

Paul Adrien Maurice Dirac
Relativistická vlnová rovnice elektronu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 49 (2004), No. 4, 289--299

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/141240>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2004

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Relativistická vlnová rovnice elektronu

Paul Adrien Maurice Dirac

Souhrn

Dva roky jsem se zabýval bohrovskými trajektoriemi a dospěl jsem k závěru, že vytvořit pro ně obecnou kvantovou teorii je beznadějně. Heisenberg pak vytvořil svou maticovou mechaniku a tu jsem náhle pochopil, že nekomutativní algebra je klíčem k řešení problému. Brzy potom vytvořil Schrödinger svou vlnovou mechaniku a ukázal, že je ekvivalentní Heisenbergově teorii.

Z těchto teorií jsem vyvodil obecnou teorii transformací, která umožňuje vypočítat pravděpodobnosti pro jakékoli komutující dynamické proměnné, což mě velmi potěšilo. Na vytvoření relativistické teorie částic posloužila rovnice Kleinova-Gordonova s kvadratickým členem $\partial^2/\partial t^2$. V té době s ní byla většina fyziků spokojena. Já nikoliv, protože jsem byl příliš zaujat svou transformační teorií, která vyžadovala lineární rovnici v $\partial/\partial t$. Tato nespokojenost mě vedla k tomu, abych pokračoval v hledání nové relativistické rovnice. Nakonec jsem našel rovnici lineární v $\partial/\partial t$, která byla kompatibilní s mou teorií transformací.

Z ní automaticky vyplýval spin $\frac{1}{2}\hbar$ a správná hodnota magnetického momentu elektronu, což byl výsledek, který jsem vůbec neočekával.

Přednáška

Rád bych vám vyprávěl o událostech, které se staly před 50 lety. Byla to doba velkého nadšení ve fyzice a pokusím se vám přetlumočit některé pocity, které doprovázely toto všeobecné nadšení. Rád bych vám zvláště sdělil, co bylo příčinou toho, že jsem v té době uvažoval o věcech jinak než ostatní fyzikové, a proč jsem sledoval svou vlastní cestu.

Před obdobím, o kterém chci hovořit, tj. před rokem 1920, jsme zažívali ve fyzice frustraci. Měli jsme teorii s bohrovskými trajektoriemi. Tyto orbity pracovaly dobře při řešení některých jednoduchých problémů, v podstatě v těch případech, kdy pouze jediný elektron v atomu hrál dominantní roli. Lidé se snažili rozšířit teorii tak, aby zahrnovala systémy s více elektrony, například aby umožnila vypočítat spektrum helia, které obsahuje dva elektrony, avšak nevěděli, jak to udělat. Existovaly dva základní

P. A. M. DIRAC, Florida State University, Tallahassee, Florida, USA.

Referát byl přednesen na evropské konferenci o částicové fyzice, která se konala v Budapešti ve dnech 3. až 4. července v roce 1977.

Přeložil MIROSLAV PARDY.

přístupy v aplikaci pravidel kvantování, ale nebylo známo, jak to provést. Mohli pouze postupovat tak, že dělali různé umělé předpoklady, přičemž tyto předpoklady nebyly příliš úspěšné.

Tato frustrace je něco, co může být velmi dobře pochopeno v přítomné době, protože máme podobnou situaci s relativistickou kvantovou teorií aplikovanou na částice vysokých energií. Opět máme pocit, že neznáme základní pravidla. Známe některá pravidla, jež pracují pouze omezeně úspěšně, a v podstatě jsme v podobné situaci, kdy nevíme, které jsou základní předpoklady, jichž se máme držet.

Strávil jsem tedy dva roky ve frustrační náladě a dva roky je dlouhá doba na to, abych to mohl zhodnotit. Pociťoval jsem úplnou bezmocnost situace a byl jsem zvědav, zda člověk může učinit jakýkoliv pokrok v nabytí opravdového porozumění atomové mechanice.

Pak se celá situace náhle změnila díky Heisenbergovi v roce 1925. Měl opravdu brilantní ideu. Uvedl do fyziky myšlenku nekomutativní algebry. Tato myšlenka byla nejpřekvapivější a nejneočekávanější. A samozřejmě, Heisenberg k ní dospěl nepřímo.

Hlavní rysy Heisenbergovy metody spočívaly v tom, že vybudoval teorii, která se zabývá pouze pozorovatelnými veličinami. Tyto pozorovatelné veličiny byly vloženy do matic, což ho vedlo k úvahám o maticích, a tím dospěl k myšlence uvažovat matici jako celek místo toho, aby pracoval s jednotlivými maticovými elementy. Manipulování s maticemi vede k nekomutativní algebře.

Tehdy ale bylo pro fyziky skutečně těžké přijmout nekomutativní algebru. Samotný Heisenberg měl vážné pochybnosti, když si poprvé všiml, že jeho algebra je skutečně nekomutativní, a byl velice zvědav, zda by neměl tuto ideu úplně opustit, právě kvůli nekomutativnosti. Zjistil však, že je nevyhnutelná, a byl proto nucen ji akceptovat.

