Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Antonio Ambrosetti

Funkcionální rovnice v nelineární analýze. Věnováno G. Prodimu, velkému učiteli a drahému příteli.

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 49 (2004), No. 3, 196–206

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141230

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2004

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Funkcionální rovnice v nelineární analýze

Věnováno G. Prodimu, velkému učiteli a drahému příteli.

Antonio Ambrosetti, Trieste

1. Úvod

Podstatná část nelineární analýzy je věnována zkoumání abstraktních metod (analytických, topologických či variačních) zaměřených na řešení jednotlivých konkrétních úloh. Ty jsou většinou formulovány jako integrální nebo diferenciální rovnice. Jejich zdrojem jsou zpravidla jiné vědy: mechanika, fyzika, biologie a v poslední době též ekonomie. Typickým postupem je přeformulování úlohy do tvaru funkcionální rovnice, která se pak studuje v nějakém prostoru funkcí, nejčastěji v Banachově prostoru nekonečné dimenze. Abstraktní formulace tvoří často rámec, v němž lze řešit další úlohy, které mají podobný charakter jako úloha výchozí. To nám pomáhá odhalit společnou podstatu problémů zpočátku nesouvisejících a zvolit k jejich řešení jedinou — někdy i relativně jednoduchou — strategii. Jednou ze základních etap postupu je přitom rozšíření výsledků platných v Euklidově prostoru konečné dimenze do prostorů nekonečněrozměrných. Zdůrazněme, že na rozdíl od některých oblastí matematiky zde není cílem snažení maximální stupeň abstrakce. Míra obecnosti je vymezena výchozí úlohou, kterou se snažíme řešit.

V následujícím odstavci se pokusíme ilustrovat funkcionální přístup na jednoduchém příkladě. V odstavci 3 krátce prodiskutujeme diferenciální počet a větu o inverzi. A konečně odstavec 4 se věnuje tématu, jež je velice důležité v aplikacích a zároveň dostatečně názorné díky geometrickým aspektům, jež obsahuje: teorii bifurkací. Právě toto téma je velice blízké G. Prodimu, který v něm dosáhl významných výsledků. Napsal o něm i velice pěkný přehledný článek [1]. Ten se stal výchozím bodem pro mnohé — nejen italské — matematiky, neboť kromě bohatství výsledků, jež jsou v něm obsaženy, ukazuje i cestu, po níž by se mohl ubírat další výzkum v tomto oboru.

Le equazioni funzionali in analisi non lineare. Bolletino U.M.I., La Matematica nella Società e nella Cultura Serie VIII, Vol. V-A, Dicembre 2002, 393–404.

© Unione Matematica Italiana 2002

Přeložil Oldřich John.

Teze tohoto článku byly předneseny a diskutovány na sympoziu „Otázky matematiky: výzkum, aplikace, výuka“, které bylo uspořádáno v Palermu 25. května 2001 při příležitosti udělení titulu doctor honoris causa G. Prodimu za jeho dlouholetou intenzivní činnost v oboru didaktiky.

Článek zdaleka nevyčerpává všechna témata nelineární analýzy. Pro získání hlubších informací odkazujeme například na [2] a na dvě hesla z Encyklopedie XX. století (viz [3], [4]).[1]) Všechny citované publikace vznikly ve spolupráci s G. Prodim.

2. Funkcionální rovnice

Jak bylo řečeno, základním krokem nelineární analýzy je převedení problémů obsahujících diferenciální rovnice na rovnice funkcionální. Uveďme pro ilustraci jednoduchý příklad tohoto postupu.

Předpokládejme, že chceme nalézt řešení $u = u(x)$ diferenciální rovnice druhého řádu

$$u''(x) + h\big(x, u(x)\big) = 0, \quad x \in (a, b), \tag{1}$$

které nabývá v krajních bodech intervalu $\langle a, b\rangle$ předepsaných hodnot, například

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{2}$$

Rovnice (1) spolu s okrajovými podmínkami (2) se nazývá okrajovou úlohou. Popisuje velké množství mechanických jevů i jevů z dalších oblastí fyziky. Při řešení okrajové úlohy (1)–(2) můžeme postupovat takto:

