Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Michal Křížek

Význam úhlových měření při poznávání vesmíru

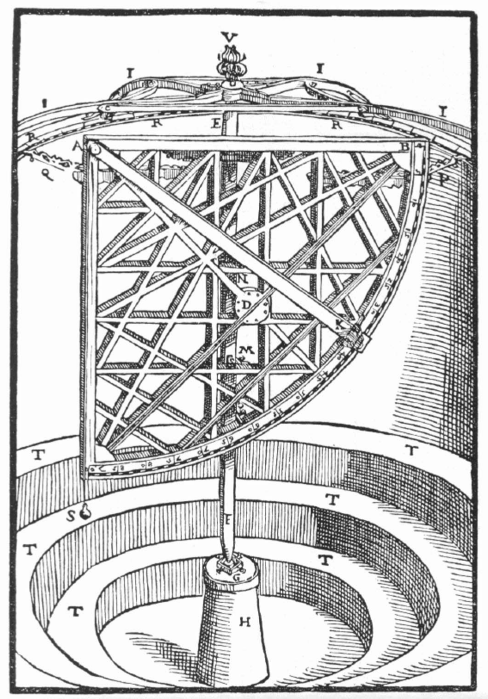
Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 51 (2006), No. 2, 147--162

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141310

Význam úhlových měření při poznávání vesmíru

Michal Křížek, Praha

Lidstvu trvalo tisíce let, než získalo soudobou představu o struktuře vesmíru a dějích, které v něm probíhají. Na deseti vybraných příkladech ukážeme, že v tomto procesu sehrály podstatnou úlohu originální geometrické úvahy a docela obyčejný a jednoduchý přístroj — úhloměr. Přesněji řečeno nejrůznější úhloměrné přístroje tak, jak se v minulosti postupně vyvíjely (srov. např. obr. 1), tedy gnómon, trikvetrum, Jakubova hůl, armilární sféra, astroláb, kvadrant, sextant, cirkumzenitál[1]) atd. S jejich popisem se lze seznámit např. v [8]. Řadu z nich používaly již starodávné civilizace pro zaznamenávání rozmanitých nebeských úkazů. Později Mikuláš Kopernik [5] pomocí úhlových měření



Obr. 1. Tychonův otočný kvadrant z roku 1586.

[1]) Fričův-Nušlův cirkumzenitál, který využívá dokonale horizontální hladiny rtuťového zrcadla, umožňuje stanovit pomocí úhlového měření výšek hvězd nad obzorem polohu pozorovatele na zemském povrchu s přesností několika metrů (což je srovnatelné s GPS).

Prof. RNDr. Michal Křížek, DrSc. (1952), Matematický ústav AV ČR, Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: `krizek@math.cas.cz`, `http://www.math.cas.cz/~krizek`

stanovil relativní vzdálenosti tehdy známých planet ve sluneční soustavě. Zední kvadrant Tychona Brahe z konce 16. století umožňoval měřit úhly s přesností kolem jedné úhlové minuty (což je na prahu rozlišovací schopnosti lidského oka) a více než o řád přesněji než ostatní tehdejší úhloměrné přístroje. Pečlivým studiem úhlových měření T. Brahe pak objevil Johannes Kepler (viz [29]) své tři slavné zákony, které dnes odvozujeme z Newtonovy mechaniky. Při prověřování platnosti Einsteinovy obecné teorie relativity pomohla v mnoha případech rovněž úhlová měření a přispěla tak při utváření moderního pohledu na vesmír.

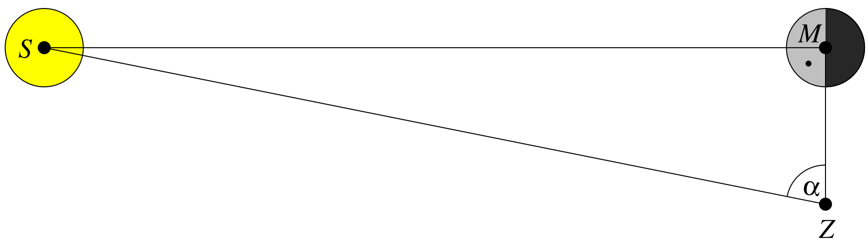
Nejběžnějším astronomickým úhloměrným přístrojem dnešní doby je dalekohled s paralaktickou montáží. Záměrný kříž se stupnicí v okuláru dalekohledu také slouží k měření velmi malých úhlů v úhlových minutách, popř. vteřinách. Hubblův kosmický teleskop má rozlišovací schopnost dokonce kolem jedné setiny úhlové vteřiny. Mezi nejpřesnější úhloměrné přístroje však patří optické a rádiové interferometry, které umožňují měřit nesmírně malé úhly — menší než $0{,}001''$.

1. Měření relativních vzdáleností ve sluneční soustavě

Řecký astronom Aristarchos ze Samu (3. stol. př. n. l.) byl patrně nejstarším známým učencem, který vyslovil názor, že planety obíhají kolem Slunce. Proto se mu připisuje, že je prvním tvůrcem heliocentrického modelu sluneční soustavy. Měl několik dalších vskutku geniálních nápadů a ukázal, že i zdánlivě obtížné kosmické problémy mohou být vyřešeny pomocí elementárních geometrických metod. Uvědomil si, že když je Měsíc v první (popř. poslední) čtvrti, úhel SMZ, kde S, M, Z označují po řadě střed Slunce, Měsíce a Země, je pravý (viz obr. 2). Pomocí jednoduchého úhloměrného přístroje pak změřil úhel SZM a zjistil, že přepona SZ pravoúhlého trojúhelníka SMZ je 19krát delší než odvěsna MZ. Jeho úvahu můžeme v dnešní symbolice zapsat takto:

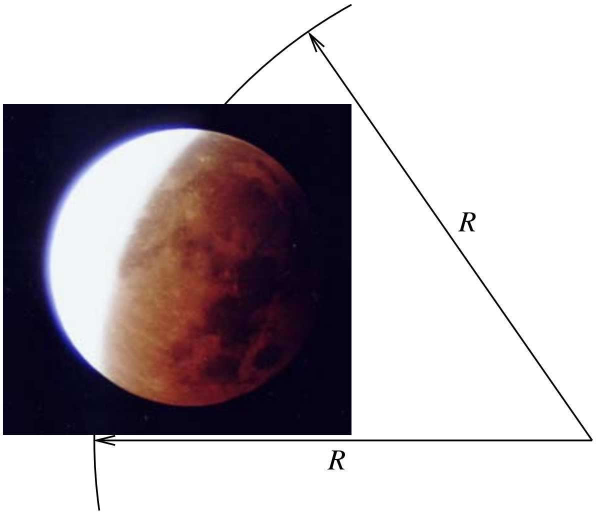
$$\cos\alpha = \frac{1}{19}\,, \tag{1}$$

kde $\alpha \doteq 87°$ je úhel SZM. Protože zdánlivý průměr Slunce a Měsíce na obloze se příliš neliší, Aristarchos usoudil, že Slunce musí být zhruba 19krát dále od Země než Měsíc.



