Jaroslav Lukeš; Ivan Netuka; Jiří Veselý
Choquetova teorie kapacit

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 47 (2002), No. 4, 265--279

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141141`

Choquetova teorie kapacit

Jaroslav Lukeš, Ivan Netuka a Jiří Veselý, Praha

1. Newtonova kapacita

Jednou ze základních otázek klasické teorie potenciálu je problém existence rovnovážného rozložení. Z pohledu elektrostatiky problém spočívá v nalezení rozložení elektrického náboje na vodiči umístěném uvnitř uzemněné sféry. Náboj se rozloží na povrchu vodiče tak, že jeho potenciál je na vodiči konstantní. Protože vně vodiče není žádný náboj, potenciál rovnovážného rozložení je vně vodiče harmonickou funkcí a je na uzemněné sféře roven nule. Ve fyzice se podíl celkového náboje rovnovážného rozložení na vodiči a (konstantní) hodnoty rovnovážného potenciálu na vodiči nazývá kapacita (kondenzátoru tvořeného vodičem a sférou) [1]).

V našem matematickém výkladu bude roli vodiče hrát kompaktní podmnožina K eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^m$ dimenze $m > 2$ a za náboj na K budeme považovat borelovskou míru μ s nosičem $\operatorname{supp}\mu \subset K$. Abychom se vyhnuli zavádění Greenova potenciálu, místo vnitřku sféry budeme uvažovat celý prostor. Připomeňme, že *Newtonův potenciál* míry μ s kompaktním nosičem v K je funkce

$$N\mu : x \longmapsto \int_K \frac{\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^{m-2}}\,, \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Předpokládejme, že pro kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}^m$ existuje míra μ s nosičem v K taková, že $N\mu = 1$ na K. Potom je $N\mu$ rovnovážný potenciál pro K a v souladu s elektrostatikou se kapacitou $\operatorname{cap}(K)$ kompaktu K rozumí „velikost náboje“, tj. $\mu(K)$. Je-li K např. uzavřená koule $B(0,r)$ o středu v počátku a poloměru r, rovnovážný potenciál má v bodě $x \in \mathbb{R}^m$ hodnotu[2])

$$r^{m-2}\min\bigl(|x|^{2-m},\, r^{2-m}\bigr)$$

[1]) Podrobnější výklad lze nalézt např. v [30] nebo [31].
[2]) Toto tvrzení je dokázáno např. v [6], s. 135.

Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc. (1940), katedra matematické analýzy MFF UK, e-mail: lukes@karlin.mff.cuni.cz; prof. RNDr. Ivan Netuka, DrSc. (1944), MFF UK, e-mail: netuka@karlin.mff.cuni.cz; doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc. (1940), Matematický ústav MFF UK, e-mail: jvesely@karlin.mff.cuni.cz; Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8 – Karlín.

Podporováno výzkumným záměrem MSM 1132 00007.

a je r^{m-2}-násobkem potenciálu normalizované povrchové míry na sféře $S(0,r)$. Proto tedy $\operatorname{cap}\bigl(B(0,r)\bigr) = r^{m-2}$. Z toho je již vidět, jak daleko má kapacita jako množinová funkce, zatím definovaná na kompaktech, od vlastnosti aditivity[3]).

Pro kompaktní množinu K obecně neexistuje míra μ na K taková, že $N\mu = 1$ na K, např. pokud má kompakt K „ostré hroty". Pro kompakt $K \subset \mathbb{R}^m$ se definuje *Newtonova kapacita* K rovností[4])

$$\operatorname{cap}(K) = \sup\{\nu(K) : \operatorname{supp}\nu \subset K,\ N\nu \leqq 1 \text{ na } K\}.$$

Významné místo v teorii potenciálu zaujímají množiny nulové kapacity. Hrají roli zanedbatelných množin, podobně jako množiny nulové Lebesgueovy míry v teorii integrálu.

Připomeňme, že $P \subset \mathbb{R}^m$ se nazývá *polární*, jestliže pro každou kouli $B \subset \mathbb{R}^m$ existuje míra ν s kompaktním nosičem taková, že $P \cap B \subset \{x \in \mathbb{R}^m : N\nu(x) = \infty\}$. Pro kompakt $K \subset \mathbb{R}^m$ platí toto tvrzení: $\operatorname{cap}(K) = 0$, právě když K je množinou „pólů" určitého Newtonova potenciálu, tedy právě když existuje míra ν na K taková, že $K = \{x \in \mathbb{R}^m : N\nu(x) = \infty\}$[5]). Tedy kompaktní množina je polární, právě když má nulovou kapacitu[6]). Množina „pólů" Newtonova potenciálu není však obecně kompaktní, takže zatím nemůžeme o její kapacitě nic říci. Pro libovolnou množinu $M \subset \mathbb{R}^m$ lze samozřejmě definovat *vnitřní kapacitu*

$$\operatorname{cap}_*(M) = \sup\{\operatorname{cap}(K) :\ K \text{ kompaktní},\ K \subset M\}.$$

Potom platí, že *množina P je polární, právě když má nulovou vnitřní kapacitu.* Ve skutečnosti však platí daleko silnější výsledek: polární množiny splývají s množinami vnější kapacity nula[7]), kde se, v analogii s teorií míry, pro $M \subset \mathbb{R}^m$ definuje

$$\operatorname{cap}^*(M) = \inf\{\operatorname{cap}_*(V) :\ V \text{ otevřená},\ V \supset M\}.$$

