset$).

Alors, $\min(u,v)$ *est sh (respectivement psh) sur* D *et appartient à* $Z_\alpha^{\mathrm{loc}}(D)$.

Preuve. $\min(u,v)$ se prolonge en une fonction $w \in \mathrm{sh}(D) \cap Z_\alpha^{\mathrm{loc}}(D)$ qui est continue sur D; comme $E^\circ = \emptyset$ alors $\min(u,v) = w$ sur D.

Remarque 4.2. Si $u,v \in \mathrm{sh}(U) \cap C(U) \cap \Lambda_\alpha(U)$, $1 < \alpha < 2$. Alors $\min(u,v) \in Z_{(\alpha-1)}^{\mathrm{loc}}(U)$. En général, $\min(u,v) \notin Z_\alpha(U)$.

5. Caractérisation des fonctions holomorphes

Définition 5.1. Soit $u\colon \mathbb{C} \to [-\infty, +\infty[$ une fonction. On dit que u «produit» les fonctions holomorphes si pour tout domaine D de $\mathbb{C}^n$, pour toute fonction $f\colon D \to \mathbb{C}$ continue, *la condition* $u(w - f(z))$ est psh sur $D \times \mathbb{C}$ *implique* f est holomorphe sur D.

On a le résultat suivant.

Théorème 5.1. *Soit* $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorphe,* $g \neq 0$.

Alors, $\log|g|$ *produit les fonctions holomorphes si et seulement si* $g \neq \mathrm{e}^{g_1}$, $\forall g_1$ *affine sur* $\mathbb{C}$ *et holomorphe.*

Preuve. L'hypothèse $\log|g|$ produit les fonctions holomorphes implique $\log|g|$ n'est pas affine sur $\mathbb{C}$ (évident). Dans ce cas $\log|g| \neq \mathrm{Ré}(g_1)$, $\forall g_1$ affine et holomorphe sur $\mathbb{C}$. Donc $|g| \neq |\mathrm{e}^{g_1}|$ sur $\mathbb{C}$. Soit alors $|g/\mathrm{e}^{g_1}| \neq 1$ (ou encore $g/\mathrm{e}^{g_1} \neq c$, $\forall c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$). Donc $g \neq c\mathrm{e}^{g_1}$, $\forall c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$. Soit alors $g \neq \mathrm{e}^{g_2}$, $\forall g_2$ fonction holomorphe et affine sur $\mathbb{C}$.

Pour la réciproque on traite les deux étapes suivantes.

Etape 1. $h = \log|g|$ est harmonique sur $\mathbb{C}$. Montrons que $\log|g|$ n'est pas affine sur $\mathbb{C}$ pour en déduire que h produit les fonctions holomorphes (d'après Abidi [2]). Comme $\log|g| \neq \mathrm{Ré}(g_1)$, $\forall g_1$ fonction holomorphe et affine sur $\mathbb{C}$, alors $\log|g|$ n'est pas affine sur $\mathbb{C}$. D'après Abidi [2], h produit les fonctions holomorphes.

Etape 2. $u = \log|g|$ n'est pas harmonique sur $\mathbb{C}$. Il résulte que g s'annulle sur $\mathbb{C}$. On a $u \in \mathrm{sh}(\mathbb{C})$. Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue avec v est psh sur $\mathbb{C}^2$ ($v(z,w) = u(w - f(z))$ pour $(z,w) \in \mathbb{C}^2$).

Soit $\varphi, \theta \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, $\varphi \geqslant 0$, $\theta \geqslant 0$ et posons $\psi(z,w) = \varphi(z)\theta(w)$ pour $z, w \in \mathbb{C}$. Remarquons que $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{C}^2)$, $\psi \geqslant 0$.

