

Michal Křížek

O geometrické interpretaci některých pojmů z teorie čísel

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 50 (2005), No. 1, 75--79

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/141255>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2005

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

# vyučování

O GEOMETRICKÉ INTERPRETACI  
NĚKTERÝCH POJMŮ  
Z TEORIE ČÍSEL

Michal Krížek, Praha

## 1. Úvod

Dobrá geometrická představivost může do značné míry usnadnit chápání rozmanitých algebraických tvrzení a vztahů, např. známých algebraických identit  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ ,  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ , Pythagorovy věty apod. Cílem tohoto článku je přiblížit geometrickou interpretaci některých základních pojmů z teorie čísel.

Nejprve se však zamysleme nad otázkou, zda nula je či není přirozené číslo. Na tento častý dotaz bohužel nelze dát jednoznačnou odpověď typu ANO/NE, neboť to, zda budeme nulu považovat za přirozené číslo či nikoliv, je věcí definice. Nulu je vhodné zahrnout do množiny přirozených čísel například při určování počtu prvků konečných množin, protože počet prvků prázdné množiny je nula.

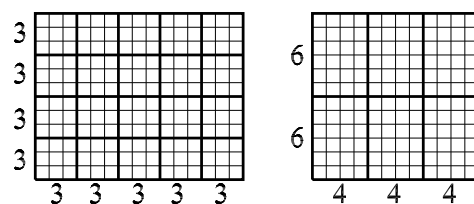
Na druhé straně existují dobré důvody, kdy naopak není výhodné nulu zahrnovat do množiny přirozených čísel. Je to například při umocňování přirozených čísel na přirozenou mocninu. Symbolu  $0^0$  totiž nelze jednoznačně přiřadit nějakou

hodnotu, která by přirozeně korespondovala s operacemi v reálném oboru. Rovněž nelze rozumně definovat nejmenší společný násobek například čísel 0 a 3. Proto se častěji nula za přirozené číslo nepovažuje. Také v tomto článku množina přirozených čísel  $\mathbb{N}$  nebude obsahovat nulu, tj. položíme

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

## 2. Nejmenší společný násobek a největší společný dělitel

Připomeňme, že *nejmenší společný násobek* čísel  $m, n \in \mathbb{N}$  je nejmenší přirozené číslo, které je dělitelné  $m$  i  $n$ . Podobně *největší společný dělitel* čísel  $m, n \in \mathbb{N}$  je největší přirozené číslo, které dělí  $m$  i  $n$ .

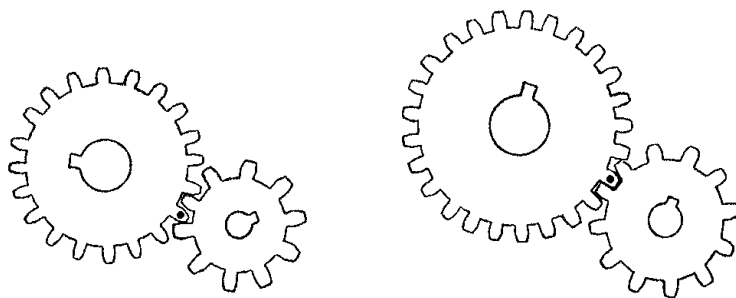


Obr. 1. Geometrická interpretace největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku. Obrázek znázorňuje, proč  $(12, 15) = 3$  a  $[6, 4] = 12$ .

Největší společný dělitel čísel  $m, n \in \mathbb{N}$  budeme označovat  $(m, n)$  a jejich nejmenší společný násobek  $[m, n]$ . Na obrázku 1 vidíme geometrickou interpretaci obou těchto pojmů. Levý obrázek ukazuje, proč je největší společný dělitel čísel  $m = 12$  a  $n = 15$  roven 3. Čtverec o délce strany  $(m, n) = 3$  je největším čtvercem, kterým lze zcela vyplnit obdélník, jehož délky stran jsou 12 a 15. Můžeme si to též

---

Prof. RNDr. MICHAL KRÍŽEK, DrSc., (1952), Matematický ústav AV ČR, Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: krizek@math.cas.cz, <http://www.math.cas.cz/~krizek>



Obr. 2. Pro počet zubů levého, resp. pravého převodu platí  $(20, 10) = 10$ , resp.  $(25, 12) = 1$ .

představit jako úlohu, v níž je zapotřebí rozstříhat čtverečkový papír o rozměrech  $12 \times 15$  na co možno největší stejně velké čtverce. Délka jejich strany je pak největším společným dělitelem.