---

[3]) V dalším výkladu ukazujeme, jak se přirozeným způsobem zavádí pojem kapacity pro každou borelovskou množinu. Následující tvrzení dokázané v [8] ukazuje, že pojem kapacity je protipólem aditivních množinových funkcí: *Každá borelovská množina kladné kapacity je disjunktním sjednocením nespočetně mnoha borelovských množin stejné kapacity.*

[4]) Pojem kapacity byl matematicky poprvé zaveden r. 1924 N. Wienerem v [32]. Pro kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}^m$ se uvažuje otevřená množina S s hladkou hranicí ∂S a vnější normálou n^S taková, že $K \subset S$. Kapacitou množiny K Wiener rozumí číslo

$$-c_m \int_{\partial S} n^S \cdot \operatorname{grad} u \,\mathrm{d}\sigma,$$

kde c_m je kladný normalizační faktor a σ je povrchová míra na ∂S. V uvedeném článku užívá Wiener pojem kapacity k důkazu nutné a postačující podmínky pro regularitu hraničního bodu pro Dirichletovu úlohu (tzv. Wienerovo kritérium).

[5]) Tzv. Evansova věta; viz [16], s. 152. Elementární přístup lze nalézt v [7].

[6]) Klasická teorie potenciálu má svůj pravděpodobnostní protějšek založený na studiu Brownova pohybu; viz [28], [13]. V něm pak polární množiny vystupují, intuitivně řečeno, jako ty, které brownovská částice „nevidí": *P je polární, právě když s pravděpodobností* 1 *trajektorie žádné brownovské částice nenarazí na P*. Matematickou formulaci lze nalézt např. v [28], s. 20 a 144, nebo [8], s. 283, či [13], s. 636.

[7]) Historické poznámky o polárních množinách a jejich vztahu k množinám vnitřní a vnější nulové kapacity lze nalézt v [16], [6] či [21].

Vnitřní kapacita se v teorii potenciálu často vyskytuje. Např. se dokazuje, že vnitřní kapacita množiny iregulárních bodů pro Dirichletovu úlohu na omezené otevřené množině je rovna nule[8]). Také platí, že infimum každé neprázdné množiny potenciálů se liší od jistého potenciálu pouze na množině nulové vnitřní kapacity[9]). Je možné výsledky tohoto typu zesílit tím, že zaměníme vnitřní kapacitu za vnější? Tato otázka nás vede k problému kapacitability[10]): které množiny jsou *kapacitabilní*, tj. pro které množiny $M \subset \mathbb{R}^m$ platí rovnost $\operatorname{cap}_*(M) = \operatorname{cap}^*(M)$?

2. Choquetova kapacita a vnější kapacita

Problémem kapacitability se budeme zabývat v obecnějším kontextu. Dále budeme místo $\mathbb{R}^m$ uvažovat lokálně kompaktní (Hausdorffův) topologický prostor X se spočetnou bází a symbolem $\mathcal{K}(X)$ nebo jen $\mathcal{K}$ označíme systém všech kompaktních podmnožin prostoru X. Následující definice Choquetovy kapacity je motivována dvěma skutečnostmi:

(1) vlastnosti z její definice má Newtonova kapacita;
(2) pokud přirozeným způsobem rozšíříme Choquetovu kapacitu na vnější a vnitřní kapacitu, tvoří kapacitabilní množiny velice rozsáhlý množinový systém.

Říkáme, že funkce $\gamma : \mathcal{K} \to [\,0, \infty)$ je *Choquetova kapacita*, jestliže platí:

(a) jsou-li $K, L \in \mathcal{K}$ a $K \subset L$, pak $\gamma(K) \leqq \gamma(L)$;
(b) jsou-li $K_n \in \mathcal{K}$, $K_n \searrow K$, pak $\gamma(K_n) \to \gamma(K)$;
(c) jsou-li $K, L \in \mathcal{K}$, pak $\gamma(K \cup L) + \gamma(K \cap L) \leqq \gamma(K) + \gamma(L)$.

Jinými slovy: Choquetova kapacita je neklesající nezáporná (reálná) množinová funkce definovaná na kompaktech, která je zprava spojitá a silně subaditivní.

Pro Choquetovu kapacitu se *vnitřní* a *vnější kapacita* vytvářejí přirozeným způsobem, podobně jako pro Newtonovu kapacitu: pro $A \subset X$ klademe

$$\gamma_*(A) = \sup\{\gamma(K) : K \in \mathcal{K},\ K \subset A\},$$
$$\gamma^*(A) = \inf\{\gamma_*(U) : U \text{ otevřená},\ U \supset A\}.$$

Množina A se nazývá *kapacitabilní*, jestliže $\gamma_*(A) = \gamma^*(A)$. Snadno se odvodí, že pro $K \in \mathcal{K}$ platí $\gamma(K) = \gamma^*(K)$, takže kapacitabilitu lze vyjádřit pomocí vnější kapacity takto: množina $A \subset X$ je kapacitabilní, právě když

$$\gamma^*(A) = \sup\{\gamma^*(K) : K \in \mathcal{K},\ K \subset A\}. \tag{$*$}$$

[8]) Elementární důkaz je uveden v [7].

[9]) Obecnější tvrzení lze nalézt např. v [6], [16] či [21].

[10]) V článku *Vznik teorie kapacit: zamyšlení nad vlastní zkušeností* G. Choquet zajímavě popisuje, jak k větě o kapacitabilitě dospěl; viz [19].