Obr. 2. Když je Měsíc v první čtvrti, úhel SMZ je pravý (S = Slunce, M = Měsíc, Z = Země) a platí $|ZS| = |ZM|/\cos\alpha$.

Samozřejmě bylo velice obtížné stanovit přesně okamžik první čtvrti a změřit tehdejšími přístroji velikost úhlu α. Dnes víme, že Slunce je přibližně 389krát dále od Země než Měsíc, což odpovídá téměř pravému úhlu $\alpha = 89{,}8527°$. Velký rozdíl v těchto relativních vzdálenostech je způsoben skutečností, že $\cos^{-1} 87° \ll \cos^{-1} 89{,}8527°$, i když jsou příslušné úhly prakticky stejně velké (srov. obr. 2).



Obr. 3. Stín Země na Měsíci je během měsíčních zatmění vždy kruhový. Jeho poloměr R je více než třikrát větší, než je poloměr Měsíce.

Aristoteles (cca 384–322 př. n. l.) ve svém pojednání *O nebi* [2] tvrdil, že Země je koule, protože její stín viditelný na povrchu Měsíce při měsíčních zatměních je vždy kruhový (viz obr. 3). Je to zapříčiněno tím, že Měsíc vstoupí do stínu zeměkoule. Později Aristarchos změřil úhlovou velikost tohoto stínu $\approx 1{,}5°$, což je 3krát více, než činí úhlová velikost Měsíce $\approx 0{,}5°$. Vyslovil domněnku, že Země se volně vznáší v prostoru a její poloměr je 3krát větší, než je poloměr Měsíce (podle dnešních měření je to 3,67krát). Odtud vypočítal, že Měsíc je vzdálen 70 zemských poloměrů od Země, což můžeme v soudobé symbolice vyjádřit takto:

$$\operatorname{tg}(3 \times 0{,}5°) = \operatorname{tg} 1{,}5° \doteq \frac{2R}{70R}\,, \tag{2}$$

kde R je poloměr Země. Podle dnešních znalostí je Měsíc od Země vzdálen zhruba 60 zemských poloměrů.[2]) Aristarchos navíc formuloval na tehdejší dobu převratnou hypotézu, že Země obíhá kolem Slunce a nikoli obráceně. Svoje tvrzení zdůvodnil tím, že Slunce je mnohem větší než Země, protože je 19krát větší než Měsíc, zatímco Země je jen 3krát větší než Měsíc (viz obr. 2 a 3). Téměř žádný z originálních Aristarchových spisů se nezachoval (srov. [1]). O jeho metodách se však zmiňuje např. Archimedes v pojednání *O počítání písku.*

[2]) Protože úhlová velikost Měsíce je přibližně $31{,}1'$, platí $\operatorname{tg}(3{,}67 \times 31{,}1') \doteq 2R/(60R)$.

2. Stanovení absolutních vzdáleností

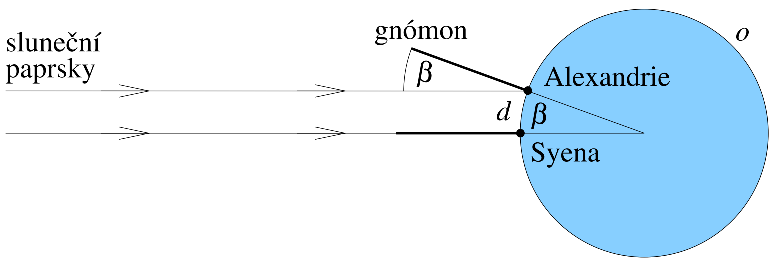
Aristarchovu koncepci určování relativních vzdáleností ve sluneční soustavě vtipně doplnil další řecký učenec Eratosthenes (cca 276–194 př. n. l.), který je známý nejen svým prvočíselným sítem, ale též prvním hodnověrným a velice důmyslným výpočtem velikosti obvodu Země (viz [7]). Z pozorování bylo známo, že polední výška Slunce pro určitý den se liší v různých zeměpisných šířkách. Eratosthenes použil nejjednodušší astronomický přístroj — gnómon,[3]) což je jen rovná tyč zaražená kolmo do země. Věděl, že se Slunce zrcadlí v hlubokých studních v Syeně (na obratníku Raka v oblasti dnešního Asuánu) v pravé poledne v době letního slunovratu. To znamená, že se Slunce nalézá v zenitu, a tudíž zde gnómon nevrhá žádný stín. Ve stejnou dobu v Alexandrii, která leží téměř na stejném poledníku jako Syena, Eratosthenes zjistil, že úhel mezi vertikálně zaraženým gnómonem a slunečními paprsky je $\beta = 7\frac{1}{5}^\circ$ (viz obr. 4), tj. $\frac{1}{50}$ plného úhlu 360°. Vzdálenost $d = 5000$ stadií $\doteq 920$ km mezi Alexandrií a Syenou byla odhadnuta jízdou na velbloudech. Pak ze vztahu

$$\frac{d}{o} = \frac{\beta}{360^\circ}$$

Eratosthenes odvodil, že obvod Země[4]) je

$$o = 250\,000 \text{ stadií } \doteq 46\,000\,\text{km}. \tag{3}$$

Není přesně známo a možná ani není tak podstatné vědět, jak velká byla ve skutečnosti řecká jednotka délky „stadion“ [σταδιον], *lat.* stadium (její hodnota patrně ležela v intervalu 148–210 m). Mnohem důležitější je nalezení elegantní metody, jak obvod Země změřit.



Obr. 4. Obvod Země o byl přibližně určen ze známé vzdálenosti d mezi Alexandrií a Syenou a úhlu β, který byl změřen v pravé poledne o letním slunovratu v Alexandrii.

Podle Aristarchových a Eratosthenových úvah (srov. (1), (2) a (3)) by tedy Země byla od Slunce vzdálena cca $19 \cdot 70 \cdot 46\,000/(2\pi)$ km, což není ani 10 milionů kilometrů.[5])

[3]) Gnómon mohl být též umístěn v duté polokouli se stupnicí, tzv. skafé.

[4]) Dnešní hodnota je $o = 40\,000$ km.

[5]) Měření velikosti sluneční soustavy starými Řeky je popsáno podrobněji např. v [10].