Podobně pravá část obrázku 1 ilustruje, proč je nejmenší společný násobek čísel  $m = 6$  a  $n = 4$  roven 12. Čtverec o délce strany  $[m, n] = 12$  je tak vlastně nejmenším čtvercem, který lze vyplnit shodnými obdélníky o délkách stran 6 a 4.

### 3. Nesoudělná čísla

Čísla  $m$  a  $n$  nazveme *nesoudělná*, jestliže  $(m, n) = 1$ . Zajímavá aplikace nesoudělných čísel se uvádí v příručce [3, s. 38]. Na obrázku 2 vidíme dva převody ozubených kol. V levé části obrázku má větší kolo 20 zubů a menší 10 zubů. Bude-li jeden zub většího kola mírně poškozený (na obr. je označen tečkou), pak po každé otáčce většího kola zapadne přesně do stejné mezery menšího kola a v tomto místě se menší kolo bude velmi rychle opotřebovávat. Naproti tomu v pravé části obrázku 2 má větší kolo 25 zubů a menší 12 zubů. Protože  $(25, 12) = 1$ , bude docházet ke zcela rovnoměrnému opotřebovávání.

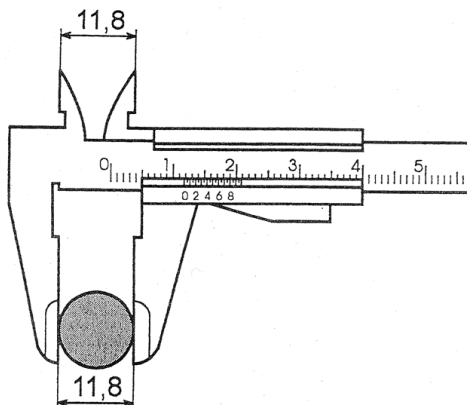
Na obrázku 3 vidíme automobilové kolo s poklicí chycenou 4 šrouby, která má 5 otvorů pro ventilek. To, že jsou čísla 4

a 5 nesoudělná, má opět jistou výhodu. Pokud se při nasazování poklice přímo netrefíme s ventilkem do příslušného otvoru, pak poklici postupně zkusíme nasadit při otočkách o  $90^\circ$ , popř.  $180^\circ$  nebo  $270^\circ$ , přičemž poloha otvorů vzhledem k ventilkem bude pokaždé jiná. To nám umožňuje v jedné z těchto poloh prostrčit ventilek otvorem skrze poklici. Můžete si vyzkoušet, že při otočení poklice o  $90^\circ$  se celá konfigurace otvorů pro ventilek zdánlivě pootočí o  $18^\circ = 90^\circ - 72^\circ = 72^\circ/4 = 360^\circ/(4 \times 5)$ . Pokud by byl počet otvorů 2, 4, 6 nebo 8 (tj. soudělný s počtem šroubů 4), pak tolik různých možností nasazení poklice nedostaneme.



Obr. 3. Pro počet šroubů a otvorů platí  $(4, 5) = 1$ .

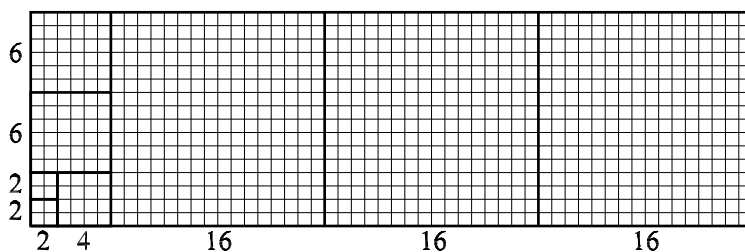
Uvedme další praktické použití nesoudělných čísel. Pevná část posuvného měřítka je vybavena milimetrovou stupnicí.



Obr. 4. Nonius na posuvném měřítku.