Z vlastností (a), (b) a (c) G. Choquet odvodil[11]), že uvedeným postupem vytvořená množinová funkce γ^* definovaná na systému $\mathcal{P}(X)$ všech podmnožin prostoru X je vnější kapacita ve smyslu následující definice:

Říkáme, že funkce $c : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ je *vnější kapacita* (na X), jestliže má tyto dvě vlastnosti:

(a) $\sup c(A_n) = c\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big)$ pro každou neklesající posloupnost $\{A_n\}$ podmnožin prostoru X;

(b) $\inf c(K_n) = c\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n\Big)$ pro každou nerostoucí posloupnost $\{K_n\}$ kompaktních podmnožin prostoru X.

Pro vnější kapacitu c se v souladu s podmínkou $(*)$ množina $A \subset X$ nazývá *c-kapacitabilní*, jestliže
$$c(A) = \sup\{c(K) : K \in \mathcal{K},\ K \subset A\}.$$

Dále budeme množinu $A \subset X$ nazývat *univerzálně kapacitabilní*, když A je c-kapacitabilní pro každou vnější kapacitu c na X.

V části 3 dokážeme, že každá analytická množina[12]) v X je univerzálně kapacitabilní[13]), a v části 4 ukážeme, že každá borelovská množina je analytická. Systém kapacitabilních množin je tedy překvapivě bohatý.

3. Choquetova věta o kapacitabilitě

Před definicí analytické množiny zavedeme toto označení. Pro lokálně kompaktní prostor Z označíme $K_{\sigma\delta}(Z)$ systém všech spočetných průniků množin, které jsou spočetnými sjednoceními kompaktních podmnožin prostoru Z. Platí tedy

$$K_{\sigma\delta}(Z) = \Big\{\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} K_{ij} : K_{ij} \text{ kompaktní}, K_{ij} \subset Z\Big\}.$$

Pokud bychom v této definici navíc předpokládali, že pro každé přirozené i je posloupnost $\{K_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ neklesající, dostali bychom opět stejný systém.

[11]) Věta o rozšíření Choquetovy kapacity na vnější kapacitu je dokázána např. v [18], Volume I, [6], [16], [21].

[12]) Poznamenejme, že neexistuje terminologická jednota: *analytické* množiny se často nazývají *suslinovské*. Kořenům těchto a dalších názvů je věnován článek [23], který obsahuje pokus o zhodnocení podílu P. S. Aleksandrova, F. Hausdorffa, N. N. Luzina a M. Ya. Suslina na vytvoření tohoto pojmu. O různých přístupech k analytickým množinám se lze poučit např. z [13], [18], Volume I, [21], díl III.

[13]) Věta o kapacitabilitě je pro obecnější kontext Hausdorffových topologických prostorů vyložena např. v [18], Volume I. Tamtéž je studována také zcela abstraktní (netopologická) teorie kapacitability. Z dalších pramenů uvádíme [27], [10], [11], [20]. Náš výklad sleduje přístup, jehož autorem je C. Dellacherie a který je prezentován v [8]; viz též tam uvedené citace.

Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor se spočetnou bází. Množina $A \subset X$ se nazývá *analytická*, jestliže existují lokálně kompaktní prostor Y se spočetnou bází a množina $B \in K_{\sigma\delta}(X \times Y)$ takové, že A je obrazem B při projekci π_X prostoru $X \times Y$ na X. Systém všech analytických podmnožin prostoru X označíme $\mathcal{A}(X)$.

Protože každý lokálně kompaktní prostor se spočetnou bází je podprostorem kompaktního prostoru se spočetnou bází, v definici analytické množiny lze předpokládat, že Y je dokonce kompaktní prostor.

Další postup bude tento: pomocí topologické hry zavedeme pojem hyperkapacitabilní množiny. Pak dokážeme, že každá hyperkapacitabilní množina je univerzálně kapacitabilní a že každá analytická podmnožina prostoru X je hyperkapacitabilní.

Pro popis topologické hry je účelné zavést pojem kapacitance. Podmnožina $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ se nazývá *kapacitance* (na X), splňuje-li tyto dvě podmínky:

(a) je-li $A \in \mathcal{C}$, $A \subset A' \subset X$, pak $A' \in \mathcal{C}$;

(b) je-li $\{A_n\}$ neklesající posloupnost podmnožin X, pro kterou $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$, pak existuje přirozené číslo n takové, že $A_n \in \mathcal{C}$.

Jednoduchými příklady kapacitancí jsou např. $\mathcal{P}(X)$, dále systém všech neprázdných podmnožin X nebo systém všech nespočetných podmnožin X. Velmi důležitý je tento příklad: jestliže c je vnější kapacita na X a $a \in \mathbb{R}$, pak $\{A \in \mathcal{P}(X) : c(A) > a\}$ je kapacitance. Pojem kapacitance intuitivně popisuje systém dostatečně „masivních“ množin.

Protože prostor X má spočetnou bázi, existují kompaktní množiny $K_n \subset X$, pro něž $K_n \nearrow X$. Je-li tedy $\mathcal{C}$ kapacitance na X a $A \in \mathcal{C}$, pak pro vhodné n platí $A \cap K_n \in \mathcal{C}$ podle (b), tudíž A obsahuje relativně kompaktní podmnožinu z $\mathcal{C}$.

