Michal Křížek

O jednoznačnosti a nejednoznačnosti řešení rovnic

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 49 (2004), No. 4, 317--321

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141243

[A11] Málek, J., Nečas, J., Rokyta, M., Růžička, M.: *Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDEs,* vol. 13. Applied Mathematics and Mathematical Computation. Chapman & Hall, London 1996.

[A12] Haslinger, J., Hlaváček, I., Nečas, J.: *Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics.* Handbook of Numerical Analysis *4* (1996), 313–485.

Odkazy na skripta [B∗], na Nečasovy původní vědecké práce [C∗] a další literaturu jsou uvedeny v Math. Bohem. *129* (2004), 421–446.

O jednoznačnosti a nejednoznačnosti řešení rovnic

Michal Křížek, Praha

Jedním z nejdůležitějších úkolů při vyšetřování problémů matematické fyziky je zabývat se otázkou existence a jednoznačnosti jejich řešení. K tomu je nutno nejprve přesně stanovit množinu, v níž budeme řešení hledat. Ilustrujme to nejprve na jednoduché algebraické rovnici.

Nechť $\mathbb{S}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ a $\mathbb{H}$ postupně označují množinu sudých, přirozených, celých, racionálních, reálných a komplexních čísel a množinu kvaternionů. Pro rovnici

$$x^2 + y^2 = 2$$

zřejmě neexistuje dvojice $(x, y) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S}$, která by ji splňovala. Na druhé straně na množině $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ má tato rovnice právě jedno řešení $(1, 1)$ a na množině $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ čtyři různá řešení $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ a $(-1, -1)$. Na množině $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ovšem existují ještě další [např. $(\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$, $(\frac{7}{13}, \frac{17}{13})$, $(\frac{7}{17}, \frac{23}{17})$] a je jich spočetně mnoho. Konečně na množinách $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ a $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ existuje nespočetně mnoho řešení.

Podobně je tomu při vyšetřování diferenciálních rovnic. Nejprve je třeba přesně specifikovat třídu funkcí, v níž budeme řešení hledat. Například známá Poissonova rovnice $-\Delta u = f$ s nulovými okrajovými podmínkami na ohraničené d-rozměrné oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a $f \in L^2(\Omega)$ nemusí mít klasické řešení na prostoru funkcí, které mají spojité druhé derivace na uzávěru vyšetřované oblasti. Na druhé straně podle Rieszovy věty bude existovat právě jedno (slabé) řešení v tzv. Sobolevových prostorech funkcí.[1)]

[1)] Slabé řešení $u \in V$ je definováno vztahem $(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) = (f, v)$ pro všechna $v \in V$, kde $(\cdot\,,\,\cdot)$ je L^2-skalární součin a V je Sobolevův prostor funkcí z $L^2(\Omega)$, které mají první (zobecněné) derivace také v $L^2(\Omega)$ a které jsou v jistém smyslu nulové na hranici oblasti Ω.

Prof. RNDr. Michal Křížek, DrSc., (1952), Matematický ústav AV ČR, Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: `krizek@math.cas.cz`, `http://www.math.cas.cz/~krizek`

U nelineárních diferenciálních rovnic je ale situace mnohem komplikovanější. Zde navíc nezáleží jen na tom, v jaké třídě funkcí hledáme řešení, nýbrž také na třídě, z níž vybíráme koeficienty úlohy. K tomu mám jednu osobní historku.

* * *

V roce 1991 jsem navštívil finskou univerzitu v Jyväskylä. Na chodbě jsem se dal anglicky do řeči s jedním cizincem. Společně jsme probírali rozmanité finské dojmy (přírodu, saunu, nápoje atd.). Asi po čtvrthodině jsem se jej zeptal: "Where are you from?" Odpověděl mi: "I'm from Prague." Ihned jsem odvětil: "Oh, I'm also from Prague." Další rozhovor pak již samozřejmě probíhal česky. Ukázalo se, že onen cizinec je dr. Jan Malý z MFF UK (nyní již profesor UK). Pak jsem jej pozval na svou přednášku o nelineární úloze ustáleného vedení tepla v anizotropním a nehomogenním prostředí velkých transformátorů a točivých strojů, kterou jsem kdysi numericky řešil pro ČKD Elektrotechnika a VÚSE Běchovice. Typickým anizotropním prostředím jsou např. transformátorové plechy, protože mají v podélném a příčném směru naprosto odlišné tepelné vodivosti. Navíc měření v podniku ŠKODA Plzeň potvrdila, že vodivosti v obou směrech jsou různě závislé na teplotě. Úloha byla popsána parciální diferenciální rovnicí