$\forall\, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}&\int \theta(w)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\overline{z}\partial z}(z)\log|g(w-f(z))|\,\mathrm{d}m_2(z)\,\mathrm{d}m_2(w)b_1\overline{b_1}\\&\qquad+2\,\mathrm{Ré}\Big[\int \frac{\partial\theta}{\partial w}(w)\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}(z)\log|g(w-f(z))|\,\mathrm{d}m_2(z)\,\mathrm{d}m_2(w)b_2\overline{b_1}\Big]\\&\qquad+\int \varphi(z)\frac{\partial^2\theta}{\partial\overline{w}\partial w}(w)\log|g(w-f(z))|\,\mathrm{d}m_2(z)\,\mathrm{d}m_2(w)b_2\overline{b_2}\geqslant 0.\end{aligned}$$

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Montrons que f est holomorphe au voisinage de z_0.
Soit $w_0 \in \mathbb{C}$ et $(w_0 - f(z_0)) \notin E$ où $E = \{\xi \in \mathbb{C}/g(\xi) = 0\}$ (E est fermé polaire dans $\mathbb{C}$).
Fixons $r > 0$ avec $\forall w \in D(w_0, r)$, $\forall z \in D(z_0, r)$, l'expression $(w - f(z)) \notin E$.
On suppose que $\operatorname{supp}(\theta) \subset D(w_0, r)$ et $\operatorname{supp}(\varphi) \subset D(z_0, r)$.
$\forall z \in \operatorname{supp}(\varphi)$, z fixé, la fonction

$$w \in D(w_0, r) \mapsto \log|g(w - f(z))|$$

est harmonique. Donc

$$\int \varphi(z)\frac{\partial^2\theta}{\partial\overline{w}\partial w}(w)\log|g(w-f(z))|\,\mathrm{d}m_2(z)\,\mathrm{d}m_2(w) = 0.$$

Remplaçons b_1 par 1 (dans l'inégalité précédente) on a alors $\int \theta(w)(\partial^2\varphi/\partial\overline{z}\partial z)(z)\times \log|g(w-f(z))|\,\mathrm{d}m_2(z)\,\mathrm{d}m_2(w) + 2\mathrm{Ré}[\int(\partial\theta/\partial w)(w)(\partial\varphi/\partial\overline{z})(z)\log|g(w-f(z))|\times \mathrm{d}m_2(z)\,\mathrm{d}m_2(w)b_2] \geqslant 0$ ($\forall b_2 \in \mathbb{C}$). On déduit que $\int(\partial\theta/\partial w)(w)(\partial\varphi/\partial\overline{z})(z)\times \log|g(w-f(z))|\,\mathrm{d}m_2(z)\,\mathrm{d}m_2(w) = 0$.
Donc $\int(\partial\varphi/\partial\overline{z})(z)[\int(\partial\theta/\partial w)(w)\log|g(w-f(z))|\,\mathrm{d}m_2(w)]\,\mathrm{d}m_2(z) = 0$.
Considérons alors

$$\begin{aligned}&\int \frac{\partial\theta}{\partial w}(w)\log|g(w-f(z))|\,\mathrm{d}m_2(w)\\&\quad= \int \frac{\partial}{\partial w}[\theta(w)\log|g(w-f(z))|]\,\mathrm{d}m_2(w) - \int \theta(w)\frac{\partial}{\partial w}[\log|g(w-f(z))|]\,\mathrm{d}m_2(w)\\&\quad= -\int \theta(w)\frac{\partial}{\partial w}[\log|g(w-f(z))|]\,\mathrm{d}m_2(w)\ \ (\forall z \in D(z_0, r)).\end{aligned}$$

Donc $\int(\partial\varphi/\partial\overline{z})(z)[\int \theta(w)(\partial/\partial w)(\log|g(w-f(z))|)\,\mathrm{d}m_2(w)]\,\mathrm{d}m_2(z) = 0$.
Utilisons Fubini, il arrive que

$$\int \theta(w)\Big[\int \frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}(z)\frac{\partial}{\partial w}(\log|g(w-f(z))|)\,\mathrm{d}m_2(z)\Big]\,\mathrm{d}m_2(w) = 0.$$

On vérifie sans peine que

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}(z) \frac{g'(w - f(z))}{g(w - f(z))} \, \mathrm{d}m_2(z) = 0, \ \forall w \in D(w_0, r), \ \forall \varphi \in C_c^\infty(D(z_0, r), \ \varphi \geqslant 0$$

(on raisonne par l'absurde). Donc

$$z \in D(z_0, r) \mapsto \frac{g'(w - f(z))}{g(w - f(z))}$$

est holomorphe, pour tout $w \in D(w_0, r)$.