Nyní popíšeme *topologickou hru*: hrají ji dva hráči, Hráč α, který volí kapacitance, a Hráč β, který volí podmnožiny prostoru X.

Nechť $A \subset X$. Nejprve Hráč α zvolí kapacitanci $\mathcal{C}_1$ takovou, že $A \in \mathcal{C}_1$. Hráč β odpoví volbou relativně kompaktní množiny $A_1 \subset A$, pro niž $A_1 \in \mathcal{C}_1$. Nato Hráč α zvolí kapacitanci $\mathcal{C}_2$ tak, aby $A_1 \in \mathcal{C}_2$, a Hráč β vybere množinu $A_2 \subset A_1$, pro niž $A_2 \in \mathcal{C}_2$. Hra pokračuje analogicky tímto způsobem dále. Řekneme, že Hráč β ve hře zvítězil, když je kompaktní množina $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$ částí množiny A. Množina A se nazývá *hyperkapacitabilní*, když Hráč β může zvítězit nezávisle na tom, jak Hráč α volí kapacitance.

3.1. Tvrzení. *Každá hyperkapacitabilní podmnožina prostoru X je univerzálně kapacitabilní.*

Důkaz. Nechť $A \subset X$ je hyperkapacitabilní množina, c je vnější kapacita a nechť $a < c(A)$. Protože Hráč α může pokaždé volit nezávisle na n kapacitanci

$$\mathcal{C}_n = \{B \in \mathcal{P}(X) : c(B) > a\},$$

existuje nerostoucí posloupnost relativně kompaktních množin $A_n \subset A$ takových, že $c(A_n) > a$ pro všechna n a pro množinu $K = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$ platí $K \subset A$. Zřejmě K je kompaktní množina, pro niž platí

$$c(K) = \inf c(\overline{A_n}) \geqq \inf c(A_n) \geqq a.$$

Tím jsme dokázali, že A je c-kapacitabilní množina. ■

3.2. Věta. *Každá analytická podmnožina prostoru X je hyperkapacitabilní.*

Důkaz. Nechť $A \in \mathcal{A}(X)$. Podle předpokladu existuje kompaktní prostor Y se spočetnou bází a pro každé $i, j \in \mathbb{N}$ existuje kompaktní množina K_{ij} v $X \times Y$ tak, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ je posloupnost $\{K_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ neklesající a pro množinu

$$B = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{ij}$$

platí $\pi_X(B) = A$. Nechť $\mathcal{C}_1$ je kapacitance na X, pro niž $A \in \mathcal{C}_1$. Posloupnost $\{B \cap K_{1j}\}_{j=1}^{\infty}$ je neklesající a její sjednocení je rovno B, takže posloupnost $\{\pi_X(B \cap K_{1j})\}_{j=1}^{\infty}$ je neklesající a její sjednocení je rovno množině A. Protože $\mathcal{C}_1$ je kapacitance, existuje $m_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $A_1 = \pi_X(B \cap K_{1m_1}) \in \mathcal{C}_1$.

Hráč α volí nyní kapacitanci $\mathcal{C}_2$, pro niž $A_1 \in \mathcal{C}_2$. Protože je $B \cap K_{1m_1}$ sjednocením neklesající posloupnosti $\{B \cap K_{1m_1} \cap K_{2j}\}_{j=1}^{\infty}$, existuje $m_2 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$A_2 = \pi_X(B \cap K_{1m_1} \cap K_{2m_2}) \in \mathcal{C}_2.$$

Hráč β tedy vždy může zvolit posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ množin tvaru

$$A_n = \pi_X(B \cap K_{1m_1} \cap K_{2m_2} \cap \ldots \cap K_{nm_n})$$

pro vhodnou posloupnost $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel. Definujeme-li

$$K_n = \bigcap_{i=1}^{n} K_{im_i},$$

je $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost podmnožin $X \times Y$. Přitom jsou všechny K_n kompaktní, a proto

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \pi_X(K_n) = \pi_X\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\right),$$

a tedy platí

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \pi_X(K_n) = \pi_X\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\right) \subset \pi_X(B) = A$$

a množina A je hyperkapacitabilní. ■

3.3. Korolár. *Každá analytická podmnožina prostoru X je univerzálně kapacitabilní.*

3.4. Poznámka. Je známo[14]), že systém analytických podmnožin splývá se systémem hyperkapacitabilních množin.

3.5. Příklad. Označme λ^* vnější Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}$ a π nechť je ortogonální projekce $\mathbb{R}^2$ na osu x. Pro $M \subset \mathbb{R}^2$ definujeme

$$c(M) = \lambda^*\big(\pi(M)\big).$$

Není obtížné si rozmyslet, že c je vnější kapacita. Nechť $N \subset [0,1]$ je množina, která není lebesgueovsky měřitelná, a nechť

$$M_1 = N \times \{0\}, \quad M_2 = [0,1] \times \{0\} \quad \text{a} \quad M_3 = [0,1] \times \{1\}.$$

Množiny $M_1 \cup M_3$ a M_2 jsou zřejmě kapacitabilní, avšak $M_1 = (M_1 \cup M_3) \cap M_2$ kapacitabilní není. Příklad ukazuje, že systém všech kapacitabilních množin není uzavřený ani na konečné průniky. Snažit se tedy dokazovat kapacitabilitu borelovských množin podle klasického schématu (dokázat kapacitabilitu otevřených množin a odvodit uzavřenost systému kapacitabilních množin na spočetná sjednocení a na doplňky) je beznadějné.