3. Podstatné zlepšení přesnosti vzdálenosti Země od Slunce

Odhad vzdálenosti Země od Slunce dramaticky vzrostl v roce 1672, kdy G. D. Cassini měřil vzdálenost Marsu od Země pomocí úhloměrného přístroje. V Paříži změřil polohu Marsu na nebeské sféře, když byl Mars nejblíže k Zemi, tj. v opozici se Sluncem (viz [11]). Ve stejný okamžik jeho kolega J. F. Richer ve Francouzské Guayaně rovněž měřil polohu Marsu na nebeské sféře. Z odpovídajícího paralaktického úhlu[6]) $18''$ a ze známé vzdálenosti mezi Paříží a Francouzskou Guayanou bylo pomocí standardních trigonometrických metod zjištěno, že Mars je 73 milionů km daleko od Země.[7]) Pak byl použit třetí Keplerův zákon

$$\frac{T_i^2}{T_j^2} = \frac{a_i^3}{a_j^3}, \quad i, j = 1, 2, 3, \ldots, \tag{4}$$

kde T_i je oběžná doba i-té planety a a_i délka velké poloosy její eliptické dráhy. Pro Zemi a Mars platí $T_3 = 1$ rok a $T_4 = 1{,}88$ roků. Tedy

$$a_4 = 1{,}88^{2/3} a_3. \tag{5}$$

Druhá rovnice pro neznámé a_3 a a_4 plyne ze skutečnosti, že planetární dráhy jsou téměř kruhové, a z výše uvedeného úhlového měření, tj. $a_4 - a_3 = 73 \cdot 10^6$ km. Odtud a z (5) okamžitě dostáváme, že $a_3 \doteq 140 \cdot 10^6$ km, což je dobrá aproximace dnešní hodnoty $a_3 = 149{,}6 \cdot 10^6$ km.

Velikost hlavní poloosy zemské dráhy si astronomové zvolili za základní délkovou jednotku a nazvali ji *astronomickou jednotkou.*[8]) Vzdálenosti a_i všech dalších známých planet pak byly spočteny pomocí třetího Keplerova zákona (4) a pozorovaných oběžných dob T_i.

4. Další kroky ke zvýšení přesnosti vzdálenosti Země od Slunce

Zajímavou geometrickou metodu (viz [9], [19]) ke zpřesnění hodnoty astronomické jednotky předložil známý astronom E. Halley (1656–1742). Napadlo jej využít přechodu Venuše přes sluneční disk, který je sledován ze dvou míst různé zeměpisné šířky. Halleyovu metodu použila až další generace astronomů v roce 1769.[9]) Přechod Venuše přes sluneční disk pozorovalo podle [25, s. 133] více než 120 astronomů ze 60 stanic. Například jedna skupina, vedená Maximilianem Hellem, byla na ostrově

[6]) Úhel, o který se posune těleso oproti vzdálenému pozadí, je-li pozorováno ze dvou různých míst.

[7]) Ve skutečnosti byl výsledek uveden ve francouzských mílích, 1 fr. míle je 1,949 km.

[8]) Astronomická jednotka AU = 149 597 870 km je přibližně rovna střední vzdálenosti Země od Slunce.

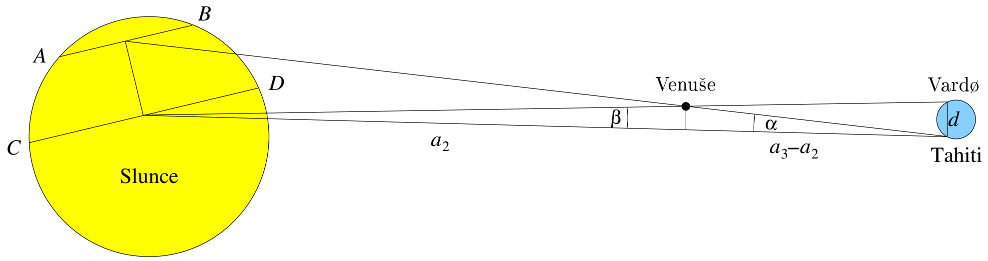
[9]) Též v r. 1761. První známá předpověď přechodu Venuše přes sluneční disk však pochází již od J. Keplera [29]. Tento velice řídký úkaz nastává jen několikrát za tisíciletí, naposledy 8. června 2004, příští přechod bude 6. června 2012.

Vardø v dnešním Norsku a jiná skupina, vedená kapitánem Jamesem Cookem a Charlesem Greenem, cestovala na Tahiti (viz [3, s. 267]). Na obr. 5 vidíme schematický náčrt trajektorií AB a CD Venuše pozorovaných z těchto dvou míst. Změřená úhlová vzdálenost mezi AB a CD byla přibližně $\alpha = 40''$. Poznamenejme, že úhlový průměr Slunce $32'$ je téměř padesátkrát větší.

Protože $T_2 = 0{,}615$ roků, dostaneme ze vztahu (4), že $a_2 = 0{,}723\,a_3$. Z obr. 5 navíc vidíme, že $a_2 \operatorname{tg} \beta = (a_3 - a_2) \operatorname{tg} \alpha$. Pro jednoduchost předpokládejme, že přímka Země–Slunce byla kolmá k úsečce Vardø–Tahiti v jistém okamžiku přechodu. Pak dostaneme

$$a_3 = \frac{d}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{a_2}{a_3 - a_2} \cdot \frac{d}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{0{,}723\,d}{(1 - 0{,}723)\operatorname{tg}\alpha},$$

kde $d = 11\,425$ km je vzdálenost mezi Vardø a Tahiti. Tímto způsobem byla zpřesněna vzdálenost a_3 mezi Zemí a Sluncem na hodnotu $153 \cdot 10^6$ km.



Obr. 5. Schematické znázornění dvou odlišných trajektorií AB a CD při přechodu Venuše přes sluneční disk, který byl pozorován z Vardø a Tahiti v roce 1769. Skutečná úhlová vzdálenost mezi AB a CD byla mnohem menší než na obrázku.

V současnosti existuje velké množství různých vylepšení popsané metody (viz [25]), která uvažují pohyb Země a Venuše během přechodu i další okolnosti.

5. Měření hustoty a hmotnosti Slunce

Velký krok k porozumění dějů ve sluneční soustavě přinesly Newtonovy zákony. Nejprve si ukažme, jak lze s jejich pomocí a úhloměrem zjistit střední hustotu Slunce. Abychom vyřešili tento zdánlivě absurdní problém, budeme pro jednoduchost předpokládat, že dráha Země kolem Slunce je kruhová (srov. vztahy (12) níže). Podle Newtonova gravitačního zákona, druhého a třetího Newtonova pohybového zákona (zákona síly a zákona akce a reakce) pak dostaneme

$$G\frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}, \tag{6}$$

kde M je hmotnost Slunce, m je hmotnost Země, r je jejich vzdálenost, v je rychlost Země a $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$ je gravitační konstanta (jejíž přibližnou hodnotu zjistil v roce 1798 H. Cavendish pomocí torzních vah a velkých olověných koulí).