Doslechl jsem se o Heisenbergově teorii na začátku září v roce 1925 a bylo pro mě velmi těžké ji zprvu přijmout. Obětoval jsem na to dva týdny; pak jsem náhle uznal, že nekomutativnost je opravdu nejdůležitější idea, která kdy byla Heisenbergem zformulována. Byla zde jedna klíčová myšlenka, která by mohla poskytnout úplné základy jakékoliv nové teorii, kterou se Heisenberg chystal vytvořit. Když pracoval s maticemi, dospěl k nové rovnici pro tyto matice, konkrétně

$$i\hbar \frac{du}{dt} = uH - Hu, \quad (1)$$

kde u je nějaká dynamická proměnná a H je diagonální matice, která reprezentuje energii.

Přemýšlel jsem o Heisenbergových myšlenkách, přičemž jsem se soustředil na nekomutativnost, a tu mě náhodně napadlo, že existuje velká podobnost mezi komutátorem dvou veličin, které nekomutují, a poissonovskými závorkami v klasické mechanice. V důsledku této podobnosti se rovnice nové nekomutativní mechaniky ukázaly být analogické rovnicím ve staré Newtonově mechanice, jestliže tyto staré rovnice byly zapsány v hamiltonovské formě. Vzhledem k této analogii jsem pochopil souvislost mezi starou mechanikou a novou mechanikou Heisenbergovou.

To byl počátek mé práce. Chápal jsem totiž nekomutativnost rovnou jako její podstatně nový prvek.

Navržená idea nekomutativnosti se ukázala být klíčem v rozvoji nové mechaniky, která umožnila únik z frustrace, která nás ovládala v předcházejících letech. Výsledkem bylo období obrovské aktivity teoretických fyziků, velké nadšení nad novými možnostmi. Bylo třeba mnoho práce pro rozvinutí nových myšlenek a hledání, jak by rovnice staré mechaniky mohly být převedeny do nové teorie. Byl jsem schopen dostat nové výsledky poměrně snadno a věřil jsem, že práce směřuje správným směrem. Měl jsem možnost rozvíjet novou obecnou teorii a aplikovat ji na příkladech popisovaných novými rovnicemi.

Tyto rovnice obsahovaly nekomutující veličiny. Existoval problém, jak nalézt fyzikální interpretaci výsledků, jež byly získány pomocí nových rovnic. Problém objevit fyzikální interpretace se ukázal být mnohem těžší než tyto rovnice vytvořit. Nebyl zcela vyřešen ani za dva roky po zavedení původní myšlenky nekomutativnosti.

Nemyslím, že se ve fyzice někdy dříve stalo, že jsme měli rovnici dříve, než jsme znali její obecnou interpretaci. Ale v tomto případě se to stalo.

V dřívějších případech jsme měli právě speciální pravidla pro interpretaci. Tak například jsme měli matici, jež představovala energii, diagonální matici, kde diagonální elementy představovaly energetické hladiny. To byl právě jeden speciální předpoklad umožňující popsat energetické hladiny, a ten fungoval.

Abychom získali obecnou interpretaci, vypomohli jsme si jinou ideou, která byla zformulována nezávisle Erwinem Schrödingerem. Schrödinger pracoval nezávisle na Heisenbergovi a zpočátku nevěděl nic o Heisenbergově přístupu. Schrödinger vycházel z de Broglieho rovnice. Byla to následující vlnová rovnice:

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{m^2}{\hbar^2} c^2 \right) \psi = 0. \quad (2)$$

De Broglie navrhl tuto rovnici jednoduše tak, že si všiml, že existuje zajímavá souvislost mezi jejím řešením a relativistickým pohybem částice. Jestliže předpokládáme, že p_r jsou složky tříkomponentového impulsu s $p_0 = W/c$, potom $p_\mu \psi$ odpovídá $i\hbar \partial \psi / \partial x^\mu$.

S touto souvislostí mezi vlnami a hybností částice jsme měli k dispozici relativistickou teorii. De Broglie postuloval, že tyto vlny jsou spojeny s pohybem částice. S touto ideou přišel předtím, než Heisenberg zavedl svou kvantovou mechaniku. Udělal to v roce 1924.

Četl jsem de Broglieho článek, avšak nebral jsem vlny vážně. Myslel jsem si, že tyto vlny byly pouze matematickou kuriozitou bez jakékoliv fyzikální důležitosti. V tom jsem se ale mýlil. Schrödinger bral tyto vlny vážně. Myslel si, že jsou opravdu spojeny s pohybem elektronu v atomu, avšak bylo zapotřebí nějak modifikovat vlnovou rovnici, aby zahrnovala vliv elektromagnetického pole, ve kterém se elektron pohyboval.