Zaveďme nejprve dva vektorové prostory: Prostor X $(= C_0^2(\langle a, b\rangle))$ je prostor funkcí z $C^2(\langle a, b\rangle)$, které splňují okrajové podmínky (2). Prostor Y $(= C(\langle a, b\rangle)$ je prostor všech funkcí spojitých na intervalu $\langle a, b\rangle$. Opatříme-li je normami

$$\begin{aligned} \|u\|_X &= \max\{|u(x)| + |u'(x)| + |u''(x)| \colon x \in \langle a, b\rangle\}, \\ \|u\|_Y &= \max\{|u(x)| \colon x \in \langle a, b\rangle\}, \end{aligned}$$

dostaneme úplné normované lineární prostory (tj. prostory Banachovy). Zkoumejme nyní zobrazení $F \colon X \to Y$, které přiřadí prvku $u \in X$ funkci $v = F(u)$ předpisem

$$v(x) = u''(x) + h\big(x,\, u(x)\big).$$

Vyřešit okrajovou úlohu (1)–(2) znamená totéž jako vyřešit funkcionální rovnici $F(u) = 0$ v prostoru X. Skutečně, jestliže $F(u) = 0$ znamená to, že u, jež je ze třídy $C^2(\langle a, b\rangle)$, splňuje rovnici (1) na (a, b), a protože je zároveň z prostoru $C_0^2(\langle a, b\rangle)$, splňuje okrajové podmínky (2).

Právě uvedený postup pro úlohu (1)–(2) může být použit pro okrajové úlohy daleko obecnější a rovněž pro okrajové úlohy obsahující diferenciální rovnice parciální.

---

[1]) Rádi bychom upozornili čtenáře na knížku P. Drábek, J. Milota: *Lectures on Nonlinear Analysis*, která má charakter vysokoškolských skript a která může dobře posloužit zájemci o hlubší vhled do problematiky nelineární analýzy. Knížku si lze objednat na dobírku. V případě zájmu kontaktujte, prosím, paní Ivu Sulkovou na adrese: `Iva@kma.zcu.cz`.

Jestliže je kupříkladu Ω omezená oblast v $\mathbb{R}^n$ a symbolem $\partial\Omega$ označíme její hranici a jestliže $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \partial^2 u/\partial x_i^2$ značí Laplaceův operátor, okrajová úloha

$$\begin{cases} \Delta u(x) + h\big(x, u(x)\big) = 0, \quad x \in \Omega, \\ \qquad u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

se převede na funkcionální rovnici $F(u) = 0$, $u \in X$, kde

- X je prostor $C_0^2(\overline{\Omega})$ dvakrát spojitě diferencovatelných funkcí na $\overline{\Omega}$ takových, že $u(x) = 0$ pro $x \in \partial\Omega$,
- $Y = C(\overline{\Omega})$ a
- $F\colon X \to Y$ je zobrazení z X do Y, definované jako $F(u)(x) \equiv \Delta u(x) + h\big(x, u(x)\big)$.

Obecně řečeno, prostor, v němž abstraktně formulovanou úlohu zkoumáme, bere ohled jak na rovnici (v předešlých případech, v nichž jde o rovnici druhého řádu, užíváme prostor C^2), tak i na okrajové podmínky (X je prostor, v němž se nacházejí pouze ty funkce z C^2, jež okrajové podmínky splňují).[2])

3. Diferenciální počet a věty o inverzi

Přirozený postup, který je nasnadě při řešení rovnice typu $F(u) = 0$, kde F je nelineární zobrazení mezi Banachovými prostory X a Y, začíná zobecněním diferenciálního počtu, který byl vybudován v euklidovských prostorech konečné dimenze, na nekonečněrozměrné prostory Banachovy. Nejprve je třeba zobecnit pojmy „limita" a „spojitost". V tomto bodě je přechod do nekonečné dimenze jemnou záležitostí. Na rozdíl od Euklidova prostoru je totiž v Banachových prostorech nekonečné dimenze nutno pečlivě rozlišovat mezi různými druhy konvergence. (Vyjasňování těchto otázek patří mezi motivy, které vedly ke vzniku důležité matematické disciplíny topologie.)

Druhý krok spočívá v zavedení pojmu diferenciálu zobrazení F v bodě u, který je definován analogicky jako v případě Euklidova prostoru, tj. jako lineární a spojité zobrazení $A\colon X \to Y$, pro něž platí

$$F(u + v) = F(u) + A[v] + R(v),$$

kde $R = R_u\colon X \to Y$ je taková funkce, že

$$\lim_{\|v\|_X \to 0} \frac{\|R(v)\|_Y}{\|v\|_X} = 0.$$

Zobrazení A je těmito vztahy určeno jednoznačně a nazývá se (Frèchetovým) diferenciálem zobrazení F v bodě u. (Označuje se zpravidla jako $DF(u)$ nebo $F'(u)$.)

[2]) V následujícím oddíle uvidíme, jak i zdánlivě přirozená volba $X = C_0^2(\overline{\Omega})$, $Y = C(\overline{\Omega})$ musí být někdy modifikována.