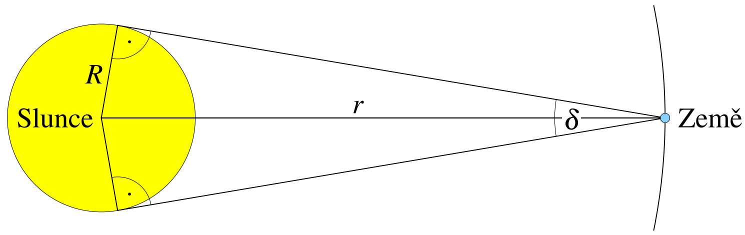
Snadno lze změřit, že úhlový průměr Slunce je zhruba $\delta = 32'$. Pak $R = r \sin \frac{1}{2}\delta$ je poloměr Slunce (viz obr. 6). Zřejmě

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \tag{7}$$

kde $T = 31\,558\,149{,}5\,\mathrm{s}$ ($= 365{,}25636$ dní) je oběžná doba Země. Označíme-li $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ objem Slunce a dosadíme-li za M ze vztahu (6), zjistíme, že střední hustota Slunce je

$$\varrho = \frac{M}{V} = \frac{v^2 r}{GV} = \frac{(2\pi r)^2 \cdot r}{T^2 G \cdot \frac{4}{3}\pi \bigl(r \sin \frac{1}{2}\delta\bigr)^3} = \frac{3\pi}{T^2 G \sin^3 \frac{1}{2}\delta} = 1409\ [\mathrm{kg/m^3}], \tag{8}$$

tj. je jen o něco vyšší než hustota vody.



Obr. 6. Střední hustotu Slunce lze určit z úhlového průměru Slunce a oběžné doby Země (viz (8)).

Celkovou hmotnost Slunce můžeme pak vypočítat takto: ze známé střední vzdálenosti $r = 149{,}6 \cdot 10^9$ m a změřeného úhlu $\delta/2$ určíme poloměr R a objem V Slunce. Ze vztahu (8) pak po dosazení dostaneme $M = \varrho V = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg.

6. Zpomalování rotace Země

Během posledních 2700 let se rotace Země zpomaluje tak, že délka dne narůstala průměrně o $1{,}7 \cdot 10^{-3}$ s za století (viz [24, s. 270]). Tato hodnota byla získána důkladnou analýzou záznamů starých Babylóňanů o úhlových výškách Slunce při pozorovaných slunečních zatměních. Pro ilustraci se omezíme jen na následující příklad.

Jedno z pozorování úplného zatmění Slunce starými Babylóňany připadá podle našeho kalendáře na 15. duben roku 136 př. n. l. (viz [26, s. 340]). V té době byl den zhruba o $\tau = 0{,}036\,414$ sekundy ($\doteq 21{,}42$ stol. $\times$ 1,7 ms/stol.) kratší než v roce 2006. Od té doby uplynulo přibližně $N = 783\,000$ dnů, během nichž došlo ke kumulativnímu efektu drobných odchylek ve zpomalování rotace Země. Proto je nyní její rotace opožděna zhruba o 4 hodiny, než kdyby Země rotovala zcela rovnoměrně. To odpovídá úhlu $60°$ ($= 360° \cdot 4/24$). Ukažme si nyní, jak lze tyto číselné údaje ověřit.

Předpokládejme pro jednoduchost, že délka i-tého dne narůstala lineárně o hodnotu

$$\Delta t_i = \tau \frac{i}{N}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

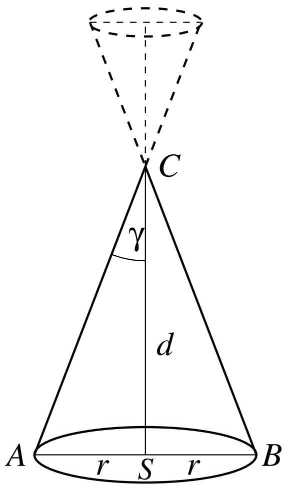
Celkový nárůst během N dní tedy činí

$$\Delta T = \sum_{i=1}^{N} \Delta t_i = \tau \, \frac{N+1}{2} = 14\,216 \text{ [s]} \doteq 4 \text{ [hodiny]}. \tag{9}$$

Hodnota τ zpomalování rotace Země byla ve skutečnosti (viz [24]) vypočítána opačným postupem. Kdyby byla zemská rotace neměnná, pak by staří Babylóňané nemohli pozorovat úplné zatmění v místě, kde jej popisují, ale o čtyři časová pásma dále na západ od Babylónu, kde bylo o 4 hodiny méně. Jejich tehdejší lokální čas můžeme nyní poměrně přesně stanovit z výšky Slunce nad obzorem, kterou staří Babylóňané při zatmění měřili úhloměrným přístrojem a pečlivě ji zaznamenávali. Z posunu $\Delta T = 4$ hodiny a známého počtu dní N můžeme zpětně vypočítat (viz (9)) odpovídající hodnotu τ, a odtud i velikost zpožďování rotace Země $\tau/21{,}42 = 1{,}7\,\mathrm{ms}$ za století. Hliněná destička starých Babylóňanů obsahující záznam o úplném slunečním zatmění ze dne 15. dubna roku 136 př. n. l. je uchována v Britském muzeu (viz [27]).

7. Paralaxa nejbližších hvězd

Oběh Země kolem Slunce způsobuje, že blízké hvězdy opisují na nebeské sféře elipsy velice malých úhlových rozměrů, které nazýváme paralakční (či paralaktické) elipsy. Jejich hlavní poloosy jsou tím větší, čím je hvězda blíže. Umožňují nám zjistit vzdálenost příslušné hvězdy. Velikost hlavní poloosy paralakční elipsy je v úhlové míře rovna tzv. roční paralaxe (její definici uvedeme dále).



Obr. 7. Vzdálenost d blízké hvězdy umístěné v bodě C lze určit z roční paralaxy γ a z poloměru r zemské dráhy. Úsečka AB je rovnoběžná s hlavní poloosou paralakční elipsy (na obr. čárkovaně).

Nechť C označuje nějakou blízkou hvězdu. Pro jednoduchost předpokládejme, že dráha Země je kruhová s poloměrem r a středem S (Slunce). Na této dráze pak existují dva protilehlé body A a B ležící v rovině procházející středem S, která je kolmá na přímku CS. Trojúhelník ABC je proto rovnoramenný se základnou AB (viz obr. 7). Vzdálenost bodu C od AB je dána vztahem

$$d = \frac{r}{\operatorname{tg}\gamma},$$

kde γ je polovina úhlu ACB a nazývá se *roční paralaxa*. Jinými slovy, γ je úhel, pod jakým by hypotetický pozorovatel v bodě C viděl poloměr r zemské dráhy.

Roční paralaxy několika blízkých hvězd poprvé změřil F. W. Bessel v roce 1838 (viz [28]). V současnosti víme, že nám nejbližší hvězda (nepočítáme-li Slunce) je Proxima Centauri. Její roční paralaxa činí 0,76″, což odpovídá vzdálenosti kolem $d = 4 \cdot 10^{13}$ km (tj. $\doteq$ 4,22 světelných let).