Posons $k = g'/g$ et notons que sur $\mathbb{C} \setminus E$, k est holomorphe. Alors k n'est pas constante sur l'ouvert connexe $\mathbb{C} \setminus E$. En effet, si k est constante sur $\mathbb{C} \setminus E$, on doit avoir $k(w) = g'(w)/g(w) = c$, $c \in \mathbb{C}$ $(w \in \mathbb{C} \setminus E)$. Donc $g'(w) = cg(w)$, $\forall w \in \mathbb{C} \setminus E$. $g(w) = A\mathrm{e}^{cw} = \mathrm{e}^{g_1(w)}$, $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($\forall w \in \mathbb{C}$ même). Donc g_1 est affine sur $\mathbb{C}$. Impossible d'aprés l'hypothèse.

Il résulte que k n'est pas constante sur $\mathbb{C} \setminus E$. $(z, w) \mapsto k(w - f(z))$ est holomorphe non constante sur $D(z_0, r) \times D(w_0, r)$. Donc $\exists w_1 \in D(w_0, r)$, avec $(\partial k/\partial w)(w_1 - f(z_0)) \neq 0$. k est inversible au voisinage de $(w_1 - f(z_0)) \in \mathbb{C} \setminus E$. Donc $(\partial k/\partial w)(w_1 - f(z)) \neq 0$, $\forall (z, w) \in D(z_0, t) \times D(w_0, t)$, avec $0 < t \leqslant r$.

Donc $(\partial k/\partial w)(w_1 - f(z)) \neq 0$, $\forall z \in D(z_0, t)$.

Or $z \in D(z_0, r) \mapsto k(w - f(z))$ est holomorphe, pour tout $w \in D(w_0, r)$.

De même $w \in D(w_0, r) \mapsto k(w - f(z))$ est holomorphe sur $D(w_0, r)$, pour tout $z \in D(z_0, r)$. D'aprés le théorème de Hartogs (cf. [14]),

$$(z, w) \in D(z_0, r) \times D(w_0, r) \mapsto k(w - f(z))$$

est holomorphe. Il résulte que $(w_1 - f)$ est holomorphe sur $D(z_0, t)$. Donc f est holomorphe sur $D(z_0, t)$.

Lorsque $f\colon D \to \mathbb{C}$, f continue, D domaine de $\mathbb{C}^n$, les raisonnements qu'on a fait sont locaux et en utilisant la fibration on se ramène au cas $n = 1$.

Applications. (a) Soient g_1, g_2 et $g_3\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, holomorphes, $g_1 g_2 g_3 \neq 0$. On suppose que $\log|g_1| \leqslant \log|g_2| \leqslant \log|g_3|$ sur $\mathbb{C}$. Alors $\log|g_j|$ produit les fonctions holomorphes(analytiques) si et seulement si $\log|g_k|$ aussi, $j, k \in \{1, 2, 3\}$, $j \neq k$. De plus on a la propriété suivante.

Si $[\log|g_1| + \log|g_2|]$ produit les fonctions holomorphes, alors $\log|g_1|$ ou $\log|g_2|$ produit les fonctions analytiques.

(b) D'une façon générale, pour u et $v\colon \mathbb{C} \to [0, +\infty[$ avec $\log(u)$ et $\log(v)$ produisant les fonctions analytiques, alors $\log(u + v)$ produit les fonctions analytiques. (En particulier, si $\log|g_1|$ et $\log|g_2|$ produisent les fonctions analytiques alors $\log(|g_1| + |g_2|)$ l'est aussi.)

(c) Soient g_1 et g_2 deux fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$. On suppose que $\log|g_1|$ et $\log|g_2|$ caractérisent les fonctions holomorphes. Alors $\max(\log|g_1|, \log|g_2|)$ caractérise (produit) les fonctions analytiques.

(d) Soit k une fonction analytique non constante et s'annulant sur $\mathbb{C}$. Alors pour toute $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ harmonique, la fonction $u = (\log|k| + h)$ produit les fonctions analytiques.

Problèmes ouverts. Soit $k\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ continue, $\varepsilon > 0$.

(a) Existe-t-il $l\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ continue sousharmonique qui produit les fonctions holomorphes avec $|k - l| < \varepsilon$?

On pourra en réalité étudier les différents approximations à gauche et à droite.

Lorsque k est convexe sur $\mathbb{C}$. Que se passe-t-il alors?

(b) Peut on remplacer ε par une fonction $s\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+^*$?