Pokusil se najít vhodnou cestu, jak modifikovat de Broglieho rovnici (2) v souladu s požadavky relativity. Byl schopen nakonec uhodnout následující rovnici:

$$\left\{ \left(i\hbar \frac{\partial}{c \partial t} + \frac{e}{c} A_0 \right)^2 - \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{e}{c} A_1 \right)^2 - \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{e}{c} A_2 \right)^2 - \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{e}{c} A_3 \right)^2 - m^2 c^2 \right\} \psi = 0. \quad (3)$$

Tato rovnice se redukuje na předcházející rovnici (2), položíme-li elektromagnetické potenciály rovné nule. Pokud vím, byl to právě Schrödingerův dohad získat tuto rovnici z de Broglieho rovnice.

Ted, když Schrödinger měl tuto rovnici, první věcí, kterou udělal, bylo přirozeně to, že ji aplikoval na elektron v atomu vodíku. Vypočítal energetické hladiny atomu vodíku a dostal nesprávný výsledek. Důvod, proč získal chybný výsledek, byl v tom, že jeho rovnice nezahrnovala spin elektronu.

V tom čase byl totiž spin elektronu neznámý. Někteří fyzikové o něm uvažovali, konkrétně Kronig o tom přemýšlel a ideu spinu navrhl Paulimu. Kronig poté pracoval v Pauliho týmu. Pauli tehdy ovšem řekl: „Ó ne, spin elektronu je zcela nemožný.“ Pauli měl často nesprávný první názor na novou myšlenku. Ubohý Kronig byl tímto autoritativním názorem Pauliho zcela zdrcen.

Myšlenka spinu elektronu napadla nezávisle na sobě rovněž Goudsmita a Uhlenbecka, kteří pracovali tehdy v Leydenu. Napsali o tom malý článek a předložili jej svému profesoru Ehrenfestovi. Ehrenfestovi se nová idea velmi líbila. Byl jí zcela nadšen. Navrhl Goudsmitovi a Uhlenbeckovi, aby šli za Lorentzem do Haarlemu a prodiskutovali to s ním. Takže šli do Haarlemu a probrali to s Lorentzem. Lorentz však řekl: „Ne, to není možné. Sám jsem vytvořil ideu, že elektron má spin, a zjistil jsem, že by se povrch elektronu měl pohybovat rychleji než světlo.“ To znamenalo, že celkově je idea spinu zcela absurdní. Lorentz udělal chybu v tom, že bral příliš vážně klasický model elektronu.

Goudsmith a Uhlenbeck byli Lorentzem zcela zdrceni. Vrátili se zpátky k Ehrenfestovi a žádali ho o stažení svého článku. Ehrenfest řekl, že je příliš pozdě a že jej již zaslal do tisku. Tímto způsobem byla idea elektronového spinu publikována. Byli jsme opravdu vděční Ehrenfestovu entusiasmu a impulzivnosti, že byla publikována.

Schrödinger o tom nic nevěděl. Zjistil, že jeho vlnová rovnice dává výsledky, jež jsou v rozporu s pozorováním, a byl tím velice zklamán. Opustil proto tento problém na dlouhou dobu.

Vrátil se k práci za několik měsíců a pak si všiml, že kdyby byl býval méně ambiciózní a napsal pouze nerelativistickou rovnici a aplikoval ji na vodíkový atom, dostal by výsledky v souladu s pozorováním, až na jemnou strukturu vodíkového spektra, která závisí na relativistických korekcích. V nerelativistické aproximaci má Schrödingerova rovnice v nepřítomnosti magnetického pole následující tvar:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) - \frac{e}{c} A_0 \right\} \psi. \quad (4)$$

Pomocí této nerelativistické rovnice byly získány výsledky, jež byly v souladu s pozorovaným energetickým spektrem vodíku. Existovalo přitom jak diskrétní spektrum pro spektrální čáry vodíku, tak i kontinuální spektrum odpovídající elektronu rozptýlenému vodíkovým jádrem.

Po tomto úspěchu, po tomto částečném Schrödingerově úspěchu, existovaly tehdy dvě kvantové teorie. Jedna, založená na Schrödingerově vlnové rovnici, a Heisenbergova.

Pamatuji se, že když jsem poprvé slyšel o těchto dvou kvantových teoriích, cítil jsem se trochu znepokojen. Jestliže máme jednu dobrou teorii, znamená to, že máme vše, co jsme si přáli. Mít však dvě teorie, to bylo příliš mnoho. Avšak brzy nato Schrödinger ukázal, že obě teorie si jsou navzájem ekvivalentní. Lze napsat Schrödingerovu rovnici

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi, \quad (5)$$

ve které H odpovídá matici H z Heisenbergovy teorie. Byla to pak pouze otázka matematické transformace přejít od Heisenbergovy teorie k Schrödingerově teorii. Šlo o dvě matematicky ekvivalentní teorie pro jeden a tentýž fyzikální problém. To je základ fyzikálního oboru, který dnes nazýváme kvantovou mechanikou.