Nalezení paralaktických elips byl důležitý důkaz oběhu Země kolem Slunce. Hledat tyto elipsy se pokoušel už Tycho Brahe, když se snažil rozhodnout, zda je správný Ptolemaiův nebo Koperníkův model sluneční soustavy. Paralakční elipsy bohužel nenašel, protože neměl možnost změřit tak malé úhly tehdejšími přístroji. Astrometrická družice Hipparcos nedávno změřila paralaxy (a tím i vzdálenosti) více než 100 000 hvězd v naší Galaxii s téměř neuvěřitelnou přesností 0,001″.

8. Ohyb světelných paprsků v gravitačním poli

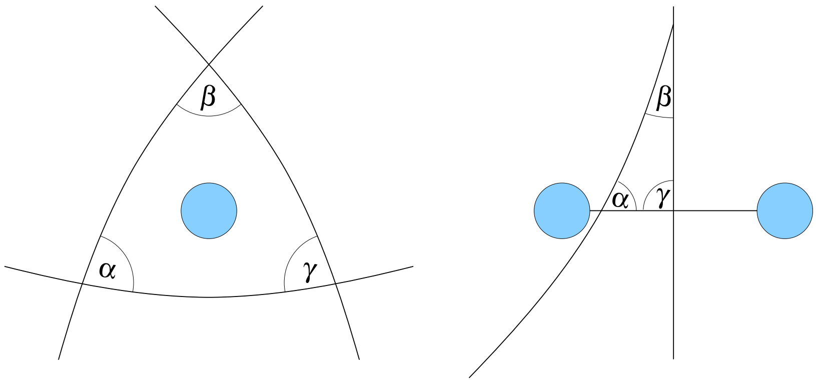
V roce 1911 A. Einstein ve své pionýrské práci [6] odvodil, že světelné paprsky se v gravitačním poli hmotného tělesa nepohybují po přímkách, ale zakřivují svou dráhu. Tento překvapivý jev byl vyfotografován během úplného slunečního zatmění v roce 1919, kdy se světelné paprsky hvězd v blízkosti slunečního disku odklonily od svého původního směru. Porovnáním tohoto snímku se snímkem stejné části noční oblohy byl zjištěn dobrý soulad s hodnotou 1,75″ předpovězenou Einsteinem. Úhlová měření tak vlastně pomohla při ověřování platnosti Einsteinovy obecné teorie relativity a přispěla i k vysvětlení známých gravitačních čoček.

Albert Einstein objevil, že každý hmotný objekt způsobuje lokální zakřivení vesmíru, a proto se dráha světla ohýbá. Přitom se ale světlo v zakřiveném prostoročasu pohybuje po nejkratších spojnicích, tzv. geodetikách. Na obr. 8 vidíme dva příklady ohybu světla v blízkém okolí hvězd. Tři trajektorie světla na obrázku 8a) tvoří křivočarý trojúhelník. Povšimněme si, že součet jeho úhlů splňuje nerovnost

$$\alpha + \beta + \gamma > 180°,$$

která připomíná známé tvrzení z Riemannovy geometrie. Naopak na obr. 8b) jsou dvě hvězdy o stejné hmotnosti a tři trajektorie, které tvoří jiný křivočarý trojúhelník se součtem úhlů $\alpha + \beta + \gamma < 180°$, což zase připomíná Lobačevského geometrii.

Předchozí dva příklady ilustrují, že vesmír lze lokálně popsat odlišnými typy geometrií s různými křivostmi. Abychom ale nalezli globální Gaussovu křivost vesmíru pro pevný čas, je třeba uvažovat velice velká měřítka, na nichž jsou veškeré lokální křivosti „zprůměrovány“. Takový model připomíná například zemský povrch, jehož globální



Obr. 8. Zakřivené trajektorie světla v blízkosti hmotných objektů ukazují, že geometrie vesmíru může být lokálně a) Riemannova i b) Lobačevského.

křivost je kladná a téměř konstantní v libovolném bodě a libovolném směru, ale jehož lokální křivost se značně mění, protože jsou zde hory, údolí, sedlové body aj. Podle Einsteinova kosmologického principu je vesmír pro pevný časový okamžik ve velice velkých měřítkách homogenní a izotropní, tj. jeho křivost je konstantní v libovolném bodu a libovolném směru. Tuto domněnku neustále prověřují astronomové. Svědčí pro ni např. homogenita a izotropie reliktního záření.[10]) Rovněž vysokoenergetické částice přicházející z kosmu[11]) i známé γ záblesky vykazují poměrně rovnoměrné rozložení na nebeské sféře. Na druhé straně je známo, že vesmír je na škálách cca 100 milionů světelných let tvořen velkorozměrovými strukturami ve formě obřích stěn a dlouhých vláken.[12]) Porovnává se proto hustota galaxií stejně vzdálených oblastí vesmíru z odlišných částí oblohy. Křivost vesmíru podstatně závisí i na tzv. temné nebaryonové hmotě, jejíž rozložení je předmětem intenzivního studia. Pokud se prokáže, že Einsteinův kosmologický princip platí na hodně velkých škálách, dostaneme značně omezující podmínky na globální topologii vesmíru (viz [15]).

9. Změření rychlosti světla

Aberací světla obecně rozumíme zdánlivou změnu polohy nějakého nebeského tělesa způsobenou pohybem pozorovatele. Hvězdy pozorované kolmo ke směru pohybu pozorovatele o rychlosti v se zdají být vychýleny o *aberační úhel* α (viz [23]), pro nějž platí $\operatorname{tg}\alpha = v/c$, kde c je rychlost světla ve vakuu. Kolem roku 1727 James Bradley objevil tzv. roční aberaci. V důsledku oběhu Země kolem Slunce hvězdy na nebeské sféře

[10]) Toto záření vykazuje jen nepatrné fluktuace velikosti řádově 10^{-4} K od své průměrné teploty 2,725 K. Družice WMAP je změřila s úhlovým rozlišením 0,3°.

[11]) Data byla získána na nově vznikající observatoři Pierra Augera v Argentině.