Řekneme, že zobrazení F je třídy $C^1(X,Y)$ (tj. $F \in C^1(X,Y)$), jestliže F má diferenciál v každém bodě $u \in X$ a jestliže zobrazení $DF\colon u \mapsto DF(u)$ je spojité zobrazení z X do $L(X,Y)$, kde $L(X,Y)$ je Banachův prostor spojitých lineárních zobrazení z X do Y.

Analogicky se definují diferenciály vyšších řádů $D^kF(u) \in L_k(X,Y)$, kde $L_k(X,Y)$ je prostor zobrazení k-lineárních a spojitých z X do Y, a derivace parciální (v případě, že prostor X je kartézským součinem $X_1 \times X_2$).

Řekneme, že F je třídy $C^k(X,Y)$ (tj. $F \in C^k(X,Y)$), existuje-li $D^kF(u)$ pro každé $u \in X$ a je-li $D^kF\colon u \mapsto D^kF(u)$ spojité zobrazení z X do $L_k(X,Y)$.

Nyní již můžeme zobecňovat klasické věty matematické analýzy na Banachovy nekonečněrozměrné prostory. Připomeňme větu o lokální inverzi.

Věta 1. *Předpokládejme, že $F \in C^1(X,Y)$. Budiž $u_0 \in X$ a nechť $F'(u_0)$ je lineární homeomorfismus X na Y.*

Pak existuje okolí U bodu u_0 a okolí V bodu $F(u_0)$ tak, že $F\colon U \to V$ je difeomorfismus.

Abychom si uvědomili dosah této věty, podíváme se, jak ji lze aplikovat na okrajovou úlohu (3). Předpokládejme pro jednoduchost, že h je spojitě diferencovatelná funkce, která nezávisí na x a $h(0) = 0$, takže $F(0) = 0$. Chceme zjistit, zda F je lokálně invertibilní v $u_0 = 0$. Nyní je však nutné změnit volbu prostorů funkcí. Abychom si uvědomili, jak to je, zabývejme se speciálním případem, kdy $h(s) \equiv 0$. Naše zobrazení F je potom lineární, $F(u) = \Delta u$, a z teorie regularity eliptických rovnic (tzv. Schauderova teorie) je známo, že je vhodné zasadit Dirichletovu úlohu pro Laplaceovu rovnici do rámce tzv. Hölderových prostorů.[3])

Přesně řečeno, pro každé $v \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ existuje jediná funkce $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ taková, že platí $\Delta u = v,\ u\big|_{\partial\Omega} = 0$. Je tedy možné vzít $X = C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})\colon u\big|_{\partial\Omega} = 0\}$ a $Y = C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Zobrazení $F\colon u \mapsto \Delta u + h(u)$ je třídy C^1 a platí

$$F'(0)(v) = \Delta v + h'(0)v.$$

Ověření toho, že zobrazení $F'(0)$ je lineární homeomorfismus X na Y, je ekvivalentní s důkazem, že lineární úloha

$$\begin{gathered}\Delta v(x) + h'(0)v(x) = p(x), \quad x \in \Omega,\\ v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega\end{gathered}$$

má jediné řešení $v \in X$ pro každé $p \in Y$. (Což, jak známo, platí, pokud pro $\lambda = h'(0)$ nemá úloha $\Delta v + \lambda v = 0,\ v\big|_{\partial\Omega} = 0$ netriviální řešení; jinak řečeno, pokud není číslo

[3]) Budiž $\alpha \in (0,1\rangle$. Označme $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ podmnožinu prostoru spojitých funkcí $u \in C(\overline{\Omega})$, pro něž je

$$[u]_\alpha = \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty.$$

Prostor $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ opatřený normou $\|u\|_{0,\alpha} = \|u\|_{C(\overline{\Omega})} + [u]_\alpha$ je úplný a nazývá se Hölderovým prostorem. Analogicky se definují prostory $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ pro $k \in \mathbb{N}$.

$\lambda = h'(0)$ vlastní hodnotou této úlohy.) V takovém případě věta 1 dovoluje tvrdit, že existují ε a δ kladná a taková, že pro každé $g \in Y$, pro něž $\|g\|_Y < \delta$, má úloha

$$(4) \qquad \begin{cases} \Delta u(x) + h\big(u(x)\big) = g(x), & x \in \Omega, \\ \qquad u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

jediné řešení $u_g \in X$, jehož norma v tomto prostoru je menší než ε. Kromě toho zobrazení $g \mapsto u_g$ je třídy C^1. Všimněme si lokálního charakteru tohoto výsledku: Není vyloučeno, že úloha (4) má ještě další řešení vně koule $\{u \in X : \|u\|_X < \varepsilon\}$.

Z věty o lokální inverzi lze odvodit následující větu o implicitní funkci.