Měli jsme tedy uspokojivý rámec s jednou dobrou teorií. Výsledkem Schrödingerovy práce bylo zavedení nového pojmu, vlnové funkce ψ , která byla velmi užitečná při interpretaci teorie. Později bylo objeveno, že vezmeme-li funkci ψ a vhodně ji normalizujeme, potom $|\psi|^2$ dává pravděpodobnost nalezení částice v určitém místě.

Bylo nutné přijmout myšlenku, že nová mechanika dává pouze pravděpodobnosti a nedává determinismus předešlé klasické mechaniky. To byla budoucnost, která byla pro mnoho fyziků těžko přijatelná, která se však ukázala nevyhnutelná pro člověka s větší snahou o porozumění výsledkům výpočtů s nekomutativní algebrou.

Pracoval jsem na tom a uvažoval jsem o problému, jak dostat pravděpodobnost ostatních dynamických proměnných, aby měly specifikované hodnoty. Vypracoval jsem obecnou teorii pro tyto pravděpodobnosti. Tato obecná teorie mi umožnila transformovat Schrödingerovu funkci do jiného tvaru. Potom jsem získal možnost vypočítat pravděpodobnosti jakékoliv dynamické proměnné mající specifikovanou hodnotu nebo několika proměnných majících současně specifikované hodnoty za předpokladu, že tyto proměnné vzájemně komutují. Metodou byla transformace Schrödingerovy funkce, týkající se těch proměnných, o které jsem se zajímal, a opět vytvoření kvadrátu jejich velikosti.

Byl jsem schopen vypracovat tuto obecnou transformační teorii a velmi jsem se z toho radoval. Myslím, že to je ta část práce, která mě nejvíce těšila ze všeho, co jsem kdy v životě udělal. Těšila mě proto, že se neobjevila jako šťastná náhoda; přišla krok za krokem logicky tak, že jsem viděl každý krok, dávající více poznání a vedoucí k další otázce na prozkoumání a řešení. A tímto způsobem, krok za krokem, jsem byl schopen dospět k obecné teorii.

Výsledkem byla krásná účinná metoda interpretující novou mechaniku. Měl jsem tedy v mnoha ohledech opravdu uspokojivou teorii. Mohl jsem se zabývat všemi dynamickými proměnnými a viděl jsem, že maximum toho, co jsem mohl vypočítat, byly pravděpodobnosti veličin, jež vzájemně komutovaly.

Tato nová teorie měla ale jednu špatnou vlastnost. Nebyla relativistická. Nebylo možné ji aplikovat na částice, jež se pohybovaly rychlostmi srovnatelnými s rychlostí světla, protože se zakládala na Newtonově předrelativistické mechanice. Operátor na pravé straně rovnice (4) odpovídá energii v Newtonově mechanice, nikoliv Einsteinově. Tento výraz musel být modifikován pro částice pohybující se velkými rychlostmi.

Podle Einsteina by teorie měla být v zásadě symetrická mezi časem a prostorovými komponentami. Ale vidíte, že takovouto symetrii nemáme. V (1) máme $\partial/\partial t$, ale nikoliv odpovídající $\partial/\partial x_1$, $\partial/\partial x_2$, $\partial/\partial x_3$. Ve Schrödingerově rovnici (4) nebo (5) opět máme $\partial/\partial t$, ale ne odpovídající diferenciální operátory prostorových souřadnic. Takto vznikl problém, jak modifikovat teorii, aby byla relativistická.

Cesta, kterou se většina fyziků dala, byla směrem zpátky k rovnici (3), tj. ke zobecněné de Broglieho rovnici, což je rovnice relativistická. Ta byla nejprve objevena Schrödingerem, ale nebyla jím publikována, protože dávala výsledky nesouhlasné s pozorováním pro vodíkové spektrum. Znovu byla objevena Kleinem a Gordonem, kteří ji ale publikovali. Ti nebyli zastrašeni nesouhlasem s pozorováním. Proto je dnes tato rovnice známa jako Kleinova-Gordonova. Měla by to být rovnice Schrödingerova, ale Schrödinger nebyl dost smělý, aby ji publikoval.

Nyní je to rovnice relativistická a můžeme s ní pracovat jako s takovou. Můžeme utvořit výraz

$$\left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{e}{c} A_0 \right) \psi \right] \bar{\psi} + \text{člen komplexně sdružený,}$$

kteřý můžeme interpretovat jako hustotu náboje spojenou s libovolným řešením vlnové rovnice. Můžeme napsat odpovídající výraz pro hustotu proudu tak, aby vyhovoval požadavkům relativity, a objevíme, že se náboj zachovává. Dále můžeme napsat výraz pro hustotu energie a hybnosti a pro tok. Všechny tyto výrazy jsou relativistické a v souladu se zákony zachování.