4. Analytické a borelovské množiny

V této části ukážeme, že každá borelovská podmnožina prostoru X je analytická. Nejprve dokážeme, že $\mathcal{A}(X)$ je systém uzavřený na spočetné průniky a spočetná sjednocení.

4.1. Tvrzení. *Nechť $\{A_n\}$ je posloupnost množin z $\mathcal{A}(X)$. Potom $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}(X)$ a $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}(X)$.*

Důkaz. Zvolme kompaktní prostory Y_n se spočetnou bází a množiny $B_n \in K_{\sigma\delta}(X \times Y_n)$ takové, že $\pi_X(B_n) = A_n$. Potom je topologický součin $Y = \prod\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$ kompaktní prostor se spočetnou bází. Pro $n \in N$ označme φ_n projekci prostoru $X \times Y$ na $X \times Y_n$. Vzor každé kompaktní podmnožiny prostoru $X \times Y_n$ při zobrazení φ_n je kompaktní podmnožina v prostoru $X \times Y$, takže

$$B_n' = \varphi_n^{-1}(B_n) \in K_{\sigma\delta}(X \times Y) \quad \text{a} \quad B' = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n' \in K_{\sigma\delta}(X \times Y).$$

K důkazu, že $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}(X)$, stačí ověřit rovnost $\pi_X(B') = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Jedna inkluze je zřejmá, neboť $\pi_X(B') \subset \pi_X(B_n') = A_n$ pro každé n. Nechť tedy $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $y_n \in Y_n$ tak, že $(x, y_n) \in B_n$. Tudíž pro $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí

[14]) O vztahu analytických a hyperkapacitabilních množin se lze poučit v [10].

$(x, y) \in X \times Y$ a $\varphi_n(x, y) = (x, y_n) \in B_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, neboli $(x, y) \in B'$. Dokázali jsme, že $x \in \pi_X(B')$, a rovnost je ověřena.

Není těžké si rozmyslet, že

$$B'' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big(B'_n \times \{n\}\big) \in \mathcal{K}_{\sigma\delta}(X \times Y \times \mathbb{N}),$$

takže $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \pi_X(B'') \in \mathcal{A}(X)$. ■

4.2. Korolár. *Každá borelovská podmnožina prostoru X je analytická.*

Důkaz. Pro $B \subset X$ označme B^{c} doplněk množiny B. Definujme

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A}(X) : A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}(X)\}.$$

Pak $A \in \mathcal{D}$, právě když $A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{D}$. Je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost množin z $\mathcal{D}$, je podle tvrzení 4.1

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}(X), \qquad \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big)^{\mathrm{c}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}(X),$$

tudíž $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$. Jestliže $K \subset X$ je kompaktní množina, potom je zřejmě $K \times \{1\} \in \in \mathcal{K}_{\sigma\delta}(X \times \{1\})$, a proto $K = \pi_X(K \times \{1\}) \in \mathcal{A}(X)$. Protože systém $\mathcal{D}$ je uzavřený na spočetná sjednocení a pro každou otevřenou množinu U je U a také U^{c} spočetným sjednocením kompaktních množin, každá otevřená množina je prvkem $\mathcal{D}$. Pro systém $\mathcal{B}(X)$ borelovských podmnožin X tudíž platí $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{A}(X)$. ■

4.3. Poznámky. (a) Je známo[15]), že systém borelovských množin splývá s $\mathcal{D}$, neboli že borelovské množiny jsou právě všechny analytické množiny, jejichž doplněk je analytický.

(b) Obraz borelovské podmnožiny $\mathbb{R}^2$ při projekci na $\mathbb{R}$ nemusí být borelovská množina[16]), avšak je to vždy analytická množina. Ve skutečnosti se analytické množiny chovají rozumně i při obecnějších zobrazeních[17]): *Je-li $A \in \mathcal{A}(X)$, Y lokálně kompaktní prostor se spočetnou bází a $\varphi : X \to Y$ borelovsky měřitelné zobrazení, potom $\varphi(A) \in \mathcal{A}(Y)$.*

Odtud vyplývá toto důležité tvrzení: *Pro množinu $A \subset X$ jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *množina A je analytická;*

(ii) *existuje lokálně kompaktní prostor Y se spočetnou bází, borelovská množina $B \subset Y$ a spojité zobrazení $\varphi : Y \to X$ takové, že $\varphi(B) = A$;*

(iii) *existuje lokálně kompaktní prostor Y se spočetnou bází, borelovská množina $B \subset Y$ a borelovsky měřitelné zobrazení $\varphi : Y \to X$ takové, že $\varphi(B) = A$.*

---

[15]) Tvrzení vyplývá např. z oddělovací věty pro analytické množiny; viz [8], s. 33.

[16]) Obecnější situace je studována v [22] v § 38. Poznamenejme, že právě chyba v Lebesgueově důkazu nesprávného tvrzení, že projekce borelovské množiny je borelovská, vedla k zavedení analytických množin.

[17]) Důkaz tvrzení, že *borelovský obraz borelovské množiny je analytický*, je pro lokálně kompaktní prostory X, Y se spočetnou bází uveden např. v [8], s. 32–33.