Věta 2. *Předpokládejme, že $F : \mathbb{R} \times X \to Y$ je třídy C^1 a že platí $F(\lambda_0, u_0) = 0$ pro jisté $(\lambda_0, u_0) \in \mathbb{R} \times X$. Předpokládejme dále, že parciální derivace $D_u F(\lambda_0, u_0)$ je spojitý lineární homeomorfismus z X na Y.*

Pak existuje okolí Λ bodu λ_0 (v $\mathbb{R}$) a okolí U bodu u_0 (v X) a zobrazení $g : \Lambda \to U$, které je třídy C^1, přičemž platí

$$F(\lambda, u) = 0, \quad (\lambda, u) \in \Lambda \times U \quad \text{právě tehdy, když} \quad u = g(\lambda).$$

Lze rovněž dokázat, že

$$g'(\lambda) = -\big[D_u F\big(\lambda, g(\lambda)\big)\big]^{-1} \circ D_\lambda F\big(\lambda, g(\lambda)\big), \quad \lambda \in \Lambda.$$

Navíc je-li $F \in C^k$, $k \geqq 1$, pak implicitní funkce g je třídy C^k.

V závěru tohoto odstavce uvedeme některé výsledky, jež mají na rozdíl od výsledků předchozích globální charakter. První se týká rozšíření klasické Hadamardovy věty o monodromii na případ nekonečné dimenze. V souvislosti s ním je třeba připomenout slavný článek Renata Caccioppoliho (viz [5]).[4])

Věta 3. *Budiž dáno zobrazení $F \in C^1(X, Y)$. Předpokládejme, že*

(i) *$F'(u)$ je lineární homeomorfismus X na Y pro každé $u \in X$,*
(ii) *$F^{-1}(K)$ je kompaktní v X pro každou kompaktní množinu K z Y.*

Pak je F globální difeomorfismus X na Y.

Aplikujme znovu tento výsledek na okrajovou úlohu (4). Vezměme opět $X = C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $Y = C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ a $F(u) = \Delta u + h(u)$. Označíme λ_i vlastní čísla ($0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqq \lambda_3 \ldots$) úlohy $\Delta u + \lambda u = 0$, $u\big|_{\partial\Omega} = 0$. Předpoklady (i), (ii) věty 3 jsou splněny například tehdy, když $h'(s) \leqq c < \lambda_1$, anebo když $\lambda_k < c_1 \leqq h'(s) \leqq c_2 < \lambda_{k+1}$ platí pro každé $s \in \mathbb{R}$. V takovém případě věta 3 říká, že úloha (4) má právě jedno řešení $u \in X$ pro každé $g \in Y$.

[4]) Renato Caccioppoli patří mezi nejvýraznější osobnosti evropské matematiky. Narodil se v r. 1904, zemřel v r. 1959 v Neapoli. Proslulost získal svými výsledky v teorii míry, variačním počtu, v teorii regularity řešení parciálních diferenciálních rovnic eliptického typu a v řadě dalších oblastí.

Můžeme se nyní ptát, co nastane, jestliže derivace h' protne spektrum $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, to jest, když podmínka (i) věty 3 nebude platit. V tomto případě F není obecně globálním difeomorfismem. Problém byl poprvé zkoumán v článku [6]. Místo abychom formulovali výsledek v abstraktním tvaru, omezíme se opět na popis situace v případě okrajové úlohy (4). Předpokládejme, že funkce h je třídy $C^2(\mathbb{R})$ a že splňuje následující podmínky:

(h_1) $\quad h''(s) > 0$ pro každé $s \in \mathbb{R}$,

(h_2) $\quad \lim\limits_{s\to-\infty} h'(s) = a_-, \quad \lim\limits_{s\to+\infty} h'(s) = a_+, \quad 0 < a_- < \lambda_1 < a_+ < \lambda_2.$

Dá se dokázat, že v tomto případě existuje v prostoru $Y = C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ varieta S kodimenze 1 taková, že $Y \setminus S$ se skládá ze dvou souvislých komponent Y_0, Y_2 a platí:

1) Je-li $g \in Y_0$, úloha (4) nemá řešení.
2) Je-li $g \in Y_2$, úloha (4) má právě dvě řešení.
3) Je-li $g \in S$, úloha (4) má jediné řešení.

Pokud tedy h splňuje (h_1) a (h_2), potom F zobrazuje X na množinu $S \cup Y_2$ a funkcionální rovnice $F(u) = v$ má dvě řešení, jestliže $v \in Y_2$, má jediné řešení, jestliže $v \in S$ a nemá žádné řešení, pokud $v \in Y_0 = Y \setminus (S \cup Y_2)$.