V té chvíli byla většina fyziků velmi šťastná v důsledku tohoto vývoje Kleinovy-Gordonovy rovnice. Říkali: „Zde máte dobrou relativistickou teorii.“ Avšak já jsem s ní byl nanejvýš nespokojen, protože jsem na ni nemohl aplikovat transformační teorii. Pro transformační teorii potřebujete Schrödingerovu rovnici (5), zahrnující pouze operátor $\partial/\partial t$, a nikoliv druhou mocninu tohoto operátoru, jak je tomu v rovnici (3).

Transformační teorie se stala mou zálibou, nezačínal jsem se o žádnou teorii, která by nebyla v souladu s touto mou zálibou. Pamatuji si na diskusi o tom s Nielsem Bohrem na Solvayské konferenci na podzim v roce 1927. Bohr se zdál být velmi spokojen s Kleinovou-Gordonovou teorií. Při této příležitosti jsem neměl čas Bohrovi zcela vysvětlit své námitky, ale mohl jsem zjistit, kde je jeho názor nesprávný, a že to byl tehdy názor mnoha fyziků, snad dokonce všech.

Musel jsem se tedy trápit problémem, jak získat relativistickou teorii, která má být lineární v operátoru $\partial/\partial t$. Linearita v $\partial/\partial t$ byla pro mě absolutně podstatná, nemohl jsem se ale vzdát transformační teorie. Podívejte se, pokud pracujete s transformační teorií, můžete také pracovat s pravděpodobnostmi částice, jež má dané hodnoty hybnosti. To byste ale nemohli vůbec dělat s Kleinovou-Gordonovou rovnicí. Mohli byste pracovat pouze s hustotou náboje, nemohli byste pracovat s pravděpodobnostmi, že elektron někde je. Nemohli byste užívat výraz pro nábojovou hustotu, protože ta by vám někdy dávala negativní hodnoty pravděpodobnosti. Jestliže chcete nalézt pravděpodobnost hybnosti mající konkrétní hodnoty, pak tuto otázku nemůžete vůbec zodpovědět. Podobně pro další dynamické veličiny nemůžete dostat vůbec žádnou informaci pro jejich pravděpodobnosti.

Trápil jsem se tedy s touto rovnicí dále až do konce roku 1927 a řešení se konečně dostavilo, spíše náhodou, jako důsledek pouze matematické hry. Všiml jsem si, že jestli vezmu matice σ_1 , σ_2 , σ_3 , které popisují tři komponenty spinu částic se spinem $\frac{1}{2}$, což je kvantum popsané obecnou transformační teorií, potom jestliže utvořím kvadrát

$$(\sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3)^2,$$

dostanu velmi zajímavý výsledek, totiž

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2.$$

Byl to tedy jakýsi druh čtverce pro $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$.

Nyní jsem potřeboval odpovídající výraz pro druhou odmocninu ze součtu kvadrátů čtyř veličin. Musel jsem dostat součet těchto tří mocnin plus hmotnostní člen. Nemohl jsem dostat výraz pro odmocninu součtu čtyř mocnin tím, že jsem pouze pracoval s těmito třemi maticemi sigma (které se nazývají Pauliho matice, protože on vyvinul teorii elektronového spinu vyjádřenou těmito maticemi). To byl pro mne vážný problém po dobu několika týdnů až do okamžiku, než jsem si všiml, že není vůbec zapotřebí držet se 2×2 matic, jakými jsou matice sigma. Mohu přece přejít k maticím 4×4 , abych snadno získal výraz pro odmocninu ze součtu kvadrátů čtyř veličin.

To mě vedlo k rovnici

$$\left\{ i\hbar \left(\frac{\partial}{c \partial t} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) + \alpha_4 mc \right\} \psi = 0, \quad (6)$$

zahrnující alfa-matice, které jsou 4×4 maticemi. Požadujeme od nich, aby vyhovovaly určitým algebraickým podmínkám, jejichž důsledkem je, že tento operátor je právě $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2 c^2$.

Máme tak vlnovou rovnici, která vyhovuje požadavku linearity v operátoru $\partial/\partial t$, a můžeme proto na ni aplikovat obecnou teorii transformace, vlastnost, kterou považují za podstatnou. Také můžeme ukázat, že je opravdu relativisticky invariantní. Není zřejmé, že tomu tak je. Vidíte, že je lineární v $\partial/\partial t$ a podobně je lineární i v $\partial/\partial x_1$, $\partial/\partial x_2$, $\partial/\partial x_3$. Musíme však provést určité výpočty, abychom prověřili, že na ni můžeme aplikovat Lorentzovu transformaci a převést ji zpátky k originálnímu tvaru. Tímto způsobem se přesvědčíme, že je to skutečně relativistická rovnice.

Můžeme modifikovat rovnici (6) započtením elektromagnetického pole stejným způsobem, jakým vložil Schrödinger elektromagnetické pole do de Broglieho rovnice (2). Výsledkem je rovnice elektronu pohybujícího se v elektromagnetickém poli v souladu se základními požadavky relativity a kvantové mechaniky.