5. Aplikace

5.1. Teorie míry. Nechť μ je borelovská míra na lokálně kompaktním prostoru X se spočetnou bází, která je konečná na všech kompaktech v X. Definujme obvyklým způsobem vnější míru: pro $M \subset X$ položme

$$\mu^*(M) = \inf\{\mu(G) : G \text{ otevřená}, G \supset M\}.$$

Snadno se dokáže, že μ^* je vnější kapacita. Podle věty o kapacitabilitě platí pro každou borelovskou množinu $B \subset X$

$$\sup\{\mu(K) : K \text{ kompaktní}, K \subset B\} = \mu(B) = \inf\{\mu(G) : G \text{ otevřená}, G \supset B\},$$

takže míra μ je regulární.

5.2. Hausdorffovy míry. Připomeňme definici h-Hausdorffovy (vnější) míry v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^m$. Nechť $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ je rostoucí spojitá funkce, $h(0) = 0$. Systém všech uzavřených koulí v prostoru $\mathbb{R}^m$ označme $\mathcal{B}$ a pro $B \in \mathcal{B}$ označme $r(B)$ poloměr koule B. Pro $M \subset \mathbb{R}^m$ a $\varrho > 0$ definujme

$$m_h^\varrho(M) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} h(r(B_n)) : B_n \in \mathcal{B},\ r(B_n) \leqq \varrho,\ M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right\}.$$

Potom

$$m_h(M) = \lim_{\varrho\to 0+} m_h^\varrho(M)$$

se nazývá *h-Hausdorffova míra* množiny M. Aplikace věty o kapacitabilitě umožňuje dokázat toto pozoruhodné tvrzení[18]): *Je-li $M \subset \mathbb{R}^m$ borelovská (nebo obecněji analytická) množina, pro kterou $m_h(M) > 0$, potom existuje uzavřená množina $F \subset M$, pro niž je*

$$0 < m_h(F) < \infty.$$

5.3. Aproximace kapacit mírami. Je známo, že Newtonovu kapacitu lze vyjádřit jako horní obálku množiny Radonových měr. Podobnou otázkou pro obecnější kapacity se zabývali kupříkladu V. Strassen, C. Dellacherie či B. Anger. Platí např. následující věta o aproximaci:

Věta. *Nechť C je Choquetova kapacita na lokálně kompaktním prostoru X se spočetnou bází, $\mathrm{C}(\emptyset) = 0$ a nechť $\mathcal{M}$ je systém všech borelovských měr μ na X takových, že $\mu(L) \leqq \mathrm{C}(L)$ pro každou kompaktní množinu $L \subset X$. Potom pro každé $K \in \mathcal{K}(X)$ je*

$$\mathrm{C}(K) = \sup\{\mu(K) : \mu \in \mathcal{M}\}.$$

Obecně však supremum (dokonce ani konvexní kompaktní) množiny Radonových měr není Choquetova kapacita. Problém je v tom, že nemusí být splněna podmínka (c)

[18]) Důkaz pro $M \subset \mathbb{R}$ je uveden v [9], s. 11; pro obecnější situaci je dán podrobný návod.

silné subaditivity v definici Choquetovy kapacity uvedené v kapitole 2. Použitím Choquetova integrálu (viz odstavec 5.7) dospěl B. Anger k charakteristice těch množin měr, pro něž je jejich supremum Choquetova kapacita[19]).

5.4. Klasická teorie potenciálu. Nechť M je podmnožinou eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^m$ dimenze $m > 2$ a nechť (pro jednoduchost) u je nezáporná spojitá superharmonická funkce na $\mathbb{R}^m$. Infimum všech nezáporných superharmonických funkcí, které majorizují u na M, se nazývá *redukce* (funkce u na M) a značí se $\mathbf{R}_u^M$. Největší zdola polospojitá funkce minorizující $\mathbf{R}_u^M$ se nazývá *výmet* (balayage) funkce u na M. Je to superharmonická funkce, která se značí $\widehat{\mathbf{R}}_u^M$. Z Choquetovy věty o kapacitabilitě plyne pro borelovskou (obecněji analytickou) množinu tento výsledek o aproximaci[20]):

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_u^M &= \sup\{\mathbf{R}_u^K : K \text{ kompaktní}, K \subset M\},\\ \widehat{\mathbf{R}}_u^M &= \sup\{\widehat{\mathbf{R}}_u^K : K \text{ kompaktní}, K \subset M\}.\end{aligned}$$

Poznamenejme, že v obecnějším kontextu teorie potenciálu (např. v teorii potenciálu pro rovnici vedení tepla, v teorii harmonických nebo výmetových prostorů) se zavádí pojem *podstatného výmetu*. Přestože takový výmet již nevede obdobným způsobem ke kapacitě, platí pro borelovské množiny analogické tvrzení o aproximaci zdola pomocí kompaktů[21]). K důkazu se hodí užít faktu, že podle vět 3.2 a 4.2 jsou borelovské množiny hyperkapacitabilní.

5.5. L_p-teorie potenciálu s obecným jádrem. Jako ukázku z *nelineární teorie potenciálu* uvažujme tuto situaci: $1 < p < +\infty$, K je jádro, tj. zdola polospojitá nezáporná funkce na $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, $m \geqq 1$. Pro měřitelnou funkci f na $\mathbb{R}^m$ označme, jako obvykle,

$$\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

a pro měřitelnou nezápornou funkci f definujeme

$$Kf : x \longmapsto \int K(x,y) f(y) \,\mathrm{d}y.$$

Pro libovolnou množinu $M \subset \mathbb{R}^m$ se *L_p-kapacita vzhledem ke K* definuje takto:

$$c_K(M) = \inf\{\|f\|_p^p : f \geqq 0,\, Kf \geqq 1 \text{ na } M\}.$$

Lze dokázat[22]) (není to však úplně jednoduché), že c_K je vnější kapacita. Proto je každá analytická množina c_K-kapacitabilní.