Článek [6] se stal výchozím bodem mnoha prací věnovaných studiu úlohy (4) v případě, kdy $h'(s)$ protíná spektrum Laplaceova operátoru. Rozšíření abstraktního výsledku, týkajícího se geometrického popisu $F(X)$ na případ, kdy F má singularity, je však problém jemnější a k jeho řešení je třeba vynaložit ještě mnoho úsilí.

4. Bifurkační úlohy

Příznačnou vlastností mnoha nelineárních úloh je přítomnost více řešení, jež v aplikacích odpovídají změně stavu.

Pokud například řešíme problém těžké struny s jedním volným a jedním upevněným koncem, kterou necháme rotovat kolem svislé osy s konstantní úhlovou rychlostí $\omega \geqq 0$, povšimneme si, že pro malé rychlosti ω struna zůstává ve svislé poloze, jež odpovídá triviálnímu řešení, které je stabilní. Když ovšem ω překročí jistou kritickou hodnotu $\omega_1 > 0$, struna zaujme tvar křivky, který odpovídá novému řešení, jež se od předešlého liší. Triviální řešení, jež koexistuje s novým, se stává nestabilním, zatímco nové řešení je stabilní.

Jiný příklad se týká popisu pohybu vazké kapaliny, která je umístěna mezi dvěma horizontálními rovinami, jejichž vzdálenost označíme l. Předpokládejme, že spodní rovina má teplotu T_0, teplota horní roviny je T_1 ($T_0 > T_1$). Jestliže parametr $\lambda = (T_0 - T_1)/l$ je malý, nastává pouze vedení tepla a kapalina zůstává v klidu. Jestliže však λ překročí jistou kritickou hodnotu $\lambda_1 > 0$, lze pozorovat konvektivní pohyb kapaliny.

Matematické modely těchto jevů vedou ke studiu funkcionálních rovnic

$$F(\lambda, u) = 0,$$

které obsahují reálný parametr λ. Pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ má rovnice triviální řešení — například $u \equiv 0$, tj. platí $F(\lambda, 0) \equiv 0$. Naší snahou je určit takové hodnoty λ, v nichž vzniknou nová řešení $u \neq 0$. Takové hodnoty $\lambda \in \mathbb{R}$ se nazývají body bifurkace (též body větvení).[5]) Označíme-li symbolem S množinu netriviálních řešení rovnice $F = 0$, tj.

$$S = \{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X \colon \; F(\lambda, u) = 0, \; u \neq 0\},$$

definujeme body bifurkace jako takové hodnoty λ_0, pro něž $(\lambda_0, 0)$ náleží uzávěru množiny S v prostoru $\mathbb{R} \times X$.

V případě konečněrozměrných prostorů, to jest pokud $u = x \in \mathbb{R}^n$, mohou být rovnice obsahující parametr studovány pomocí věty o implicitních funkcích. Jestliže pro jisté $\lambda = \lambda_0$ je Jacobiho matice $D_x F(\lambda_0, 0)$ regulární, má rovnice $F(\lambda, x) = 0$ jediné řešení $x = 0$ pro každé λ dostatečně blízké λ_0, a tudíž větvení v tomto případě nenastává (bod λ_0 není bodem bifurkace). „Nekonečněrozměrná“ verze věty o implicitních funkcích (věta 2) říká, že stejná situace nastane v obecném případě. Tedy: *Je-li λ_0 bodem bifurkace, pak operátor $D_u F(\lambda_0, 0)$ není lineární homeomorfismus X na Y.*

Pokusíme se nyní o vyjádření podmínek, které jsou postačující pro to, aby nastalo větvení (aby λ_0 byl bodem bifurkace). Pro jednoduchost uvažujme situaci, kdy $X = Y$ a rovnice $F(\lambda, u) = 0$ má speciální tvar $G(u) = \lambda u$. Předpokládejme, že platí

(i) $G \in C^1(X, X)$ a $G(0) = 0$,

(ii) G a $G'(0)$ jsou kompaktní.

Věta 4 [Krasnoseľskij]. *Každé vlastní číslo operátoru $G'(0)$, jehož algebraická násobnost je lichá, je bodem bifurkace.*[6])

Rabinowitz ([7]) vskutku dokázal, že z každého vlastního čísla operátoru $G'(0)$, které má lichou násobnost, se odvětvuje komponenta, jež je buďto omezená, anebo prochází jinou vlastní hodnotou $G'(0)$. Připomeňme rovněž, že v případě jednoduchého vlastního čísla (to jest vlastního čísla, jehož algebraická násobnost je rovna jedné) může být předchozí výsledek dokázán za daleko obecnějších předpokladů, aniž předpokládáme kompaktnost G a $G'(0)$. V takovém případě lze množinu S řešení, která nejsou triviální, vyjádřit analytickým výrazem, který explicitně závisí na $D^2 G(0)$. Podrobnosti nalezne čtenář v 5. kapitole monografie [2].

