Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Mirko Rokyta

Hyperbolické systémy, entropie a metoda konečných objemů

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 47 (2002), No. 4, 287--297

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141144`

Hyperbolické systémy, entropie a metoda konečných objemů

Mirko Rokyta, Praha

1. Hyperbolické zákony zachování

Mnoho fyzikálních zákonů lze vyjádřit ve tvaru *zákonů zachování*, ať již jde o zákon zachování hmoty, momentu, energie nebo jiné veličiny. Obecně lze takové zákony zachování zapsat jako systém m parciálních (obvykle nelineárních) diferenciálních rovnic v jedné časové a n prostorových proměnných:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(u) = 0 \quad \text{v } \mathbb{R}^n \times (0,T). \tag{1}$$

Neznámou v tomto systému rovnic je hledaná (obecně vektorová) funkce, $u = u(x,t) : \mathbb{R}^n \times \langle 0,T\rangle \to \mathbb{R}^m$, $u = (u_1,\ldots,u_m)$. Z fyzikálního hlediska je u onou veličinou, jejíž zachovávání systém (1) popisuje. Přesněji řečeno, $\int_\Omega u(x,t)\,\mathrm{d}x$ představuje celkové množství veličiny u v oblasti Ω v čase t. Zadané obecně nelineární funkce $f_j \in C^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)$ představují pro $j = 1,\ldots,n$ toky dané veličiny u. V takové oblasti Ω, přes jejíž hranici $\partial\Omega$ „nic neteče“, tedy v níž platí $\int_{\partial\Omega} f(u)\cdot\nu\,\mathrm{d}S = 0$, kde $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_n)$ je jednotkový vektor vnější normály k Ω, platí podle Greenovy věty

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(u)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{n} f_j(u)\,\nu_j\,\mathrm{d}S = 0,$$

což spolu s (1) dává (při vhodných matematických předpokladech)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_\Omega u(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Posledně uvedenou rovnicí je tak vyjádřen fakt, že množství veličiny u v takové oblasti Ω skutečně zůstává v čase konstantní, zachovává se.

Systém (1) často doplňujeme o počáteční podmínku tvaru

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{v } \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

Doc. RNDr. Mirko Rokyta, CSc. (1962), katedra matematické analýzy MFF UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8 – Karlín, e-mail: `mirko.rokyta@mff.cuni.cz`, `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta`

kde funkce u_0 popisuje počáteční rozložení veličiny u a je nejčastěji uvažována v prostoru všech esenciálně omezených funkcí, $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. Problém (1)–(2) tak tvoří počáteční (Cauchyovu) úlohu.

Z matematického hlediska mají zákony zachování jednu důležitou vlastnost, a sice že systém rovnic (1) má hyperbolický charakter. Nebude možná na škodu, když připomeneme definici tohoto pojmu.

Označme nejprve symboly

$$A_j(u) := \frac{Df_j}{Du}(u) \tag{3}$$

Jacobiho matice rozměru $m \times m$, sestavené z derivací funkcí f_j, a pro libovolný číselný vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ označme dále

$$\mathbb{A}(\alpha, u) := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A_j(u). \tag{4}$$

Systém (1) se pak nazývá *hyperbolický* (přesněji *hyperbolický v bodě* u), pokud pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}^n$ má matice $\mathbb{A}(\alpha, u)$ pouze reálná vlastní čísla a je diagonalizovatelná. Systém (1) se dále nazývá *striktně hyperbolický*, pokud jsou vlastní čísla matice $\mathbb{A}(\alpha, u)$ reálná a navzájem různá. Striktně hyperbolický systém je evidentně hyperbolický. Více o obecných či základních vlastnostech hyperbolických systémů viz například práce P. Laxe [7], z poslední doby viz např. knihu J. Smollera [13] nebo monografie E. Godlewské a P. A. Raviarta [3] či D. Serreho [11].

Věty o *lokální* existenci a jednoznačnosti řešení obecného hyperbolického systému patří dnes již ke klasickým výsledkům. Jako reprezentanta této skupiny tvrzení vybíráme následující větu, kterou lze (dokonce v obecnějším tvaru) nalézt v článku J. Raucha [9]. O této práci zde ještě bude řeč (viz věta 1.5).

Věta 1.1. *Nechť systém* (1) *je striktně hyperbolický v okolí bodu* $\overline{u}$ *a nechť nelinearity úlohy splňují* $f_j \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)$. *Potom existuje* $T > 0$ *a funkce* $u = u(x,t) : \mathbb{R}^n \times \langle -T, T\rangle \to \mathbb{R}^m$, *která je jednoznačně určeným řešením Cauchyovy úlohy* (1)–(2) *s počáteční podmínkou* $u_0 = \overline{u}$. *Přitom* $u - \overline{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \langle -T, T\rangle)$.