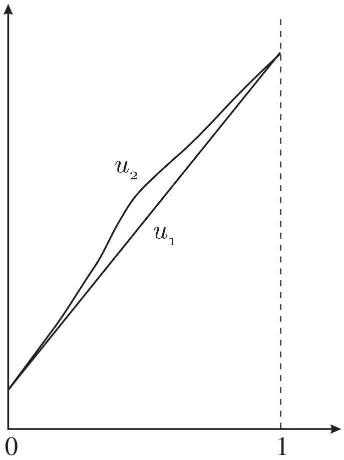
$$-\operatorname{div}\bigl(A(x,u)\operatorname{grad} u\bigr) = f \tag{1}$$

na omezené oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ s jistými okrajovými podmínkami, kde f je hustota objemových zdrojů tepla a $A = (a_{ij})_{i,j=1}^d$ je matice tepelných vodivostí, jejíž prvky jsou omezené funkce závislé jak na prostorové proměnné $x \in \Omega$, tak i na řešení u. O matici A se navíc předpokládá, že je stejnoměrně pozitivně definitní vzhledem ke všem proměnným.

Během přednášky jsem nastínil důkaz existence slabého řešení. Poté jsem přiznal, že důkaz jednoznačnosti mi není znám. Úloha totiž nemá potencionální charakter (tj. nelze ji převést na minimalizaci nějakého funkcionálu) a je nemonotónního typu. Jan Malý mi po přednášce řekl, že na jednoznačnost nevěří. Druhý den mi ukázal protipříklad na jednoznačnost pro šestidimenzionální oblast. Namítl jsem, že moje úloha je „jen“ trojrozměrná, tj. pro $d = 3$ a nikoliv pro $d = 6$. Další den mi tedy přinesl nový protipříklad na jednoznačnost, tentokrát již v $\mathbb{R}^3$, ale s velmi komplikovanými koeficienty a_{ij}. Byl jsem tím poněkud překvapen. Úlohu nelineárního vedení tepla jsem totiž řešil mnohokrát iteračně pomocí metody postupných aproximací a byl jsem pevně přesvědčen o jednoznačnosti jejího řešení. Ať jsem počáteční teplotu pro iterace zvolil jakoukoliv (např. 0 °C nebo 100 °C), vždy jsem po několika iteracích „dokonvergoval“ ke stejnému výsledku. Těsně před odjezdem z Finska mi však J. Malý předložil následující elegantní jednorozměrný příklad na nejednoznačnost řešení úlohy vedení tepla.

Nechť $d = 1$ a nechť u_1, u_2 jsou dvě hladké reálné funkce definované na uzavřeném intervalu $[0,1]$ takové, že $u_1 < u_2$ na $(0,1)$, $u_1(0) = u_2(0)$, $u_1'(0) = u_2'(0)$, $u_1(1) = u_2(1)$, $u_1'(1) = u_2'(1)$, $1 \leqq u_1' \leqq 3$ a $1 \leqq u_2' \leqq 3$ (viz obr. 1). Definujme reálnou funkci A na grafech funkcí u_1 a u_2 takto:

$$A(x,\xi) = \frac{1}{u_i'(x)} \quad \text{pro } x \in [0,1],\ \ \xi = u_i(x),\ \ i = 1,2.$$



Obr. 1

Pak podle důkazu Tietzeho věty o rozšíření (viz [6, str. 425]) existuje spojité rozšíření, které pro jednoduchost označme opět A, takové, že $A(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\colon (0,1)\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ a A je zdola i shora omezené kladnou konstantou. Vidíme tedy, že

$$-\big(A(x,u_i)u_i'\big)' = 0 \quad \text{pro} \quad i=1,2,$$

tj. u_1 a u_2 jsou řešení (1) s nehomogenními okrajovými podmínkami (Dirichletovými, Neumannovými, Newtonovými či smíšenými) a $f=0$.