Na pohyblivé části k ní těsně přiléhá tzv. nonius rozdělený na 10 stejně dlouhých dílků, které mají dohromady 9 milimetrů (viz obr. 4). To, že jsou délky 9 mm a 10 mm nesoudělné, nám umožňuje zjišťovat rozměry drobných předmětů na desetiny milimetru. Při měření určujeme, kolikátý dílek nonia splýnul s některým dílkem milimetrové stupnice.<sup>1)</sup> Tolik desetín milimetru pak přičteme k naměřeným milimetrům (tj. k jejich největší celočíselné hodnotě). Kdybychom místo 9 mm zvolili délku soudělnou s 10 mm, pak by se současně krylo několik rysek a nevěděli

<sup>1)</sup> Autorem této vtipné myšlenky je portugalský královský kosmograf Pedro Nunes Salaciense (1502–1578), který ji poprvé použil pro přesná měření úhlů.



Obr. 5. Geometrické znázornění redukce při použití Eukleidova algoritmu pro výpočet  $(54, 16)$ .

bychom, který údaj platí. Také u mikrometrů bývá zařízení podobné noniu.

#### 4. Eukleidův algoritmus

Pro výpočet největšího společného dělitele  $(m, n)$  dvou velkých přirozených čísel  $m \geq n$  se s oblibou používá známý *Eukleidův algoritmus*, který lze stručně charakterizovat takto:

Jestliže  $n$  dělí  $m$ , pak  $(m, n) = n$ . V opačném případě je

$$(m, n) = (n, z),$$

kde  $z \geq 1$  je zbytek při dělení čísla  $m$  číslem  $n$ . Protože  $z < m$ , větší problém se tak převádí na menší. Další kroky algoritmu pak probíhají obdobně. Problém se redukuje na menší a menší, dokud nedostaneme zbytek 0.

Například pro  $m = 54$  a  $n = 16$  pomocí Eukleidova algoritmu dostáváme

$$(54, 16) = (16, 6) = (6, 4) = (4, 2) = 2.$$

Nyní si opět představme, že máme čtverečkovaný papír o rozměrech  $54 \times 16$  (viz obrázek 5). Z něj budeme postupně odstříhávat co možno největší čtverce, dokud to půjde, tj. v prvním kroku odstříhneme 3 čtverce o délce strany 16, v dalším kroku odstříhneme 2 čtverce o délce strany 6 atd. Délka strany čtverce, který

nám zůstane, je výsledkem Eukleidova algoritmu, tj. největším společným dělitelem čísel 54 a 16.

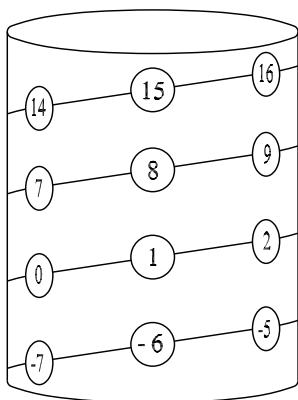
Pro výpočet nejmenšího společného násobku  $[m, n]$  je také vhodné aplikovat nejprve Eukleidův algoritmus, protože  $(m, n) \leq [m, n]$ , a pak použít vztah  $mn = (m, n)[m, n]$ .

## 5. Kongruence

V dalším textu se zmíníme o geometrické interpretaci pojmu kongruence, který zavedl C. F. Gauss. Nechť  $n, z$  jsou celá čísla a  $m \in \mathbb{N}$ . Pak říkáme, že  $n$  je kongruentní se  $z$  modulo  $m$  a píšeme

$$n \equiv z \pmod{m},$$

jestliže  $n - z$  je dělitelné  $m$ .



Obr. 6. Geometrická interpretace kongruence modulo 7.

Předpokládejme například, že  $m = 7$ . Nyní si představme, že na nekonečně dlouhý válec rovnoměrně navineme provázek, který má na sobě rovnoměrně rozložené očíslované značky, jak je znázorněno na obrázku 6. Čísla, která jsou ve svislých řadách pod sebou, jsou vzájemně kongruentní. Např.  $16 \equiv -5 \pmod{7}$ , jelikož  $16 - (-5) = 21$  je dělitelné sedmi.

Na ciferníku klasických hodin lze podobně demonstrovat kongruenci modulo 12.