Zatímco výsledek o *lokální* existenci, jednoznačnosti a regularitě klasického řešení rovnice (1) je tedy k dispozici i v případě obecného systému rovnic ve více prostorových proměnných, nemusí mít rovnice (1) na předem daném časovém intervalu $\langle 0, T\rangle$ klasické řešení, a to ani v nejjednodušším případě, kdy jde o jednu rovnici v jedné prostorové proměnné ($n = m = 1$) a data úlohy, tedy funkce f_j a u_0, jsou nekonečně hladká (viz např. [13], [3]). Ostatně fakt, že i poklidně proudící vzduch může časem doproudit k rázové vlně, a tedy nespojitosti v popisovaných veličinách, je všeobecně znám. Tato skutečnost nás nutí přirozeně pracovat s pojmem *slabého řešení*, tj. pouze lokálně integrabilní funkce u, splňující pro lokálně integrabilní data u_0 integrální identitu

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \\ + \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} f_j\big(u(x,t)\big) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) \cdot \varphi(x,0)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{5}$$

pro všechny hladké testovací funkce $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n \times \langle 0, T); \mathbb{R}^m)$ s kompaktním nosičem. *Slabé řešení* hyperbolického problému však, jak je rovněž známo, nemusí být určeno jednoznačně. Přesněji řečeno, třída slabých řešení obsahuje obecně i funkce, které formálně ve slabém smyslu rovnici (5) splňují, fyzikální interpretace takových řešení je však sporná (jde například o nefyzikální rázové vlny, porušující druhý princip termodynamiky apod., viz např. [13], [3]). Existuje případ skalární rovnice v jedné prostorové proměnné, která má pro danou (nespojitou, lokálně integrabilní) počáteční podmínku u_0 nespočetně mnoho slabých řešení (viz např. [13] nebo [8], kapitola 2). K dosažení jednoznačnosti řešení, korespondující s fyzikálním náhledem na řešení systému (1), je tak potřeba požadovat, aby slabé řešení splňovalo kromě původní rovnice ještě nějakou dodatečnou podmínku, schopnou efektivně vybírat mezi vhodnými kandidáty řešení fyzikálně přípustné.

Fyzikální motivace nás vedou k zavedení několika takových *selektorů*. Všimněme si krátce dvou z nich.

Definice 1.2. Buď u slabým řešením rovnice (1). Funkci u nazveme *limitou vazkých řešení*, pokud existuje posloupnost hladkých řešení u_k^ε systému

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(u^\varepsilon) = \varepsilon \Delta u^\varepsilon \quad \text{v } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \tag{6}$$

(s $\varepsilon = \varepsilon_k > 0$), konvergující k funkci u v silné topologii prostoru L^1 pro $\varepsilon_k \to 0+$. Zde $\Delta u = (\Delta u_1, \dots, \Delta u_m)$.

Definice 1.3. Buď u slabým řešením rovnice (1). Funkci u nazveme *slabým entropickým řešením*, pokud splňuje tzv. entropickou nerovnost

$$\frac{\partial U(u)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} F_j(u) \leqq 0 \quad \text{ve smyslu distribucí} \tag{7}$$

pro každou konvexní entropii U a jí příslušné tzv. entropické toky F_j. Přitom (matematickou) *entropií* nazýváme každou takovou funkci $U \in C^2(\mathbb{R}^m)$, pro kterou existují funkce $F_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, zvané pak *toky entropie*, splňující tzv. rovnice kompatibility

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial U}{\partial u_k} \frac{\partial f_{j,k}}{\partial u_\ell} = \frac{\partial F_j}{\partial u_\ell} \qquad \forall j = 1, \dots, n, \quad \ell = 1, \dots, m. \tag{8}$$

Člen na pravé straně rovnice (6) se většinou interpretuje jako vazkost, jejíž velikost je vyjádřena koeficientem $\varepsilon > 0$, resp. $\varepsilon = 0$ pro nevazký případ (1). První z obou definic tak reflektuje názor, že fyzikálně správná řešení nevazké úlohy (1) jsou ta, která jsou limitou řešení tzv. vazkých (též „disipativních“) aproximací (6) původní úlohy (1). Tato podmínka v sobě zároveň skrývá jeden z možných postupů nalezení řešení rovnice (1): nalézt nejprve (hladká) řešení u^ε (kvazilineární, a tedy mnohem lépe řešitelné) rovnice (6) a pokusit se o limitní přechod $\varepsilon \to 0+$. Tato metoda se nazývá někdy metodou „umělé vazkosti“. Poznamenejme rovnou, že v případě obecného systému naráží tato metoda na technické problémy spojené se skutečností, že je velmi obtížné získat dostatečně silné apriorní odhady, které by zmíněný limitní přechod umožnily.