---

[19]) Problematice kapacity jakožto horní obálky množiny měr jsou věnovány např. práce [4], [5].

[20]) Důkaz lze nalézt např. v [8], s. 248.

[21]) Odpovídající tvrzení v kontextu výmetových prostorů, které pokrývají i případ nelokální teorie tzv. *α-harmonických funkcí*, lze nalézt v [8], s. 300.

[22]) Důkaz je uveden v [3], s. 112. V této publikaci lze nalézt mj. výklad o logaritmické kapacitě a analytické kapacitě.

5.6. Stochastické procesy. Široké uplatnění nalezla věta o kapacitabilitě (v abstraktnějším pojetí) při důkazech měřitelnosti nejrůznějších veličin svázaných se stochastickými procesy. Klíčem bývá často tato věta[23]):

Nechť $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je prostor s úplnou pravděpodobnostní mírou, X lokálně kompaktní prostor se spočetnou bází a π je projekce $X \times \Omega$ na Ω. Jestliže je M množina měřitelná vzhledem k součinu borelovské σ-algebry podmnožin X a σ-algebry $\mathcal{F}$, potom $\pi(M) \in \mathcal{F}$.

5.7. Choquetův integrál. Pro prostor s mírou $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ umíme, a to ať již jakýmkoliv způsobem, definovat Lebesgueův integrál

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu$$

pro dosti širokou třídu funkcí f. Není však již příliš obvyklé definovat integrál vzhledem k vnější míře na Ω[24]). Dále ukážeme, jak je možno definovat integrál dokonce vůči vnější kapacitě. Pak nelze očekávat, že příslušný integrál, zavedený G. Choquetem v jeho fundamentální práci o teorii kapacit[25]), bude aditivní. Nicméně z množinové funkce zdědí jisté strukturální vlastnosti, jako je spojitost vzhledem k monotónním limitním přechodům anebo jisté formy subaditivity.

Než přejdeme k dalšímu výkladu, udělejme ještě malou odbočku. Při budování teorie kapacit jsme se z důvodů srozumitelnosti omezili převážně na jejich popis v lokálně kompaktních prostorech. Tento omezující požadavek je možno vynechat a uvažovat kapacity na jiných množinových systémech, které již nejsou nikterak svázány s topologickou strukturou. Abstraktně můžeme uvažovat na dané množině X zcela libovolný systém $\mathcal{C}$ jejích podmnožin, pro nějž pouze požadujeme, aby obsahoval prázdnou množinu. Pojem $\mathcal{C}$-analytické množiny lze definovat analogicky jako v předešlé části: Množina $A \subset X$ je *$\mathcal{C}$-analytická*[26]), existuje-li kompaktní (Hausdorffův) prostor Y se spočetnou bází a množina $B \subset X \times Y$, která je spočetným průnikem množin, z nichž každá je spočetným sjednocením množin tvaru $C \times K$, kde $C \in \mathcal{C}$ a K je kompaktní podmnožina Y, taková, že $A = \pi_X(B)$. Zde je π_X opět projekce $X \times Y$ na X.

Dále budeme předpokládat, že systém $\mathcal{C}$ je uzavřený na tvoření konečných sjednocení a průniků. *Vnější kapacitou vzhledem k systému* $\mathcal{C}$ na $\mathcal{P}(X)$ nazýváme každou množinovou funkci $\mathrm{C} : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ splňující následující požadavky:

(a) $\sup \mathrm{C}(A_n) = \mathrm{C}\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big)$ pro každou neklesající posloupnost $\{A_n\}$ podmnožin prostoru X;

(b) $\inf \mathrm{C}(K_n) = \mathrm{C}\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n\Big)$ pro každou nerostoucí posloupnost $\{K_n\}$ množin z $\mathcal{C}$.

---

[23]) Čtenáře odkazujeme na [10], [27] a [13].

[24]) Jeden z prvních pokusů zavést pojem integrálu vzhledem k vnější míře náleží S. C. Fanovi [14].

[25]) Tato práce [17] se svým rozsahem přes 160 stran je spíše knihou než článkem.

[26]) Podotkněme jenom, že $\mathcal{C}$-analytické množiny vznikají ze suslinovské operace na systému $\mathcal{C}$, viz [29], s. 385.

Množinu $M \subset X$ nazveme C-*kapacitabilní*, jestliže

$$\mathrm{C}(M) = \sup\{\mathrm{C}(K) : K \subset M,\ K \in \mathcal{C}_\delta\}.$$

Zde samozřejmě $\mathcal{C}_\delta$ značí systém všech spočetných průniků množin z $\mathcal{C}$. Choquetova věta o kapacitabilitě pak platí i v tomto obecnějším kontextu: *Každá $\mathcal{C}$-analytická množina je* C-*kapacitabilní* [27]).

Konečně řekneme, že vnější kapacita C je *silně subaditivní* na $\mathcal{C}$, jestliže

$$\mathrm{C}(A \cup B) + \mathrm{C}(A \cap B) \leqq \mathrm{C}(A) + \mathrm{C}(B)$$

pro libovolnou dvojici množin A, B z $\mathcal{C}$.