Zjistil jsem, že tato rovnice přiřazuje částici poloviční spin. A rovněž jí dává magnetický moment. Přiřazuje jí tedy vlastnosti, které potřebujeme pro elektron. To byla pro mne neočekávaná odměna, opravdu neočekávaná.

V té době jsem si pouze přál mít kvantovou teorii, která vyhovuje obecným požadavkům, aby bylo možné na ni aplikovat transformační teorii a požadavky relativity.

Ukázalo se, že nejjednodušší částicí vyhovující těmto požadavkům je částice se spinem jedna polovina. To bylo pro mě velké překvapení, myslel jsem si totiž, že nejjednodušší částice má přirozeně spin nula a že spin jedna polovina musí být zaveden později v důsledku komplikovanosti, poté co vyřešíme problém částice s nulovým spinem. Ukázalo se však, že je tomu jinak.

Aplikoval jsem tuto rovnici na elektron ve vodíkovém atomu v první aproximaci a dostal jsem výsledky v souladu s pozorováními. Rovnice automaticky dávala správný magnetický moment, a proto neměla ten nedostatek, který měla rovnice Kleinova-Gordonova, jež dávala chybné výsledky pro spektrum atomu vodíku.

Existovala ještě další potíž s touto rovnicí, totiž že bylo zcela možné, aby částice měla negativní energie. Tyto potíže s negativními energiemi byly dobře známy od počátku, avšak já jsem si myslel, že to byla menší potíž než ostatní, menší než neschopnost aplikovat na ni transformace z obecné teorie transformací.

Potíž s negativními energiemi jsem řešil poněkud později aplikací Pauliho vylučovacího principu pro elektrony, principu, podle něhož nemůže být v daném stavu více elektronů než jeden, a vyslovením odvážného předpokladu, že všechny záporné energetické stavy ve vakuu jsou zaplněny, a pokud se objeví díra v záporných energetických stavech, jeví se jako fyzikální částice. Měla by to být částice se spinem jako elektron a měla by mít kladný náboj místo negativního náboje elektronu a měla by mít kladnou energii.

Když jsem poprvé hloubal o této myšlence, myslel jsem si, že tato částice by musela mít stejnou hmotnost jako elektron, v důsledku symetrie mezi kladnými a zápornými hmotnostmi a energiemi, jež prolínaly touto teorií. Ale v té době jedinými elementárními částicemi, jež byly známy, byly elektron a proton. Netroufal jsem si postulovat novou částici. Celkové klima názorů v těch dnech bylo naladěno proti postulování nových částic, což bylo zcela odlišné od toho, co je dnes. Proto jsem publikoval svůj článek jako teorii elektronů a protonů, doufaje, že nějakým neznámým způsobem coulombovská interakce mezi částicemi povede k velkému rozdílu ve hmotnostech mezi elektronem a protonem.

Ovšem zcela jsem se mýlil a matematikové brzy ukázali, že není možné mít takovou asymetrii mezi kladnými a zápornými energetickými stavy. Byl to Weyl, kdo publikoval jako první kategorické tvrzení, že nová částice by měla mít stejnou hmotnost jako elektron. Teorie se stejnými hmotnostmi byla potvrzena o něco později, když Anderson objevil pozitron.

V tomto momentě jsme měli vyhovující teorii ne pro jedinou, ale ve skutečnosti pro několik částic, protože s touto teorií bylo možné mít elektrony skákající mezi kladnými a zápornými energetickými stavy a takovéto skoky odpovídaly buď současné anihilaci elektronu a pozitronu, anebo současné kreaci elektronu a pozitronu. Počet částic se nadále nezachovával. To byl fyzikální vývoj, který byl v tomto údobí zcela přijatelný, a konečným výsledkem byla teorie, jež byla v souladu se zákony transformace a s relativitou.

Pauli a Weisskopf ukázali, že je možné dostat podobnou teorii několika částic tím, že vyjdeme z Kleinovy-Gordonovy rovnice použitím výrazu pro hustotu energie, která

je rovna:

$$\begin{aligned} & \left(i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{e}{c} A_0 \psi \right) \left(-i\hbar \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} + \frac{e}{c} A_0 \bar{\psi} \right) + \\ & + \sum_r \left(-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x_r} + \frac{e}{c} A_r \psi \right) \left(i\hbar \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_r} + \frac{e}{c} A_r \bar{\psi} \right) + m^2 c^2 \psi \bar{\psi}. \end{aligned}$$

Pauli a Weisskopf měli myšlenku o záměně ψ a $\bar{\psi}$ v dynamickou proměnnou, vztahující se na emisi a absorpci částic, a užití celkové energie, která je integrálem tohoto výrazu přes trojdimenzionální prostor, jako hamiltonián, a posléze vyjádření standardní Schrödingerovy rovnice v proměnných velkých Ψ , které se vztahují na celek soustavy částic. S tímto vývojem Kleinovy-Gordonovy rovnice jsme měli teorii pro několik částic, jež všechny měly kladnou energii a které musely být bosony a nikoliv fermiony, jak tomu bylo dříve. Tato teorie byla také relativistická v souladu s transformační teorií.