Poměrně známá a často používaná entropická podmínka (7) připouští jednu zajímavou interpretaci. Předpokládejme, že existují hladká řešení systému (6), přenásobme k-tou rovnici tohoto systému výrazem $\partial U(u^\varepsilon)/\partial u_k$ a sečtěme takto vzniklé rovnice přes $k = 1, \ldots, m$. Provedeme-li složená derivování a především použijeme-li při úpravě prostředního (konvektivního) členu podmínky kompatibility (8), dospějeme k rovnici

$$\frac{\partial U(u^\varepsilon)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} F_j(u^\varepsilon) = \varepsilon\, \Delta U(u^\varepsilon) - \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \sum_{k,\ell=1}^{m} \frac{\partial^2 U(u^\varepsilon)}{\partial u_k\, \partial u_\ell} \frac{\partial u_\ell^\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_j} \leqq \varepsilon\, \Delta U(u^\varepsilon). \quad (9)$$

Při odvození závěrečné nerovnosti jsme využili konvexity entropie U, tedy informace o pozitivní definitnosti kvadratické formy druhých derivací funkce U.

Předpokládáme-li, že existuje limita u vazkých řešení u^ε ve smyslu definice 1.2 a že tato konvergence připouští v nerovnosti (9) limitní přechod pro $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0+$ (alespoň ve smyslu distribucí), obdržíme jako výsledek tohoto limitního přechodu entropickou nerovnost (7). Tato úvaha nám umožňuje uvědomit si, že řešení hyperbolických zákonů zachování, získaná metodou umělé vazkosti ve smyslu definice 1.2, jsou automaticky i entropickým řešením (viz též např. [13]). Tato zajímavá souvislost poněkud stírá nádech mystičnosti, který entropickou nerovnost již desetiletí provází a představuje ji v mnohem přirozenějším světle: jednou z možných jejích interpretací je to, že „zastupuje roli vazkosti v nevazkých dějích“ a pomáhá tak preferovat ty nevazké děje, které „mají blízko k dějům vazkým“.

Všimněme si nyní krátce některých teoretických výsledků dosažených pro jednotlivé typy hyperbolických zákonů zachování.

• **Skalární rovnice**. V případě jedné rovnice ve více prostorových proměnných ($m = 1$, $n \geqq 1$) je otázka existence (a jednoznačnosti) zodpovězena slavnou Kružkovovou větou z r. 1970.

Věta 1.4 (Kružkov (1970), [6]). *Nechť $m = 1$, $n \geqq 1$, $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f_j \in C^1(\mathbb{R})$ pro $j = 1, \ldots, n$. Potom pro každé $T > 0$ existuje právě jedno slabé entropické řešení $u \in L^\infty\big(\mathbb{R}^n \times (0,T)\big)$ Cauchyovy úlohy* (1)–(2).

• **Obecný systém v jedné prostorové dimenzi**. V případě obecného systému hyperbolických zákonů zachování v jedné prostorové proměnné (tedy $m \geqq 1$, $n = 1$ v (1)) došlo k významnému pokroku v roce 1965, kdy J. Glimm ve svém fundamentálním článku [2] dokázal globální existenci slabého entropického řešení pro počáteční podmínku u_0 s malou totální variací. Zdůrazněme, že věta neříkala nic o jednoznačnosti takovéhoto řešení.

Další pokrok přinesla až metoda užívající konstrukce nazývané *wave-front tracking*. Základní myšlenky tohoto postupu zformulovali C. M. Dafermos v roce 1972 pro skalární rovnici v jedné prostorové proměnné a R. DiPerna v roce 1976 pro systém dvou rovnic v jedné prostorové proměnné. K významnému průlomu došlo v 90. letech, kdy tuto metodu zdokonalili a rozšířili na případ m rovnic v jedné prostorové proměnné A. Bressan a jeho spolupracovníci. Ve třídě entropických řešení s malou totální variací dokázali jednoznačnost (globálně existujícího) slabého entropického řešení a lipschitzovsky spojitou závislost řešení na počáteční podmínce. Protože přesná citace výsledků by si vyžádala zavedení řady nových pojmů a technických detailů, odkazujeme čtenáře zejména na Bressanovu knihu [1], kde se rovněž může dočíst o všech výsledcích zmíněných v tomto odstavci.

Ukazuje se rovněž, že podmínka malé počáteční totální variace je v kontextu entropických řešení podstatná, jak ukazuje výsledek M. Severa z roku 1989 [12]. Sever našel příklad ryze nelineárního, striktně hyperbolického systému pěti rovnic v jedné prostorové proměnné a počáteční podmínku $u_0 \in L^\infty \cap \mathrm{BV}(\mathbb{R})$ s „velkou“ totální variací tak, že Cauchyova úloha (1)–(2) má více než jedno slabé entropické řešení.