(c) Soit E un sous-ensemble fermé polaire dans $\mathbb{C}$. Existe t-il $l\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ continue sousharmonique qui produit les fonctions holomorphes, $|k - l| < \varepsilon$ et $k = l$ sur E?

References

[1] *J. Abidi*: Sur le prolongement des fonctions harmoniques. Manuscripta Math. *105* (2001), 471–482.
[2] *J. Abidi*: Analycité, principe du maximum et fonctions plurisousharmoniques (à paraitre).
[3] *L. Carleson*: Selected Problems on Exceptional Sets. Van Nostrand, Princeton, N.J., 1967. (Reprint: Wadswarth, Belmont, Cal., 1983).
[4] *U. Cegrell*: Removable singularities for plurisubharmonic functions and related problems. Proc. Lond. Math. Soc. *36* (1978), 310–336.
[5] *U. Cegrell*: Removable singularity sets for analytic functions having modulus with bounded Laplace mass. Proc. Amer. Math. Soc. *88* (1983), 283–286.
[6] *J. B. Conway*: Functions of One Complex Variable II. Springer, Berlin, 1995.
[7] *H. Federer*: Geometric Measure Theory. Springer, Berlin, 1969.
[8] *R. C. Gunning, H. Rossi*: Analytic Functions of Several Complex Variables. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.
[9] *R. Harvey*: Removable singularities for positive currents. Amer. J. Math. *96* (1974), 67–78.
[10] *R. Harvey, J. Polking*: Extending analytic objects. Comm. Pure Appl. Math. *28* (1975), 701–727.
[11] *W. K. Hayman, P. B. Kennedy*: Subharmonic Functions. Academic Press, 1976.
[12] *G. M. Henkin, J. Leiterer*: Theory of Functions on Complex Manifolds. Birkhäuser, Boston, Mass., 1984.
[13] *M. Hervé*: Les fonctions analytiques. Presses Universitaires de France, 1982.
[14] *L. Hörmander*: An Introduction to Complex Analysis in Several Variables. Van Nostrand, Princeton, N.J., 1966.
[15] *J. Hyvönen, J. Rühentaus*: On the extension in the Hardy classes and in the Nevanlinna class. Bull. Soc. Math. France *112* (1984), 469–480.
[16] *M. Klimek*: Pluripotential Theory. Clarendon Press, Oxford, 1991.
[17] *S. G. Krantz*: Function Theory of Several Complex Variables. Wiley, New York, 1982.

[18] *S. G. Krantz*: Lipschitz spaces, smoothness of functions, and approximation theory. Expo. Math. *3* (1983), 193–260.

[19] *P. Lelong*: Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives. Gordon and Breach, New York, 1969.

[20] *A. G. O'Farrell*: The 1-reduction for removable singularities, and the negative Hölder spaces. Pro. R. Ir. Acad. *A 88* (1988), 133–151.

[21] *E. Poletsky*: The minimum principle. Indiana Univ. Math. J. *51* (2003), 269–304.

[22] *R. M. Range*: Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables. Springer, Berlin, 1986.

[23] *T. Ransford*: Potential Theory in the Complex Plane. Cambridge University Press, 1995.

[24] *J. Riihentaus*: On the extension of separately hyperharmonic functions and H^p-functions. Michigan Math. J. *31* (1984), 99–112.

[25] *L. I. Ronkin*: Introduction to the theory of entire functions of several variables. Amer. Math. Soc., Providence, RI (1974).

[26] *W. Rudin*: Function Theory in Polydiscs. Benjamin, New York, 1969.

[27] *W. Rudin*: Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$. Springer, New York, 1980.

[28] *B. Shiffman*: On the removal of singularities of analytic sets. Michigan Math. J. *15* (1968), 111–120.

[29] *D. C. Ullrich*: Removable sets for harmonic functions. Michigan Math. J. *38* (1991), 467–473.

[30] *J. Verdera*: Approximation by solutions of elliptic equations, and Calderon-Zygmund operators. Duke Math. J. *55* (1987), 157–187.

[31] *V. S. Vladimirov*: Les fonctions de plusieurs variables complexe (et leur application à la théorie quantique des champs). Dunod, Paris, 1967.

Authors' addresses: *Jamel Abidi, Mohamed Lassad Ben Yattou*, Département de Mathématique, Faculté des Sciences de Tunis, 1060-Tunis, Tunisia, e-mail: `abidijamel1@yahoo.fr`.