Nyní existovaly dvě možné částicové teorie, jak relativistické, tak takové, jež byly v souladu s požadavky transformační teorie, jedna pro částice se spinem nula, vyhovující Boseho statistice, a druhá pro částice se spinem $\frac{1}{2}$, vyhovující Fermiho statistice. Tyto teorie si byly v určitém smyslu rovnocenné. Fermiho teorie se vztahovala na elektrony a další částice se spinem $\frac{1}{2}$, například na protony. Kleinovu-Gordonovu rovnici bylo možné aplikovat na určitý druh mezonů s nulovým spinem.

V obou těchto teoriích vystupují elektromagnetické potenciály. Tyto elektromagnetické potenciály se vztahují na vnější pole. Nyní bylo zapotřebí změnit tyto potenciály na kvantové proměnné veličiny, jež vyhovují vhodným komutačním relacím, tak, aby se vztahovaly na kvantové pole záření, interagující se systémem částic.

Pokud to uděláme, dostaneme se do potíží. Můžeme napsat Schrödingerovu rovnici pro úplný systém, částice i elektromagnetické pole. Pokud se pokusíme řešit tuto Schrödingerovu rovnici, zjistíme, že to nejde. Můžeme aplikovat standardní poruchové metody a potom jít k nekonečnostem. Nemůžeme nalézt žádné řešení, nemůžeme dokonce získat jednoduché řešení pro vakuové stavy.

Jediný smysluplný závěr, který lze učinit, je, že je to špatná teorie. Tohle jsem tvrdil po celou dobu, ale mnozí fyzikové se klonili k názoru, že je celkem vyhovující, a pracovali s tím. Existuje jisté ospravedlnění pro takovou práci, protože až dosud nemáme lepší teorii.

Fyzikové vykonali pomocí této kvantové elektrodynamiky, jak je dnes nazývána, velké množství práce. Všimli si, že ačkoliv pokusy řešit vlnovou rovnici vedly vždy k nekonečným, tato nekonečna bylo možné určitým způsobem zvládnout. Zejména Lamb ukázal, že nekonečna mohou být odstraněna v procesu renormalizace. Renormalizace znamená, že předpokládáte, že parametry e a m , jež se vyskytují v původních rovnicích, nejsou tytéž jako fyzikálně pozorované veličiny. Obecná idea renormalizace je z fyzikálního hlediska zcela rozumná, ale metoda, jež je zde aplikována, není rozumná, protože faktor spojující původní parametry s novými je nekonečně velký. A to znamená, že to není vůbec matematicky korektní postup.

Nicméně fyzikové s tím pracovali, zvláště Lamb. Překvapující je, že pokud se nekonečna vyloučí těmito renormalizačními procedurami, dostaneme výsledky v souladu s pozorováním. Shoda platí s vysokým stupněm přesnosti.

Většina fyziků je s těmito výsledky velmi spokojena. Říká se, že vše, co fyzikové potřebují, je mít nějakou teorii, dávající výsledky v souladu s pozorováním. Já říkám, že to vůbec není vše, co fyzikové potřebují. Fyzik potřebuje, aby jeho rovnice byly korektní, aby při práci s nimi nemohl zanedbat veličiny, pokud nejsou malé. Určitě byste nemohli zanedbat veličiny, které jsou nekonečně velké, pouze na základě toho, že se vám nelíbí jejich přítomnost.

Zde jsem se tedy opět ocitl v nesouladu s velkým společenstvím teoretických fyziků. Jsou spokojeni s obtížemi kvantové elektrodynamiky, a já mám pocit, že tento druh spokojenosti je podobný spokojenosti, kterou měli lidé v určité době s Kleinovou-Gordonovou rovnicí. Je to spokojenost, jež brání dalšímu pokroku.

Jakýkoliv další podstatný pokrok musí podle mého názoru přijít v důsledku změn v základních rovnicích. Kde by měly právě být, nevím, ale mám pocit, že tato změna bude podobná té, kterou Heisenberg zavedl v roce 1925. Je to změna, k níž lidé přijdou nakonec pouze nepřímou cestou. Hlavním rysem nové teorie, které můžeme s jistotou věřit, je, že musí být založena na krásné matematice.

Většina mé další práce byla konána v tomto duchu, když jsem se pokoušel hledat matematické ideje, které by snad pomohly získat lepší kvantovou elektrodynamiku. Měl jsem v tomto směru několik nápadů, ale žádný z nich nebyl moc úspěšný. Jeden z prvních, jak víte, vedl k myšlence magnetických monopolů. Lidé hledali monopóly, ale nenašli je s určitostí dosud, avšak monopolová teorie je, řekl bych, živoucí teorií. Možná, že monopóly budou objeveny někdy v budoucnu.