• **Obecný systém ve více než jedné prostorové dimenzi**. Jednou z možností, jak pojednat tuto část, by bylo vynechat na tomto místě prázdnou stránku a zdůraznit tak skutečnost, že o existenci a jednoznačnosti řešení v případě vícedimenzionálního systému ve více prostorových proměnných (tedy $m > 1$, $n > 1$ v (1)) se toho ví velmi málo.

Protože není naším hlavním cílem podrobněji studovat vlastnosti obecných hyperbolických systémů, ilustrujme zde pouze krátce obtíže spojené s jejich řešením. Jde především o to, že standardní metoda nalezení přibližných řešení u^ε, ať již jde o řešení získaná metodou mizející vazkosti (jako tomu bylo v případě jedné rovnice), či řešení získaná jinými metodami (například pomocí „wave-front tracking“), v případě systémů ve více prostorových dimenzích selhává. Hlavní potíží například metody mizející vazkosti je přitom nedostatek apriorních odhadů, nezávisejících na ε, které by umožnily limitní přechod $\varepsilon \to 0+$. Připomeňme, že ani v nejjednodušším případě jedné rovnice v jedné prostorové proměnné nelze očekávat horní odhad norem gradientů nezávisející na ε, neboť normy gradientů aproximujících řešení u^ε typicky závisejí na $1/\varepsilon$ (viz [13] nebo [8], kapitola 2), přičemž tento odhad nelze zlepšit. Klasickou metodu kompaktnosti (kompaktní vnoření Sobolevových prostorů do prostorů Lebesgueových) tedy nelze použít. V případech obecného systému v jedné prostorové dimenzi hrál proto důležitou roli apriorní odhad totální variace aproximující posloupnosti a Hellyho kompaktní vnoření prostoru funkcí s konečnou variací do prostoru L^1.

Jak se však poněkud překvapivě ukázalo v polovině 80. let, nelze ani metodu založenou na kompaktním Hellyho vnoření v obecném případě použít. K tomuto poznání přispěl především překvapivý výsledek J. Raucha z roku 1986, který zde pro úplnost uvedeme.

Věta 1.5 (J. Rauch (1986), [9]). *Za stejných předpokladů jako ve větě* 1.1 *platí: Nechť existují konstanty $c > 0$, $\overline{t} > 0$ takové, že řešení u Cauchyovy úlohy* (1)–(2) *s počáteční podmínkou $u_0 = \overline{u}$ splňuje nerovnost*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x u(\overline{t}, x)| \,\mathrm{d}x \leqq c \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x u(0, x)| \,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

Položme (srov. (3)) $A_j(u) := \dfrac{Df_j}{Du}(u)$. *Potom pro každé $j, \ell = 1, \ldots, n$ platí*

$$A_j(\overline{u}) \cdot A_\ell(\overline{u}) = A_\ell(\overline{u}) \cdot A_j(\overline{u}). \tag{11}$$

Připomeňme, že za předpokladů věty 1.1 lokálně existuje hladké řešení daného hyperbolického systému, které je automaticky na intervalu své hladkosti řešením entropickým [3]. Pro hladké funkce s kompaktním nosičem je L^1-norma gradientu, vyskytující se v (10), ekvivalentní s výrazem $\mathrm{TV}_\Omega(u) := \sup_{\varphi \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n),\, \|\varphi\|_\infty \leqq 1} \int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \,\mathrm{d}x$, definujícím totální variaci. Rauchova věta tedy říká, že hyperbolický systém může mít řešení, jejichž totální variace je v nějakém kladném čase konečná *pouze tehdy*, když komutují Jacobiho matice derivací nelinearit dané rovnice. Tento překvapivý výsledek si zaslouží krátký komentář. V případě hyperbolického systému v jedné prostorové dimenzi ($n = 1$, $m \geqq 1$) je nutná podmínka (11) splněna triviálně, neboť jediná matice A_1 jistě komutuje sama se sebou. Podobně je tomu i v případě jedné rovnice v libovolné prostorové dimenzi ($n \geqq 1$, $m = 1$), kdy všech n matic A_j má rozměr 1×1. V případě obecného systému ve více než jedné prostorové proměnné ($n > 1$, $m > 1$) však Rauchova věta říká, že (lokálně existující hladké) řešení u **nemůže** mít v libovolném kladném čase konečnou variaci v případě, kdy matice nelinearit nekomutují, a tedy není splněna podmínka (11). Situace, kdy matice nelinearit nekomutují, však není pro fyzikální systémy nikterak netypická, je to i případ Eulerových rovnic popisujících nevazké stlačitelné proudění ve více než jedné prostorové dimenzi (viz [9]).

Existence (v jakémkoli rozumném slova smyslu) a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy (1)–(2) na časovém intervalu předepsané délky je tak v obecném případě $m > 1$, $n > 1$ stále otevřeným problémem (viz např. [1]), jehož řešení se zdá v dohledné době nedosažitelné.

Vyzbrojeni těmito základními znalostmi o existenci a jednoznačnosti řešení hyperbolických systémů můžeme přikročit k jejich numerické aproximaci.