Jako aplikaci můžeme uvažovat nelineární úlohu o vlastních číslech

$$\left\{ \begin{aligned} u''(x) + \lambda(u - u^3) = 0, \quad & x \in \langle a, b\rangle, \\ u(a) = u(b) = 0. & \end{aligned} \right. \tag{5}$$

[5]) V jiných úlohách, jako například v úloze o větvení periodických řešení (tzv. Hopfova bifurkace), může být parametr λ vícerozměrný.

[6]) Budiž T lineární kompaktní operátor na Banachově prostoru X a budiž λ jeho vlastní číslo. Algebraickou násobností n_λ nazveme dimenzi prostoru $X_1 = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} N(\lambda I - T)^p$. (Symbolem $N(S)$ značíme jádro operátoru S.) Je-li vlastní číslo λ různé od nuly, je jeho algebraická násobnost konečná.

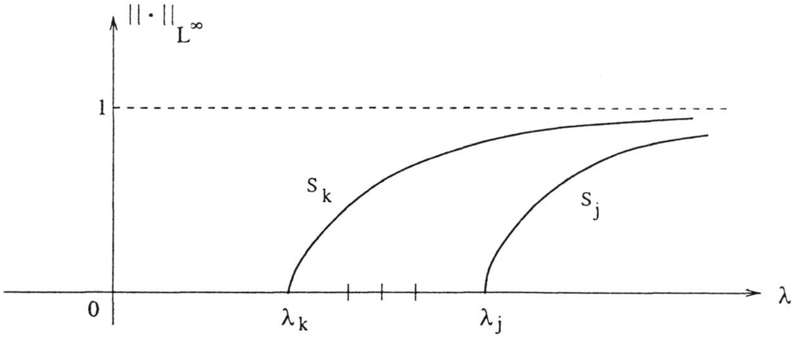
Abychom mohli použít větu 4, vezměme $X = \{u \in C(\langle a,b\rangle) : u(a) = u(b) = 0\}$ a zkoumejme lineární operátor $K\colon X \mapsto X \cap C^2(\langle a,b\rangle)$, definovaný jako

$$K(u) = v \iff -v'' = u, \quad v \in X \cap C^2(a,b).$$

Z Arzelovy-Ascoliho věty plyne ihned, že K jako operátor z X do X je kompaktní. Položme nakonec $G(u) = K(u - u^3)$. Jestliže $G(u) = \mu u, \quad u > 0$, je $K(u - u^3) = \mu u$ a z definice K plyne, že u je řešení (5) s $\lambda = 1/\mu$. Přitom G splňuje podmínky (i), (ii) a platí, že $G'(0) = K$. Je tedy $\mu > 0$ vlastní číslo linearizovaného operátoru $G'(0)$ právě tehdy, když $\lambda = 1/\mu$ je vlastním číslem linearizovaného problému

$$v'' + \lambda v = 0, \quad v(a) = v(b) = 0. \tag{6}$$

Protože vlastní čísla (6) tvoří posloupnost $\lambda_k = k^2\pi^2/(b-a)^2$ a všechna tato vlastní čísla jsou prostá, dospíváme k závěru, že $\mu_k = (\lambda_k)^{-1}$ jsou body bifurkace funkcionální rovnice $G(u) = \mu u$. Využijeme-li toho, že úloha (5) je jednorozměrná, můžeme říci, že z každého vlastního čísla $\lambda_k, \ k = 1, 2, \ldots$, se odvětvuje neomezená souvislá množina S_k taková, že $S_k \cap S_j = \emptyset \ (k \neq j)$.



Obr. 1. Bifurkační diagram úlohy (5).

Obdobně můžeme zkoumat úlohu pro parciální diferenciální rovnici

$$\begin{cases} \Delta u(x) + \lambda(u - u^3) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{7}$$

Výsledkem je tvrzení, že každé vlastní číslo $\lambda^* > 0$ linearizované úlohy

$$\begin{cases} \Delta u(x) + \lambda u = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

které má lichou algebraickou násobnost, je bodem bifurkace úlohy (7). Speciálně to platí pro první vlastní číslo, které je prosté.

V případě, že operátor G je *variační* (tj. G je gradientem funkcionálu), může být věta 4 zobecněna. Připomeňme, že pokud je X Hilbertův prostor se skalárním součinem $(\cdot\,|\,\cdot)$ a $\Phi \in C^1(X,\mathbb{R})$, je gradient funkcionálu Φ (značíme ho symbolem $\nabla\Phi$) operátor jednoznačně definovaný prostřednictvím Rieszovy věty o reprezentaci spojitého lineárního funkcionálu v Hilbertově prostoru jako prvek prostoru X, pro který platí $(\nabla\Phi(u)\,|\,v) = D\Phi(u)[v], \ \forall v \in X$.