Našel jsem rovnice dosti podobné původním vlnovým rovnicím elektronu, ale se složitějšími typy vnitřních stupňů volnosti elektronu. Tyto rovnice jsou matematicky krásné, ale dosud nevedly k něčemu fyzikálně podstatnému. Věřím, že musíme pokračovat v tomto směru a pokoušet se uhodnout nějakou vhodnou matematiku, která povede k dobré budoucí teorii.

Mohli byste se zeptat: „Nemohli bychom být do jisté míry spokojeni s dnešní kvantovou elektrodynamikou vzhledem k jejím velkým úspěchům v započtených pozorováních?“ Já si myslím, že tyto úspěchy jsou v podstatě shody. Měl by být nějaký hlubší důvod pro ně, důvod s dobrým znakem podobnosti mezi různými rysy nové teorie, dosud neobjevené, a nynější kvantovou elektrodynamikou. Pravděpodobně jsou to ty rysy podobnosti, které leží v základě úspěchu vysvětlení Lambova posuvu.

Můžeme tuto situaci srovnat s úspěchem Bohrovy teorie. Bohrova teorie fungovala velmi dobře pro určité jednoelektronové problémy, navzdory tomu, že tato teorie byla v zásadě chybná. Zdá se, že zde dostáváme koincidenci tohoto druhu při hledání porozumění přírodě. Moje osobní víra je, že úspěch nynější kvantové elektrodynamiky ve vysvětlení Lambova posuvu jsou koincidence v přírodě. Neexistuje nic, abychom s tím byli opravdu spokojeni.

Skončím na tomto místě. Opravdu jsem strávil svůj život hlavně v pokusech o nalezení lepší rovnice pro kvantovou elektrodynamiku, dosud bez úspěchu, avšak v práci na tomto problému pokračuji. Jakákoliv práce, kterou člověk koná v tomto duchu,

musí být založena na dobré matematice. Pravděpodobně bude zahrnovat reprezentaci Lorentzovy grupy. Proto musíme studovat reprezentaci Lorentzovy grupy, abychom se o tom dozvěděli více, a doufat, že se tak více dozvíme o těch reprezentacích, které jsou fyzikálně důležité. Ovšem matematikové už vypracovali všechny ireducibilní reprezentace Lorentzovy grupy, ale ireducibilní reprezentace nás nezavedou příliš daleko. Fyzikové se nezajímají moc o ireducibilní reprezentace, ale o reprezentace, které jsou od nich velmi vzdálené, a zde je široké pole pro další výzkum v hledání těchto obecných reprezentací.

Děkuji za pozornost.

Konec přednášky

Paul Adrien Maurice Dirac (8. 8. 1902 – 20. 10. 1984)

Miroslav Pardy, Brno

Dirac se narodil 8. srpna 1902 v Bristolu. Jeho otec byl Švýcar a matka Francouzka. Nejprve navštěvoval základní školu v Bristolu, od roku 1914 střední školu v Cotham Road blízko univerzity v Bristolu a v letech 1918 až 1921 bristolskou univerzitu, kterou absolvoval jako elektrotechnický inženýr v roce 1921 s hodností B. Sc. Po dvou dalších letech studia matematiky nastoupil do St. John's College v Cambridge jako asistent a vědecký pracovník v matematice. V roce 1926 získal hodnost Ph. D. Poté se stal členem St. John's College a v roce 1932 se stal Lucasianským profesorem matematiky v Cambridge. Na tomto postu setrval 37 roků.

Nobelovu cenu za fyziku získal spolu s E. Schrödingerem v roce 1933. Zprvu nechtěl Dirac Nobelovu cenu přijmout, aby se vyhnul publicitě. Ještě větší publicita by ale následovala po odmítnutí. Proto se na radu svých kolegů rozhodl, že ji přijme.

V roce 1925 si získal reputaci tím, že ve svém článku *Základní rovnice kvantové mechaniky* stanovil základní principy kvantové mechaniky, což umožnilo důkaz ekvivalence na první pohled rozdílné Heisenbergovy a Schrödingerovy reprezentace této teorie. V následujícím období se věnoval, mimo jiné, sjednocení speciální teorie relativity a kvantové mechaniky. Odvodil přitom a v roce 1928 publikoval relativistickou rovnici elektronu, po něm nazvanou, která zároveň zahrnovala i teorii pozitronu, jako první příklad existence antičástice. Dirakovi přálo štěstí, protože pozitron byl objeven Andersonem už v roce 1932. Bez tohoto objevu by jeho rovnice zůstala ve fyzikálním časopise pouze jako matematická kuriozita. Zde platí zásada, že nejen úmysl, ale trochu

Doc. RNDr. MIROSLAV PARDY, CSc. (1943), Ústav fyziky plazmatu AV ČR, PALS, Praha; Masarykova univerzita, Brno.