2. Metoda konečných objemů

Přibližné řešení Cauchyovy úlohy (1)–(2) lze v zásadě hledat jednou ze tří nejběžnějších numerických metod: *metodou sítí*, zvanou též *metoda konečných diferencí* (MKD), *metodou konečných prvků* (MKP) nebo *metodou konečných objemů* (MKO). Pokusme se krátce, aniž z prostorových důvodů podáme přesné charakterizace těchto metod, nastínit některé jejich hlavní rysy a odlišnosti. Pro názornost budeme pracovat ve dvou prostorových dimenzích.

Jednou z hlavních odlišností zmíněných metod je to, z jaké formulace řešené úlohy vycházejí. Zatímco pro metodu sítí je výchozím bodem klasická, tedy diferenciální formulace úlohy, metoda konečných prvků vychází ze slabé (variační) formulace úlohy a metoda konečných objemů z integrálního tvaru dané úlohy. Metoda sítí pak (zjednodušeně řečeno) předpokládá, že hledané přibližné řešení se vyčísluje v uzlech *kartézské sítě*, vzniklé jako kartézský součin dělicími body rozdělených intervalů. Společným rysem metody konečných elementů a metody konečných objemů je naproti tomu schopnost **přirozeně** pracovat na obecnějších oblastech. Typický je například předpoklad, že oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, na které se hledá přibližné řešení, je *triangulována*, tj., zhruba řečeno, že lze psát $\overline{\Omega} = \bigcup_{j\in J} T_j$, kde J je indexová množina a T_j jsou uzavřené trojúhelníky, v obecném případě uzavřené konvexní mnohoúhelníky s r vrcholy. Hovoříme o triangulaci $\mathcal{T}_h := \left\{T_j, \overline{\Omega} = \bigcup_{j\in J} T_j\right\}$, kde $h := \sup_j \operatorname{diam}(T_j)$. Od triangulace požadujeme obvyklé vlastnosti (například podmínky kladené na minimální a maximální úhly všech elementů triangulace).

Metoda konečných prvků je známějším sourozencem metody konečných objemů. Co ji především (mimo jiné) charakterizuje, je skutečnost, že se o přibližném řešení u_h předpokládá, že je po částech polynomiální na elementech T_j a spojité (případně včetně některých derivací) na společných hranicích elementů $S_{j\ell} := T_j \cap T_\ell$. Funkce u_h se pak hledá jako prvek konečnědimenzionálního podprostoru X_h prostoru V, ve kterém leží slabé řešení původního problému. U metody konečných objemů typicky předpokládáme, že přibližné řešení je po částech konstantní funkce u_h, která je na společných hranicích elementů $S_{j\ell}$ obecně nespojitá. Zdá se tedy přirozenější použít metodu konečných objemů všude tam, kde se očekávají nespojitosti v řešení, což je typický případ u nelineárních hyperbolických zákonů zachování. Jak si za chvíli všimneme, je další důležitou vlastností metody konečných objemů její schopnost přirozeně vnést do schématu takzvanou numerickou vazkost pomocí jevu zvaného *upwinding*, což má v konečném důsledku vliv na schopnost schématu nalézt mezi všemi možnými řešeními problému právě ona fyzikální, entropická, která nás nejvíce zajímají. Touto metodou se nyní budeme zabývat podrobněji.

Metoda konečných objemů (viz např. [4]) tedy předpokládá, že přibližné řešení u_h Cauchyovy úlohy (1)–(2) je funkce po částech konstantní,

$$u_h(x,t) := u_j^k \quad \text{pro} \ \ x \in T_j, \ \ t_k \leqq t < t_{k+1}. \tag{12}$$

Počáteční podmínku u_0 lze ve většině praktických případů aproximovat například předpisem $u_j^0 := u_0(x_j)$, kde x_j je těžiště elementu T_j, má-li tato hodnota smysl. Pro obecnější funkci $u_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}$ lze například definovat $u_j^0 := |T_j|^{-1} \int_{T_j} u_0(x)\,\mathrm{d}x$.

Nejjednodušší variantou metody konečných objemů, na které se pokusíme ilustrovat skutečnost, že právě tato metoda se jeví jako nejvhodnější při řešení hyperbolických zákonů zachování, je explicitní schéma prvního řádu, charakterizované předpisem

$$u_j^{k+1} := u_j^k - \frac{\Delta t}{|T_j|} \sum_{\ell=1}^{r} g_{j\ell}(u_j^k, u_{j\ell}^k), \tag{13}$$