Zpáteční cesta z Finska vlakem a lodí mi trvala téměř 48 hodin. Měl jsem tedy dostatek času, abych si jednorozměrný protipříklad důkladně promyslel. Během cesty se mi podařilo ukázat, že funkce A není lipschitzovská (vzhledem k druhé proměnné ξ) v těch bodech, kde grafy funkcí u_1 a u_2 bifurkují. To byla hlavní příčina nejednoznačnosti, protože tepelné vodivosti, pro které jsem počítal rozložení teploty v praktických případech, byly vždy lipschitzovské funkce. Později se nám společně s Janem Malým a kolegou Ivanem Hlaváčkem z Matematického ústavu AV ČR podařilo dokázat pro libovolnou dimenzi $d \geqq 1$ jednoznačnost řešení u za předpokladu, že koeficienty a_{ij} jsou lipschitzovské funkce vzhledem k poslední proměnné (viz [2]).

S prof. Miloslavem Feistauerem a jeho bývalou aspirantkou dr. Veronikou Sobotíkovou jsme se pak také zabývali tzv. *variačními zločiny* (tj. numerickou integrací a aproximací křivočaré hranice) při řešení výše uvedené nelineární úlohy vedení tepla pomocí metody konečných prvků (viz [1]). Jednoznačnost diskrétního (numerického) řešení pro nás dodnes zůstává otevřeným problémem.

* * *

Ve stejném roce 1991 jsem byl pozván do Banachova centra ve Varšavě. Ve své přednášce jsem se mj. zmínil o jisté metodě, jak řešit Neumannovu úlohu pro Poissonovu rovnici, tj.

$$-\Delta u = f \quad \text{v } \Omega, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \tag{3}$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$, n je vnější (jednotková) normála k $\partial\Omega$, Δ je Laplaceův operátor a $f \in L^2(\Omega)$ splňuje podmínku $\int_\Omega f \,\mathrm{d}x = 0$.

Nejednoznačnost řešení této úlohy je zřejmá. Jestliže u je řešení (ať už klasické či slabé), pak $u +$ konstanta je také řešení. Hlavní důvod nejednoznačnosti je ten, že odpovídající bilineární forma

$$a(v,w) = \int_\Omega \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} w \,\mathrm{d}x, \quad v,w \in V,$$

není V-eliptická, kde V je Sobolevův prostor $W_2^1(\Omega)$ funkcí, jejichž první zobecněné derivace jsou z $L^2(\Omega)$. Proto se (slabé) řešení u většinou hledá na podprostoru funkcí

$$V_0 = \left\{ v \in V \colon \int_\Omega v \,\mathrm{d}x = 0 \right\}$$

tak, aby $a(u,v) = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x$ pro všechna $v \in V_0$. Nevýhodou takového přístupu ale je, že se při numerické aproximaci této úlohy velice obtížně splňuje podmínka $\int_\Omega v \,\mathrm{d}x = 0$.

Navrhl jsem tedy použít modifikovanou bilineární formu

$$\tilde{a}(v,w) = a(v,w) + \int_\Omega v \,\mathrm{d}x \int_\Omega w \,\mathrm{d}x, \quad v,w \in V,$$

a řešit problém: Najít $u \in V$ tak, že

$$\tilde{a}(u,v) = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x \quad \forall v \in V. \tag{4}$$

Jeho hlavní předností je, že v prostoru funkcí V nejsou žádné ohraničující globální podmínky jako v prostoru V_0.