[12]) Nedávno bylo objeveno vlákno několika tisíc galaxií dokonce o délce 1,37 miliardy světelných let, tzv. Velká Sloanova zeď.

opisují zdánlivé elipsy, jejichž hlavní poloosy mají délku $\alpha \doteq 20''$. Tento jev pomohl výrazně zpřesnit hodnotu rychlosti světla.[13])

Pro průměrnou rychlost Země $v = 29{,}8\,\mathrm{km/s}$ (viz (7)) vychází $c \doteq 300\,000\,\mathrm{km/s}$. Úhel α je velice malý, a proto je v obloukové míře téměř roven své tangentě (s relativní chybou menší než 10^{-8}). Budeme tedy psát jen

$$\alpha = \frac{v}{c}\,. \tag{10}$$

Obrovská gravitační síla mezi Sluncem a Zemí (cca $354 \cdot 10^{20}$ N) způsobuje, že dráha Země se zakřivuje a směr jejího pohybu kolem Slunce se každý den změní zhruba o 1° ($\doteq 360°/365{,}25$ dní). Světelné fotony putují ze Slunce na Zemi přibližně 8,3 minuty. Během tohoto časového intervalu se ale Slunce přemístí vzhledem ke hvězdám o úhel

$$\alpha' \doteq \frac{8{,}3}{60 \cdot 24 \cdot 365{,}25}\,360° \doteq 20''. \tag{11}$$

Slunce tedy nevidíme v jeho skutečné poloze, ale posunuté o $\alpha' \doteq 20''$ (viz obr. 9). To, že se tento úhel pro kruhovou dráhu shoduje s výše uvedeným aberačním úhlem α, není náhoda, ale plyne z (11), (7) a (10). V čitateli vztahu (11) je totiž r/c, ve jmenovateli je T a 360° je v obloukové míře 2π. Odtud vidíme, že $\alpha' = 2\pi r/(cT) = v/c = \alpha$.

Předpokládejme nyní, že dráha Země je eliptická. V další kapitole budeme potřebovat hodnotu aberačního úhlu v perihéliu. Podle druhého Keplerova zákona průvodič Země–Slunce opisuje plochy stejného obsahu za stejné časové intervaly. Plošná rychlost průvodiče je tedy konstantní, což vede k rovnosti $\frac{1}{2}pvT = \pi ab$ (srov. [12, s. 107]), kde

$$a = 149{,}598 \cdot 10^6\,\mathrm{km}, \quad b = 149{,}577 \cdot 10^6\,\mathrm{km} \tag{12}$$

je hlavní a vedlejší poloosa zemské dráhy, $T = 31\,558\,149{,}5\,\mathrm{s}$ (= 365,25636 dní) je siderický rok, $p = 147{,}1 \cdot 10^6$ km je vzdálenost Slunce od Země v perihéliu P (tj. v bodě eliptické dráhy, který je nejblíže Slunci) a v je velikost rychlosti v P. Odtud dostaneme

$$v = \frac{2\pi ab}{pT} = 30{,}287\ [\mathrm{km/s}]. \tag{13}$$

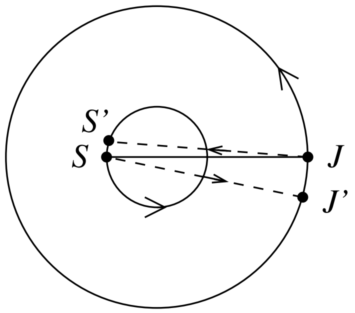
Odpovídající hodnota aberačního úhlu α v perihéliu P pak vychází $\alpha = 20{,}84''$.

10. Jak změřit rychlost šíření gravitační interakce pomocí úhloměru?

V roce 1805 Pierre Laplace usoudil na základě detailního rozboru pohybu Měsíce, že skutečná „newtonovská" rychlost šíření gravitační interakce c_g musí být alespoň

[13]) Již v roce 1675 si dánský astronom O. Rømer všiml, že měsíček Io zdánlivě obíhá Jupiter rychleji, když se Země přibližuje k Jupiteru, než když se od něj vzdaluje. Objevil tak vlastně jev, který byl později pojmenován po Dopplerovi. Na základě těchto pozorování pak odhadl, že rychlost světla je přibližně 214 000 km/s.

$7 \times 10^6\, c$ (viz [17, kap. VII, s. 642]). Nedávno van Flandern [30] ještě zvýšil tento odhad na $2 \times 10^{10}\, c$, jinak by totiž dvě tělesa nemohla obíhat kolem společného těžiště po stabilních drahách. Jejich momenty hybnosti by nebyly v rovnováze, pokud by $c_g \approx c$ (viz [13]). Jestliže např. Slunce přitahuje Jupiter směrem k okamžité poloze Slunce a naopak Jupiter přitahuje Slunce směrem k okamžité poloze Jupitera, pak jsou tyto dvě síly v rovnováze a leží v jedné přímce. Pokud však $c_g \approx c$, je Slunce S přitahováno Jupiterem směrem k předchozí poloze Jupitera J' a Jupiter J je přitahován Sluncem rovněž směrem k předchozí poloze Slunce S'. Pak ale vzniká dvojice sil (viz obr. 9), která má tendenci neustále zvyšovat moment hybnosti a energii této soustavy a prodlužovat tak oběžnou dobu kolem společného těžiště (což se nepozoruje).



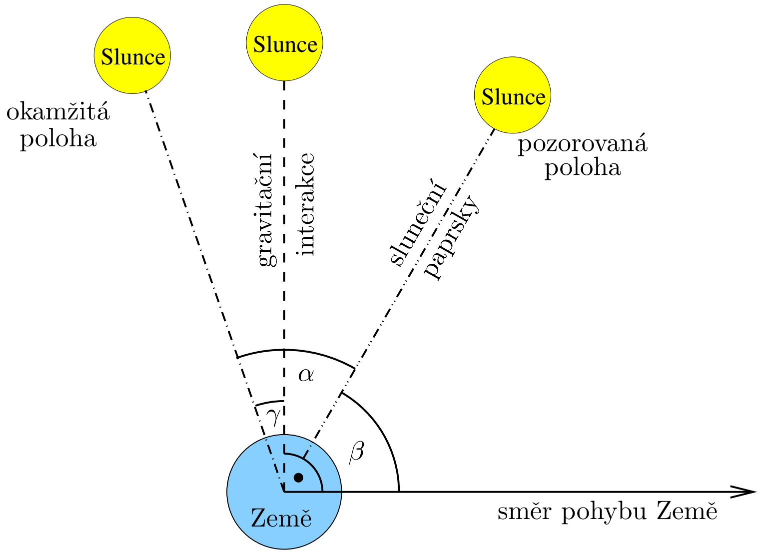
Obr. 9. Gravitační interakce mezi Sluncem a Jupiterem.

Proto také sluneční paprsky dopadající na Zemi nejsou rovnoběžné s vektorem přitažlivé gravitační síly Slunce. To má mj. za následek, že střední okamžik úplného zatmění Slunce nastává zhruba o 40 sekund dříve, než jsou gravitační síly Slunce a Měsíce v přímce (viz [30]). Jak tyto paradoxní údaje interpretovat a zjistit, zda nejsou v rozporu s obecnou teorií relativity a kauzalitou, je diskutováno v článcích [4] a [18].