kde r je počet stran elementů T_j. Přitom $u_{j\ell}^k$ zde označuje hodnotu přibližného řešení v čase t_k na elementu $T_{j\ell}$, který je sousední k elementu T_j. Členy tohoto schématu si zaslouží krátký komentář. Zatímco výraz $(1/\Delta t)(u_j^{k+1} - u_j^k)$ je jednoduchá diferenční aproximace časové derivace, zbylé členy rovnice (13) představují aproximaci konvektivního členu v rovnici (1) a odrážejí tuto základní myšlenku metody konečných objemů: Pro hladké funkce f platí podle Greenovy věty

$$\nabla f(x_j) \sim \frac{1}{|T_j|} \int_{T_j} \nabla f = \frac{1}{|T_j|} \int_{\partial T_j} f\nu = \frac{1}{|T_j|} \sum_{\ell=1}^{r} \int_{S_{j\ell}} f\nu_{j\ell} \sim \frac{1}{|T_j|} \sum_{\ell=1}^{r} f(z_{j\ell})\widetilde{\nu}_{j\ell}. \tag{14}$$

Zde x_j je těžiště elementu T_j, $z_{j\ell}$ střed strany $S_{j\ell}$. Dále $\nu_{j\ell}$ je jednotkový vektor vnější normály, směřující z T_j do sousedního elementu $T_{j\ell}$, a $\widetilde{\nu}_{j\ell} := \nu_{j\ell}|S_{j\ell}|$. Člen $f(z_{j\ell})\widetilde{\nu}_{j\ell}$ představuje aproximaci toku veličiny $f(u)$ částí hranice $S_{j\ell}$ ve směru vektoru vnější normály. Tato hodnota toku je numericky aproximována *numerickým tokem* $g_{j\ell}(u_j^k, u_{j\ell}^k)$, který uvažuje hodnoty u_j^k, $u_{j\ell}^k$ přibližného řešení, ležící po obou stranách $S_{j\ell}$.

Na funkci $g_{j\ell} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ klademe tyto základní požadavky: pro všechna $R > 0$ existuje $c_g(R) > 0$ taková, že pro všechna $u, \overline{u}, v, \overline{v} \in B_R(0)$ platí

$$\big|g_{j\ell}(u,v) - g_{j\ell}(\overline{u},\overline{v})\big| \leqq c_g(R)\, h\big(|u-\overline{u}| + |v-\overline{v}|\big), \tag{15}$$

$$g_{j\ell}(u,v) = -g_{\ell j}(v,u), \tag{16}$$

$$g_{j\ell}(u,u) = f(u)\widetilde{\nu}_{j\ell}. \tag{17}$$

Podmínka (15) je vyjádřením lokální *lipschitzovské spojitosti* numerického toku $g_{j\ell}$ (stále máme na mysli případ dvou prostorových proměnných, ve kterých $|S_{j\ell}| \sim h$, odtud ono h na pravé straně vztahu (15), které by pro $x \in \mathbb{R}^n$ bylo nahrazeno výrazem h^{n-1}). O podmínce (16) hovoříme jako o *konzervativitě* numerického toku. Konečně podmínka *konzistence* (17) je vyjádřením již diskutované základní myšlenky metody konečných objemů (vztahy (14) a (17) osvětlují tvar pravé strany v (13)).

V případě skalární rovnice (kdy i numerický tok $g_{j\ell} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je skalární veličina) je velmi důležitá podmínka *monotonie* numerického toku, která říká, že

$$g_{j\ell} \text{ neklesá v první a neroste ve druhé proměnné.} \tag{18}$$

Právě tato nenápadná podmínka v sobě skrývá onen již zmíněný *upwinding*, který vnáší do numerického schématu umělou, numerickou vazkost. Ukazuje se, že zejména v důsledku toho monotónní schémata konvergují k *entropickému* řešení hyperbolických zákonů zachování.

Pokusme se tyto skutečnosti ilustrovat pro názornost na velmi jednoduchém jednodimenzionálním lineárním případě, tedy na rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad a \neq 0, \tag{19}$$

kterou aproximujeme (v souladu se značením (12)) výrazem

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} + V_j^k = 0. \tag{20}$$

Pro náhradu prostorové derivace, tedy pro výraz V_j^k, můžeme použít nejběžnější centrální ($V_j^k = C_j^k$), resp. tzv. „upwind“ ($V_j^k = U_j^k$) diferenci

$$C_j^k := a\,\frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2h}, \qquad \text{resp.} \qquad U_j^k := a^+\,\frac{u_j^k - u_{j-1}^k}{h} + a^-\,\frac{u_{j+1}^k - u_j^k}{h}, \tag{21}$$

kde $a^+ := \max(a,0)$, $a^- := \min(a,0)$. Struktura výrazu U_j^k vyjadřuje skutečnost, že pro $a > 0$ se používá zpětná a pro $a < 0$ dopředná prostorová diference. To je v souladu s tím, co víme o řešení u rovnice (19), ve které koeficient $a \neq 0$ určuje směr šíření charakteristik. Například v případě $a > 0$ směřují charakteristiky „zleva doprava“, tedy je v pořádku, že uvažujeme zpětnou prostorovou diferenci, preferující informaci přicházející „zleva“. Použití U_j^k tedy vede ke schématu, které *respektuje směr lokálních charakteristik úlohy* — provádí aproximaci prostorových derivací v souladu s tím, z které strany přichází informace o hodnotách řešení, tedy jaksi „po větru“ neboli *up-wind.*