## 6. Soustavy kongruencí

Staročínský matematik Sunzi Suanjing kolem 4. stol. formuloval následující úlohu (viz [1]):

*Nechť  $n$  označuje určitý počet předmětů. Počítáme-li je po trojicích, zbudou dva, počítáme-li je po pěticích, zbudou tři, a konečně počítáme-li je po sedmi, zbudou dva. Kolik je  $n$ ?*

Tuto úlohu můžeme zřejmě převést na soustavu tří kongruencí pro neznámou hodnotu  $n$ :

- (1)  $n \equiv 2 \pmod{3},$
- (2)  $n \equiv 3 \pmod{5},$
- (3)  $n \equiv 2 \pmod{7}.$

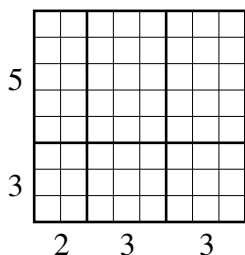
Než ukážeme, jaká je geometrická interpretace této soustavy, budeme se zabývat jednodušší úlohou:

*Před domem stojí schodiště. Jdu-li nahoru po třech schodech, zbudou mi dva. Jdu-li po pěti schodech, zbudou mi nahore tři. Kolik má schodiště schodů?*

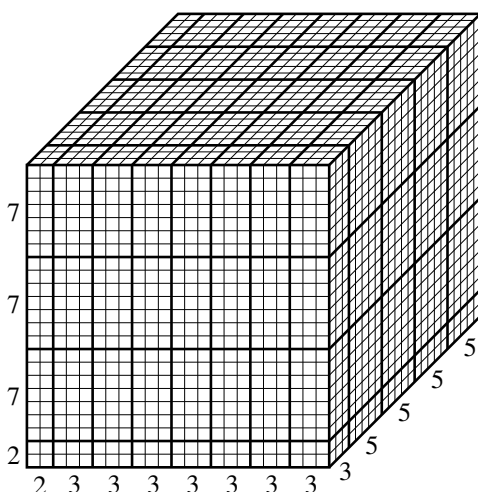
Vidíme, že tato úloha se dá napsat pomocí kongruencí (1) a (2), tj.

$$\begin{aligned} n &\equiv 2 \pmod{3}, \\ n &\equiv 3 \pmod{5}, \end{aligned}$$

kde  $n$  je počet schodů. Metoda pro nalezení řešení této soustavy (podrobnosti viz [2, s. 15]) je velice podobná Eukleidovu algoritmu, ale vysvětlovat ji zde nedáme. Lze ukázat, že všechna řešení jsou



Obr. 7. Geometrická interpretace úlohy (1)–(2).



Obr. 8. Geometrická interpretace úlohy (1)–(3).

tvaru  $n = 8 + 15k$  pro  $k$  celé (a  $k \geq 0$ , neboť schodiště nemůže mít záporný počet schodů). Na obrázku 7 je znázorněn čtverec o délce strany  $n = 8$ , která odpovídá nejmenšímu řešení pro  $k = 0$ . Vidíme, že čtverec je rozdělen na několik obdélníků. V levé dolní části je obdélník, jehož délky stran odpovídají zbytkům 2 a 3. V pravé horní části jsou dva obdélníky, jejichž délky stran odpovídají modulům 3 a 5. Rozměry zbývajících obdélníků jsou zkombinovány ze zbytků a modulů. Počty dílků vyznačené na vodorovné, resp. svislé straně čtverce jsou obsaženy v první, resp. druhé kongruenci.

Geometrické znázornění dalšího řešení  $n = 23$ , které odpovídá  $k = 1$ , lze nalézt na horní stěně krychle z obrázku 8. Celý obrázek pak ilustruje nejmenší kladné řešení  $n = 23$  soustavy kongruencí (1)–(3). Krychle o hraně délky 23 je rozdělena na množství menších kvádrů. Přední levý dolní kvádr má rozměry  $2 \times 3 \times 2$  odpovídající zbytkům soustavy (1)–(3). Zadní pravá horní část krychle je rozdělena na kvádry o rozměrech  $3 \times 5 \times 7$ , které odpovídají modulům. Rozměry zbývajících kvádrů jsou opět zkombinovány ze zbytků a modulů.

**Poděkování.** Práce vznikla za podpory grantu A 1019201 GA AV ČR.

#### L i t e r a t u r a

- [1] KRÍŽEK, M., LIU, L.: *Matematika ve starověké Číně*. PMFA 42 (1997), 223–233.
- [2] KRÍŽEK, M., LUCA, F., SOMER, L.: *17 Lectures on Fermat Numbers*. Springer, New York 2001.
- [3] SEDLÁČEK, J.: *Co víme o přirozených číslech*. ÚV MO, Mladá fronta, Praha 1977.