Věta 5 [Krasnoseľskij]. *Nechť jsou splněny předpoklady* (i) *a* (ii) *věty* 4. *Nechť prostor* X *je Hilbertův a nechť existuje funkcionál* $\Phi \in C^2(X, \mathbb{R})$ *takový, že* $G(u) = \nabla\Phi(u)$.

Potom je ***každé*** *vlastní číslo operátoru* $G'(0)$ *bodem bifurkace.*

Připomeňme, že velmi elegantní důkaz této věty, při němž bylo užito Morseovy teorie, podal G. Prodi ve společné práci s A. Marinem (viz [8]).

R. Böhme dokázal, že při zesílení předpokladů věty 5 (analytičnost funkcionálu G) se z každého vlastního čísla odvětvuje *komponenta* řešení — alespoň lokálně. Byly zkonstruovány příklady ukazující, že v neanalytickém případě toto tvrzení obecně neplatí. V novější práci [9] byla dokázána existence bifurkačních větví pro širokou třídu variačních C^2 operátorů.

Krátký úvod do problematiky zakončíme připomenutím výsledku, který se týká bifurkace v nekompaktním případě. Omezíme se opět na popis příkladu. Informaci o obecných výsledcích a důkazech nalezne čtenář v článku [10].

Uvažujme pro $p > 1$ následující úlohu formulovanou na celé reálné ose

$$\tag{9} \begin{cases} \psi''(x) + \lambda\psi(x) + h(x)\,|\psi(x)|^{p-1}\,\psi(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} \psi(x) \to 0. \end{cases}$$

Záměna proměnných $u(x) = \varepsilon^{-2/(p-1)}\psi(x/\varepsilon)$, $\lambda = -\varepsilon^2$ transformuje úlohu (9) na

$$\tag{10} u'' - u + h\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)|u|^{p-1}u = 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

Jestliže $h(x)$ je konstantní funkce $c > 0$, má úloha (10) explicitní řešení z_0 (například pro $4p = 3$ a $h \equiv 1$ je $z_0(x) = \sqrt{2}/\cosh x$), jemuž odpovídá větev takových řešení (9), která mají tvar

$$\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{\frac{2}{p-1}} \cdot z_0(\varepsilon x), \quad \lambda = -\varepsilon^2$$

a která bifurkují z $\lambda = 0$. Povšimněme si, že esenciálním spektrem linearizované úlohy

$$\psi'' + \lambda\psi = 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} \psi(x) = 0,$$

která odpovídá úloze (9), je polopřímka $\langle 0, +\infty)$. Je tedy bodem bifurkace infimum esenciálního spektra.

Chceme-li zkoumat případ, kdy funkce h je nekonstantní, předpokládáme, že

$$\tag{11} \lim_{|x|\to\infty} h(x) = c > 0.$$

Napišme (10) ve tvaru

$$u'' - u + c|u|^{p-1}u + \bigg(h\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) - c\bigg)|u|^{p-1}u = 0.$$

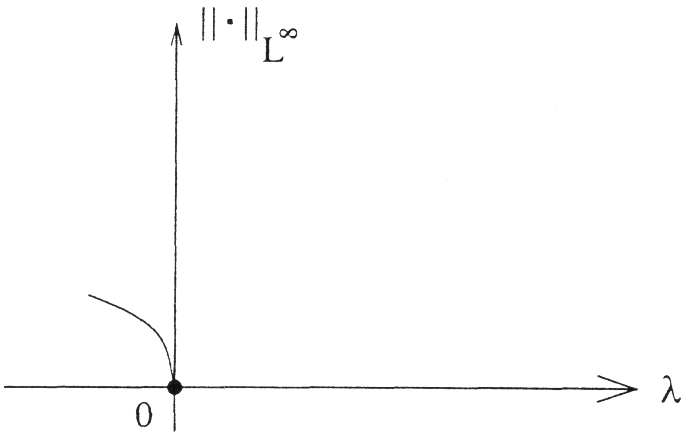
Pro ε dostatečně malé jde o perturbaci rovnice

$$u'' - u + c|u|^{p-1}u = 0.$$

Tato rovnice je invariantní vzhledem k posunutí a má proto, kromě řešení $z_0(x)$, rovněž řešení