Přepíšeme-li navíc schéma (20), ve kterém použijeme pro V_j^k aproximaci tvaru U_j^k, do obecného tvaru (13), dostaneme porovnáním tvar numerického toku

$$g_{j\ell}(u,v) = a^+u \,+\, a^-v. \tag{22}$$

Takto sestavený numerický tok tedy splňuje podmínku monotonie (18), což ilustruje skutečnost, že požadavek monotonie numerického toku v sobě skrývá upwinding.

Konečně vyčíslíme-li, jaký rozdíl vznikne, použijeme-li aproximaci U_j^k místo C_j^k, dostaneme

$$C_j^k - U_j^k = \frac{|a|h}{2}\,\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} =: \frac{|a|h}{2}\,\Delta_h^2 u_j^k, \tag{23}$$

na kterýžto výraz lze nahlížet jako na symetrickou numerickou aproximaci druhé derivace funkce u v bodě (t_k, x_j), která je přenásobena malým ($h \ll 1$) koeficientem.

Můžeme tedy psát, že v námi studované modelové situaci je

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} + U_j^k = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} + C_j^k = \frac{|a|h}{2}\,\Delta_h^2 u_j^k, \tag{24}$$

a shrnout: Upwinding — náhrada centrálních aproximací prostorových derivací nesymetrickými, při kterých se respektuje lokální směr šíření informace — vnáší do schématu (které se tím stává schématem monotónním) dodatečnou (umělou, numerickou) vazkost, jejíž velikost je úměrná parametru sítě h. Vzhledem k tomu, že teoretické výsledky ukazují, že řešení získaná pomocí umělých, mizejících vazkostí automaticky splňují entropickou nerovnost, probouzí v nás tato skutečnost naději, že by splnění entropické podmínky mohlo být automaticky včleněno do námi navrhovaného schématu a že bychom tedy s jeho pomocí mohli dokonvergovat k fyzikálnímu, entropickému řešení.

Je ovšem nutno říci, že tyto úvahy jsou založeny pouze na heuristickém základě, byly nahlédnuty jen v nejjednodušším jednodimenzionálním lineárním případě, a tak již uvedená tvrzení zůstávají hypotézami až do doby, než se je podaří matematicky dokázat nebo alespoň numerickými experimenty potvrdit. Zatím jsme pouze v situaci turisty, který ví, že k cíli lze dojít po červené značce, a jednu takovou s radostí objevil na pěšině, kterou se vydal.

Všimněme si na závěr krátce takovýchto matematických výsledků, tedy konvergenčních výsledků pro monotónní schémata, aproximující skalární zákony zachování ve více prostorových dimenzích. V tomto případě je existence a jednoznačnost slabého entropického řešení zaručena Kružkovovou větou 1.4.

Nebudeme se pro stručnost zabývat všemi podrobnostmi, čtenáře odkazujeme zejména na [4], [5], [10]. My zde pouze podáme popis předpokladů a strategie, které k důkazu jedné takové poměrně obecné věty o konvergenci vedou.

- Triangulace a numerická stabilita schématu: předpokládáme, že triangulace je *regulární*, tedy že existuje konstanta c_0 (nezávislá na h) taková, že

$$\sup_j \frac{h^2}{|T_j|} \leqq c_0. \tag{25}$$

  Dále vyžadujeme splnění následující, tzv. CFL (*Courantovy-Friedrichsovy-Lewyovy*) podmínky: Je-li $\|u_0\|_\infty \leqq M$, požadujeme, aby existovala konstanta c_1 taková, že platí

$$0 < c_1 \leqq \frac{\Delta t}{h} \leqq \frac{1}{(r+2)\, c_g(M)\, c_0}\,, \tag{26}$$

  kde r je počet stran T_j a $c_g(M)$ je konstanta lipschitzovské spojitosti $g_{j\ell}$ na kouli o poloměru M (viz (15)).