V současnosti se realizuje několik nákladných projektů (GEO, LIGO, VIRGO, LISA, ...) pro změření rychlosti gravitačních vln a určení směru, odkud přicházejí. Zatím ale žádné detekovány nebyly. O gravitačních vlnách psal již Henri Poincaré. V roce 1905 předpověděl, že rychlost jejich šíření je stejná jako rychlost světla (viz [21, s. 1507]), tj. dříve než tento výsledek odvodil A. Einstein. Pokud se ale tyto rychlosti liší, pak bude dosti obtížné ztotožnit zdroj gravitačních vln (např. při výbuchu supernovy) s jejich optickým protějškem.

V této kapitole zavedeme pojem gravitační aberace. Dále popíšeme, jak lze změřením jediného úhlu ve správný časový okamžik zjistit rychlost c_g. Pro názornost se nejprve omezíme jen na měření na Zemi. Předpokládejme, že její dráha je eliptická a že vektor gravitační síly je v perihéliu P kolmý na tečnu dráhy Země (viz obr. 10). Podobně jako v (10) můžeme definovat úhel *gravitační aberace*

$$\gamma = \frac{v}{c_g}\,. \tag{14}$$



Obr. 10. Slunce na obloze nevidíme v jeho okamžité poloze, ale mírně posunuté o aberační úhel α. Rychlost c_g lze určit ze vztahů (15) a (16) pouze změřením úhlu β v okamžiku, kdy je Země v perihéliu (popř. aféliu).

Přesnější by bylo psát $\operatorname{tg}\gamma = v/c_g$, ale protože úhel γ je velice malý, je opět $\operatorname{tg}\gamma$ téměř roven γ v obloukové míře. Ze vztahů (10) a (14) dostaneme

$$c_g = \frac{\alpha c}{\gamma}\,, \tag{15}$$

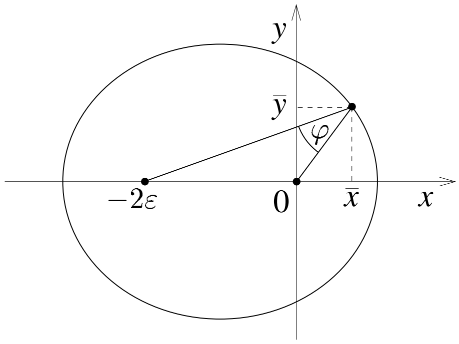
kde ovšem zatím neznáme ani γ, ani c_g. Označme proto ještě β úhel mezi světelnými paprsky přicházejícími směrem od středu Slunce ke středu Země a tečným vektorem k její dráze, když se Země nachází v perihéliu P (tj. kolem 4. ledna). Přitom tečný vektor leží na přímce spojující dva protilehlé body na ekliptice. Pak

$$\gamma = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2} \tag{16}$$

v bodě P (srov. obr. 10). Skutečnou „newtonowskou“ rychlost šíření gravitační interakce můžeme tedy dostat ze vztahu (15), kde α vypočteme ze vztahů (10) a (13), úhel gravitační aberace γ pomocí (16) a úhel β pro určení γ je nutno změřit. Pro $\gamma = 0$ vychází rychlost šíření gravitační interakce nekonečná. Tento limitní případ odpovídá klasické Newtonově teorii.

Nevýhodou pozemských měření je skutečnost, že pohyb Země ovlivňuje také Měsíc. Proto by bylo mnohem vhodnější změřit úhel β na družici obíhající kolem Slunce. Pokud bude její dráha kruhová, lze vztahy (15) a (16) použít v kterémkoliv okamžiku.

Předpokládejme nyní, že dráha družice je eliptická. Položme si otázku, jak přesně je třeba určit okamžik průchodu družice perihéliem, abychom mohli určit gravitační aberaci γ s chybou menší než daný úhel, např. $1''$. Nechť je Slunce umístěno v počátku souřadnic a nechť druhé ohnisko je v bodě $(-2\varepsilon, 0)$, kde $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}$ a $a > b$. Označme



Obr. 11. Průvodiče družice svírají úhel φ.

$(\overline{x}, \overline{y})$ souřadnice družice (viz obr. 11) a nechť k_1 a k_2 jsou směrnice jejích dvou průvodičů. Dosadíme-li $\overline{y} = k_1\overline{x}$ do rovnice elipsy $b^2(\overline{x} - \varepsilon)^2 + a^2\overline{y}^2 = a^2b^2$, získáme kvadratickou rovnici pro $\overline{x} > 0$. Směrnici druhého průvodiče lze pak vyjádřit vztahem (viz obr. 11)

$$k_2 = \frac{k_1\overline{x}}{\overline{x} + 2\varepsilon}\,. \tag{17}$$

Pro úhel φ mezi oběma průvodiči družice platí (viz [22, s. 171])

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|, \quad k_1k_2 \neq -1,$$

kde po dosazení za k_2 ze vztahu (17) získáme vyjádření úhlu φ jako funkci jen jedné směrnice k_1. Podle [22, s. 115] normála v bodě $(\overline{x}, \overline{y})$ půlí úhel φ. Odtud již můžeme vypočítat, jak se liší směr normály od směrnice k_1. Jsou-li poloosy elipsy dány např. vztahem (12), pak $\frac{1}{2}\varphi$ bude menší než $1''$ pro $|k_1| < 0{,}0006$, což odpovídá poměrně dlouhému časovému intervalu ± 50 minut.

Dráhu družice gravitačně ovlivňují kromě Země i další planety. Nejvíce Jupiter, který při svém nejbližším přiblížení k zemské dráze dané parametry (12) ovšem působí zhruba 16 000krát menší silou než Slunce. Bohužel jen těžko lze vzít v úvahu i nejrůznější negravitační síly, i když mají jen nepatrný vliv na měření, jako je sluneční vítr, Jarkovského jev, kolize s meziplanetárním prachem a meteoroidy, přítomnost magnetických polí aj.

Závěr

Připomeňme ve stručnosti ještě několik dalších příkladů zajímavého a užitečného použití úhloměrných přístrojů. Tisíciletou tradici má například používání slunečních hodin ve starověké Číně, Mezopotámii a Řecku, které se rozšířilo po celé Evropě. Měření času se na nich převádí na měření úhlů stínů vržených kamenným monolitem nebo tyčí. V roce 545 př. n. l. Anaximandros určil úhel mezi rovinou zemského rovníku a rovinou ekliptiky tak, že změřil polední výšky Slunce při letním a zimním slunovratu a jejich rozdíl vydělil dvěma.

Mikuláš Kopernik stanovil relativní vzdálenosti všech do té doby známých planet od Slunce. Např. zjistil, že poloměr dráhy Venuše je přibližně 72 % poloměru dráhy Země, tím, že změřil maximální úhlovou vzdálenost Venuše od Slunce (viz [25, s. 39 a 44]). Vzdálenosti a_1 a a_2 obou vnitřních planet byly odhadnuty pomocí vztahu $a_i = a_3 \sin \alpha_i$, kde α_i je největší elongace, tj. největší možná úhlová vzdálenost mezi Sluncem a planetou na nebeské sféře (což pro Merkur je přibližně 28° a 47° pro Venuši). Kopernikova metoda měření relativních vzdáleností vnějších planet od Slunce je popsána např. v [3, s. 264] nebo v překladu [5].