$$z_\theta(x) = z_0(x-\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Můžeme říci, že (10) má triviální řešení $\varepsilon = 0,\ u = z_\theta,\ \theta \in \mathbb{R}$. Bifurkační problém se tak redukuje na hledání hodnot θ, z nichž se větví řešení úlohy (10) ve tvaru (ε, u), kde $\varepsilon > 0$. K nalezení bodů bifurkace θ lze použít variační metody perturbací, která je podrobně vyložena v práci [10]. Lze například dokázat, že úloha (10) má řešení v případě malých kladných hodnot ε za doplňujícího předpokladu, že $h(x) - c \in L^1(\mathbb{R})$ a že $\int_{\mathbb{R}}(h(x)-c)\,\mathrm{d}x \neq 0$. Pro odpovídající řešení $\lambda = -\varepsilon^2,\ \ \psi_\lambda$ úlohy (9) platí, že $\|\psi_\lambda\|_{L^\infty} \to 0$ pro $\lambda \to 0+$. Tímto způsobem se ukáže, že infimum esenciálního spektra je bodem bifurkace úlohy (9). Poznamenejme nakonec, že pro $1 < p < 5$ konvergují řešení ψ_λ k nule také v Sobolevově prostoru $H^1(\mathbb{R})$.



Obr. 2. Bifurkační diagram úlohy (9).

Literatura

[1] Prodi, G.: *Problemi di diramazione per equazioni funzionali.* Boll. U.M.I. *22* (1967), 413–433.

[2] Ambrosetti, A., Prodi, G.: *A Primer of Nonlinear Analysis.* Cambridge Univ. Press 1993.

[3] Ambrosetti, A., Prodi, G.: *Analisi non lineare.* Enciclopedia del Novecento, vol. VIII, Instituto della Enciclopedia Italiana (Treccani).

[4] Ambrosetti, A.: *Analisi non lineare, Metodi Variazionali.* Enciclopedia del Novecento, vol. X, Instituto della Enciclopedia Italiana (Treccani).

[5] Caccioppoli, R.: *Un principio di inversione per le corrispondenze funzionali e sue applicazioni alle equazioni alle derivate parziali.* Atti Acc. Naz. Lincei *16* (1932), 392–400.

[6] Ambrosetti, A., Prodi, G.: *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces.* Annali Mat. Pura Appl. *93* (1973), 231–247.

[7] Rabinowitz, P. H.: *Some global results for nonlinear eigenvalue problems.* J. Funct. Anal. *7* (1971), 487–513.
[8] Marino, A., Prodi, G.: *La teoria di Morse per gli spazi di Hilbert.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova *41* (1968), 43–68.
[9] Ambrosetti, A.: *Branching points for a class of variational operators.* J. d'Analyse Math. *76* (1998), 321–335.
[10] Ambrosetti, A., Badiale, M.: *Variational perturbative methods and bifurcation of bound states from the essential spectrum.* Proc. Royal Soc. Edinburgh *128A* (1998), 1131–1161.

Měsíce ve sluneční soustavě (1. část)

Pavel Příhoda, Praha

Celková charakteristika

Ve sluneční soustavě se setkáme s tělesy různých typů. Centrální těleso, Slunce, je hvězdou vcelku obvyklého typu — s mírně nadprůměrnou hmotností, svítivostí i průměrem a stářím. Po Slunci se největší hmotností vyznačují planety. Mnohem menší a četnější jsou planetky čili asteroidy, nazývané také planetoidy. Počet objevených planetek s určenou dráhou rychle roste, koncem roku 2003 to bylo téměř čtvrt milionu, a není vyloučeno, že se brzy dostaneme přes milion. Nejpočetnější jsou však kometární jádra. Většina jich ovšem obíhá daleko za dráhou Pluta v takzvaném Oortově oblaku a ke Slunci se v dohledné době nepřiblíží, takže jejich počet pouze odhadujeme. Nejčastěji uváděný odhad je 10^{12}, někdy se připouští dokonce 10^{13}.

Velká většina těles sluneční soustavy obíhá přímo kolem Slunce, tedy po heliocentrických drahách. Obvykle se říká, že obíhají v elipsách. Přesně to ovšem neplatí. Gravitační síly mezi planetami způsobují poruchy oběžných drah, což se projevuje změnami jejich elementů. U některých těles nejsou tyto změny nijak velké, u jiných jsou naopak nápadné.

V tomto článku věnujeme pozornost tělesům, pro která používáme termín satelity, česky měsíce a podle starší literatury také družice. Malé satelity pak označujeme jako měsíčky. Tato tělesa a tělíska neobíhají přímo kolem Slunce, ale kolem některých planet, tedy po planetocentrických drahách. I ona patří samozřejmě k objektům sluneční

Ing. Pavel Příhoda (1934), Hvězdárna a planetárium hl. m. Prahy, Královská obora 233, 170 21 Praha 7.