- Z monotonie schématu (18) a CFL-podmínky (26) lze odvodit apriorní odhad $\|u_h\|_\infty \leqq c$ nezávislý na h. Tento odhad stačí k tomu, aby z posloupnosti přibližných řešení bylo možno vybrat slabě-* konvergující podposloupnost přibližných řešení a obdržet tak limitní prvek. Zdaleka to však nestačí k tomu, abychom ukázali, že tento limitní prvek je řešením původní nelineární rovnice. K tomu je potřeba poměrně technická, takzvaná $(\Delta t)^\beta$-podmínka, která zní takto: existuje $\beta \in \langle 0, 1)$ takové, že pro každou kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}^n$ existuje konstanta $c = c(K)$ taková, že

$$(\Delta t)^\beta h \sum_k \sum_{T_j \cap K \neq \emptyset} \sum_{\ell=1}^{r} \left| g_{j\ell}(u_j^k, u_\ell^k) - \nu_{j\ell} f(u_j^k) \right| \leqq c(K). \tag{27}$$

  Ukazuje se, že tato podmínka je *zobecněním požadavku stejnoměrně omezené totální variace* aproximující posloupnosti u_h a že splnění této podmínky je přirozenou vlastností jistých tříd monotónních numerických toků. Podrobněji viz [10].

- Ke splnění entropické podmínky je třeba využít nejen monotonie numerického toku $g_{j\ell}$, prozrazující přítomnost numerické vazkosti ve schématu. Ukazuje se, že je zapotřebí navíc předpokládat, že $g_{j\ell}$ lze psát ve tvaru

$$g_{j\ell}(u, v) = \frac{f(u) + f(v)}{2}\, \widetilde{\nu}_{j\ell} + \varphi_{j\ell}(u) - \varphi_{j\ell}(v), \tag{28}$$

kde $\varphi_{j\ell}$ je jakákoli lipschitzovsky spojitá funkce splňující alespoň ve skoro všech bodech nerovnost

$$\varphi'_{j\ell}(u) \geqq \frac{1}{2}\left|f'(u)\widetilde{\nu}_{j\ell}\right|. \tag{29}$$

Tuto podmínku lze interpretovat jako *dolní odhad množství umělé numerické vazkosti obsažené ve schématu.* Aby limitní prvek splňoval entropickou nerovnost, je tedy třeba, aby schéma nejen obsahovalo nějakou numerickou vazkost, ale aby množství této vazkosti bylo větší než jakási známá kritická hodnota. Dále lze ukázat, že numerické toky splňující podmínku (28) splňují i podmínku (27). Podmínka (28) tak charakterizuje jednu třídu monotónních schémat, pro kterou lze dokázat očekávaný výsledek.

V článku [5] jsou právě naznačené kroky provedeny podrobně a lze je shrnout do následující hlavní věty.

Věta 2.1. *Buď* $u_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ *a nechť platí* (26). *Nechť dále* u_h *je definováno schématem* (13), *kde numerický tok* $g_{j\ell}$ *splňuje* (15)–(18), (28)–(29). *Potom*

$$u_h \to u \quad \text{v } L^1, \tag{30}$$

kde u *je jednoznačně určené (Kružkovovo) slabé entropické řešení Cauchyovy úlohy* (1)–(2).

L i t e r a t u r a

[1] Bressan, A.: *Hyperbolic systems of conservation laws. The one dimensional Cauchy problem.* Oxford University Press 1998.

[2] Glimm, J.: *Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations.* Comm. Pure Appl. Math. *18* (1965), 697–715.

[3] Godlewski, E., Raviart, P. A.: *Hyperbolic Systems of Conservation Laws.* Mathematiques & Applications, S. M. A. I., Ellipses, Paris 1991 (in English).

[4] Kröner, D.: *Numerical Schemes for Conservation Laws.* Teubner, Leipzig–Stuttgart 1996.

[5] Kröner, D., Rokyta, M.: *Convergence of upwind finite volume schemes for scalar conservation laws in two dimensions.* SIAM J. Numer. Anal. *31*, no. 2 (1994), 324–343.

[6] Kružkov, S. N.: *First order quasilinear equations in several independent variables.* Math. USSR Sbornik *10*, no. 2 (1970), 217–243 (in English).

[7] Lax, P. D.: *Hyperbolic systems of conservation laws II.* Comm. Pure Appl. Math. *10* (1957), 537–566.

[8] Málek, J., Nečas, J., Rokyta, M., Růžička, M.: *Weak and measure-valued solutions to evolutionary partial differential equations.* Chapman & Hall 1996.

[9] Rauch, J.: *BV estimates fail for most quasilinear hyperbolic systems in dimension greater than one.* Comm. Math. Phys. *106* (1986), 481–484.

[10] Rokyta, M.: *A suitable replacement of the BV condition for finite volume schemes on unstructured grids.* In: *Numerical Modelling in Continuum Mechanics*, Feistauer, M., Rannacher, R., Kozel, K. (eds.), 267–274, Matfyzpress, Praha 2001.

[11] Serre, D.: *Systemes de lois de conservation.* Diderot Editeur, 1996.

[12] Sever, M.: *Uniqueness failure for entropy solutions of hyperbolic systems of conservation laws.* Comm. Pure Appl. Math. *42* (1989), 173–183.

[13] Smoller, J.: *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations.* Grundlehren der math. Wissenschaften, Bd. 258, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1983 (1st ed.), 1994 (2nd ed.).