Během své přednášky jsem poznamenal, že problém (4) má právě jediné řešení a že toto řešení je zároveň slabým řešením původního Neumannova problému (2)–(3). Nato se přihlásil profesor V. G. Litvinov z Kijeva, že tomu nevěří a že se takto Neumannův problém přece řešit nedá. Odpověděl jsem mu, že to umím dokázat (viz [4, str. 16]), ale prof. Litvinov nedůvěřivě zakroutil hlavou a zeptal se: „А вы читали книгу Михлина?“ Po pravdě jsem netakticky odvětil: „Нет.“ Pan profesor pak důrazně prohlásil: „Во-первых, прочитайте и потом говорите.“ Přestože jsem si byl svým výsledkem zcela jist, neměl jsem z této diskuse dobrý pocit. Večer jsem pak poprosil prof. Litvinova, aby se mnou důkaz celého tvrzení podrobně prošel. Moc se mu do toho nechtělo a musel jsem jej dlouho přemlouvat. Nakonec však souhlasil. Asi po hodině vzájemného vysvětlování profesor Litvinov poznal, že se mýlil. Poté povstal, podal mi ruku a pravil: „Интересно!“ Pak navrhl, abychom tuto metodu společně zobecnili na systémy rovnic, do komplexního oboru, na případ, kdy prostor V_0 obsahuje více ohraničení atp. Druhý den ráno se mi hned v úvodu přednášek veřejně omluvil za výstup z minulého dne. Později jsme společně napsali článek [3], který již popsanou metodu zobecňoval několika směry.

* * *

Na závěr bych rád připojil ještě několik poznámek. Jednoduchý příklad na nejednoznačnost z obr. 1 by nás měl nabádat k maximální opatrnosti při řešení nelineárních úloh. Jiný příklad na nejednoznačnost okrajové úlohy s kvazilineární eliptickou rovnicí, která není v divergentním tvaru, lze nalézt např. v [5].

Existují diferenciální rovnice, které mají více řešení, ale třeba jen jedno z nich má dobrý fyzikální smysl. Jednoznačnost takového řešení se pak v matematickém modelu zaručuje dodatečnými podmínkami. Víceznačnost řešení není nic neobvyklého. Například v Bernoulliově-Navierově modelu průhybu prutu délky ℓ zatíženého zadanou podélnou silou P se prut může „vyboulit" na obě strany nebo zůstat přímý při stejných okrajových podmínkách a stejném zatížení. Úloha je popsána rovnicí $-EJu'' = Pu$ s okrajovými podmínkami $u(0) = u(\ell) = 0$, kde E je Youngův modul pružnosti a J je moment setrvačnosti. Připomíná to úlohu na vlastní čísla a odtud pramení nejednoznačnost řešení při dostatečně velkém $P > 0$.

Složitější případ nejednoznačnosti představuje tyristor (tj. řízený polovodičový usměrňovač), který při určitém neměnném rozložení elektrického napětí na vývodech může být v několika různých vnitřních stavech. Příslušné rovnice modelující tento stacionární jev tvoří soustavu tří nelineárních parciálních diferenciálních rovnic eliptického typu.

V trojrozměrném prostoru dodnes není uspokojivě vyřešena otázka jednoznačnosti řešení známých Navierových-Stokesových rovnic, jež modelují proudění. Rovněž nevíme, zda Einsteinovy rovnice obecné relativity popisující gravitační potenciály mají jediné řešení pro dané počáteční a okrajové podmínky. Jde o soustavu deseti nelineárních parciálních diferenciálních rovnic hyperbolického typu definovaných ve čtyřrozměrném prostoročasu.

Literatura

[1] Feistauer, M., Křížek, M., Sobotíková, V.: *An analysis of finite element variational crimes for a nonlinear elliptic problem of a nonmonotone type.* East-West J. Numer. Math. *1* (1993), 267–285.

[2] Hlaváček, I., Křížek, M., Malý, J.: *On Galerkin approximations of a quasilinear nonpotential elliptic problem of a nonmonotone type.* J. Math. Anal. Appl. *184* (1994), 168–189.

[3] Křížek, M., Litvinov, V. G.: *On the methods of penalty functions and Lagrange's multipliers in the abstract Neumann problem.* Z. Angew. Math. Mech. *74* (1994), 216–218.

[4] Křížek, M., Neittaanmäki, P.: *Finite element approximation of variational problems and applications.* Longman Scientific & Technical, Harlow 1990.

[5] Meyers, N. G.: *An example of non-uniqueness in the theory of quasi-linear elliptic equations of second order.* Arch. Rational Mech. Anal. *14* (1963), 177–179.

[6] Rudin, W.: *Analýza v reálném a komplexním oboru.* Academia, Praha 1977.