Pomocí úhlových měření byly také zjištěny nepravidelnosti v oběhu planety Uran, na jejichž základě J. G. Galle v roce 1846 objevil Neptun. Později bylo podobně nalezeno i Pluto. Pomocí úhloměrného přístroje byla též objevena a změřena precese a nutace zemské osy. Měřením úhlů ve vytyčené triangulaci se zpřesňovala hodnota obvodu Země (viz [3]).

V roce 1844 Bessel pomocí úhlových měření zjistil, že dráhu nejjasnější hvězdy noční oblohy — Siria (α CMa) ovlivňuje jakýsi neviditelný průvodce. Až po Besselově smrti jej zpozoroval A. G. Clark a bylo vypočteno, že nově objevené těleso má přibližně hmotnost Slunce. Tehdy nikoho nepřekvapilo, že jeho absolutní svítivost je asi o pět řádů nižší. V roce 1914 W. Adams prokázal, že Sirius B, jak bylo těleso nazváno, je bílý trpaslík s neuvěřitelnou hustotou několika set kilogramů na krychlový centimetr. Přesná úhlová měření tak vlastně pomohla k objevu prvního bílého trpaslíka. V roce 1924 u něj navíc Adams zjistil červený gravitační posuv spektrálních čar, který předpověděl A. Einstein u všech hmotných objektů.

Úhloměrné přístroje sehrály důležitou roli i u dalších efektů Einstenovy obecné teorie relativity, např. při měření stáčení perihélia Merkuru nebo při stáčení osy gyroskopu pohybujícího se v zakřiveném prostoročasu (viz [16]). V [12] je ukázáno, jak lze pomocí úhlových měření zjistit hmotnost černé díry uprostřed naší Galaxie. V [14] uvádíme, jak interpretovat úhlová měření, která zdánlivě vedou k pozorování nadsvětelných rychlostí ve vzdáleném vesmíru.

Poděkování. Autor děkuje H. Holovské, V. Pravdovi, M. Šolcovi a J. Vondrákovi za velice cenné připomínky. Práce na tomto článku byla podpořena projektem MŠMT č. 1P05ME749 a výzkumným záměrem AV0Z 101 90503.

L i t e r a t u r a

[1] Aristarchus of Samos: *Peri megethón kaí apostemáton helión kaí selénes.* Translated from ancient Greek to Latin by F. Commandino in 1572.

[2] Aristote: *Du ciel.* 350 BC, text établi et traduit par P. Moraux, Les Belles Lettres, Paris 1965.

[3] Belet, M., Belet, A.: *Look at the stars and become a geometer* In *History of Mathematics: Histories of Problems*, Ellipses, Paris 1997, s. 255–283.

[4] Carlip, S.: *Aberration and the speed of gravity.* Phys. Lett. *A 267* (2000), 81–87.

[5] Copernicus, N.: *Complete works, vol. II, On the revolutions.* Polish Sci. Publishers, Warsaw–Kraków 1978.

[6] Einstein, A.: *Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes.* Ann. d. Phys. *35* (1911), 898–908.

[7] Goldstein, B. R.: *Eratosthenes on the "Measurement" of the Earth.* Historia Math. *11* (1984), 411–416.
[8] Grygar, J., Horský, Z., Mayer, P.: *Vesmír.* Mladá fronta, Praha 1979, 1983.
[9] Halley, E.: *Methodus singularis qua Solis Parallaxis sive distantia a Terra, ope Veneris intra Solem conspicienda, tuto determinari poterit.* Trans. Roy. Soc. London (1716), 454–564.
[10] Impey, C., Hartmann, W. K.: *The universe revealed.* Brooks-Cole 2000.
[11] Kippenhahn, R.: *Odhalená tajemství Slunce.* Mladá fronta, Praha 1999.
[12] Křížek, F., Křížek, M., Šolc, J.: *Jakou hmotnost má černá díra uprostřed naší Galaxie?* PMFA *49* (2004), 104–113.
[13] Křížek, M.: *Numerical experience with the finite speed of gravitational interaction.* Math. Comput. Simulation *50* (1999), 237–245.
[14] Křížek, M.: *Proč ve vesmíru pozorujeme zdánlivě nadsvětelné rychlosti?* PMFA *44* (1999), 218–226.
[15] Křížek, M., Pradlová, J.: *On the nonexistence of a Lobachevsky geometry model of an isotropic and homogeneous universe.* Math. Comput. Simulation *61* (2003), 525–535.
[16] Kulhánek, P.: *Gravity Probe B — ověřování základních principů Einsteinovy obecné teorie relativity.* PMFA *49* (2004), 226–233.
[17] Laplace, P. S.: *A treatise in celestial machanics, vol. IV, book X.* (Přeložil N. Bowditch.) Chelsea, New York 1966.
[18] Marsh, G. E., Nissim-Sabat, Ch.: *Comment on "The speed of gravity".* Phys. Lett. *A 262* (1999), 257–260.
[19] Maor, E.: *Venus in transit.* Princeton Univ. Press, Princeton 2000.
[20] Mirabel, I. F., Rodríguez, L. F.: *Microquasars in our Galaxy.* Nature *392* (1998), 673–676.
[21] Poincaré, H.: *Sur la dynamique de l'électron.* C. R. Acad. Sci. Paris *140* (1905), 1504 až 1508.
[22] Rektorys, K.: *Přehled užité matematiky I.* Prometheus, Praha 1995.
[23] Ron, C., Vondrák J.: *Expansion of annual aberration into trigonometric series.* Bull. Astron. Inst. Czechosl. *37* (1986), 96–103.
[24] Said, S. S., Stephenson, F. R.: *Solar and lunar eclipse measurements by medieval Muslim astronomers.* J. Hist. Astronom. *27* (1996), 259–273.
[25] Sellers, D.: *The transit of Venus: the quest to find the true distance of the Sun.* Megavelda Press 2001.
[26] Steele, J. M., Stephenson, F. R.: *The accuracy of eclipse times measured by the Babylonians.* J. Hist. Astronom. *28* (1997), 337–345.
[27] Stephenson, F. R.: *Historical eclipses and Earth's rotation.* Astronomy & Geophysics *44* (2003), 22–27.
[28] Šolc, M., Šolcová, A.: *Astronom Bessel.* Rozpravy NTM v Praze, sv. 107, Z dějin geodézie a kartografie, č. 5 (1986), 135–150.
[29] Šolcová, A.: *Johannes Kepler — zakladatel nebeské mechaniky.* Prometheus, Praha 2004.
[30] van Flandern, T.: *The speed of gravity — what the experiments say.* Phys. Lett. *A 250* (1998), 1–11.