Nechť tedy C je vnější kapacita na systému $\mathcal{P}(X)$ všech podmnožin dané množiny X. Je-li $\mathcal{H}^+$ systém nezáporných funkcí s hodnotami v $[0, \infty]$, pak pro $f \in \mathcal{H}^+$ definujme

$$\int_X f\,\mathrm{dC} = \int_0^\infty \mathrm{C}\big(\{x \in X : f(x) \geqq t\}\big)\,\mathrm{d}t.$$

Tento integrál se nazývá *Choquetův*, někdy též *horizontální*.

Řekněme si nejprve pár slov k existenci integrálu na pravé straně uvažované rovnosti. Především funkce

$$t \longmapsto \mathrm{C}\big(\{x \in X : f(x) \geqq t\}\big), \quad t \in (0, \infty),$$

je nerostoucí a shora polospojitá na intervalu $(0, \infty)$. Každá z těchto vlastností již stačí k tomu, aby integrál na pravé straně existoval jako Lebesgueův. Dokonce existuje i jako nevlastní Riemannův integrál[28]).

Jsou známy způsoby, jak přirozeně rozšířit definici Choquetova integrálu na funkce s hodnotami v $[-\infty, \infty]$ [29]).

Ihned je vidět, že funkcionál $\Phi : f \mapsto \int_X f\,\mathrm{dC}$ je pozitivně homogenní a neklesající na $\mathcal{H}^+$. Platí totiž

$$\int_X \lambda f\,\mathrm{dC} = \lambda \int_X f\,\mathrm{dC} \quad \text{pro} \quad \lambda \geqq 0 \ \text{ a } \ f \in \mathcal{H}^+, \quad \text{a}$$
$$\int_X f\,\mathrm{dC} \leqq \int_X g\,\mathrm{dC}, \quad \text{pokud} \quad f, g \in \mathcal{H}^+ \ \text{ a } \ f \leqq g.$$

Nelze očekávat, že by Φ byl obecně aditivní funkcionál na $\mathcal{H}^+$. Na druhé straně se lehce ukáže, že

$$\int_X (f + g)\,\mathrm{dC} \leqq 2\Big(\int_X f\,\mathrm{dC} + \int_X g\,\mathrm{dC}\Big)$$

[27]) Důkaz je proveden v knize [29], s. 397.

[28]) Čtenář může konzultovat článek [24], kde se podobná definice Lebesgueova integrálu vyšetřuje.

[29]) Viz např. monografii [12], věnovanou systematickému výkladu neaditivních množinových funkcí.

pro libovolné funkce $f, g \in \mathcal{H}^+$. Vzniká přirozená otázka, zda Φ je dokonce subaditivním funkcionálem na $\mathcal{H}^+$, tj. zda pro $f, g \in \mathcal{H}^+$ je

$$\int_X (f+g)\,\mathrm{dC} \leqq \int_X f\,\mathrm{dC} + \int_X g\,\mathrm{dC}.$$

Vlastnost subaditivity funkcionálu Φ se těší velkému zájmu, řada autorů ji dokázala za různých dodatečných předpokladů[30]). Původní důkaz věty o subaditivitě pro kapacity v lokálně kompaktních prostorech náleží G. Choquetovi. Zde uvedeme abstraktní verzi věty o subaditivitě: *Funkcionál Φ je na prostoru $\mathcal{H}^+$ subaditivní, právě když vnější kapacita* C *je silně subaditivní na $\mathcal{C}$.*

Choquetova kapacita a integrál nacházejí, zejména v poslední době, uplatnění v málo očekávaných oblastech. Vyskytují se často ve statistice, teorii rozhodování, umělé inteligenci, teorii her, ekonomii a finančnictví[31]).

5.8. Reprezentace Daniellova integrálu. Uvažujme na dané množině P *vektorový svaz* $\mathcal{Z}$ reálných funkcí, tj. takový vektorový prostor, který s každou funkcí obsahuje i její absolutní hodnotu, a předpokládejme, že $\mathcal{Z}$ splňuje ještě *Stoneovu podmínku* (s každou funkcí f obsahuje $\mathcal{Z}$ i funkci $\min(f,1)$). *Daniellovým integrálem* na $\mathcal{Z}$ rozumíme lineární nezáporný funkcionál A, který je spojitý v následujícím smyslu:

je-li $\{f_n\}$ posloupnost nezáporných funkcí ze $\mathcal{Z}$ a $f_n \searrow 0$, potom $A(f_n) \to 0$.

Jako příklad uveďme třeba Riemannův integrál na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ nebo na prostoru $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^m)$ všech spojitých funkcí s kompaktním nosičem na $\mathbb{R}^m$.

Cesta, jak Daniellův integrál, který je zprvu definován jen na „malém" systému funkcí, rozumným způsobem rozšířit na mnohem širší systém funkcí, je vcelku obecně známa. Lze ji nalézt ve skoro každé monografii, která obsahuje partie o abstraktní integraci. Užití Choquetovy teorie kapacit nabízí jiný přístup.

Než větu o reprezentaci vyslovíme, uveďme ještě jednu definici. Je-li $\mathcal{L}$ vektorový prostor reálných funkcí na množině P, označíme σ-algebru generovanou $\mathcal{L}$ symbolem $\sigma(\mathcal{L})$. Je to tedy nejmenší σ-algebra obsahující množiny typu $\{x \in P : f(x) > a\}$, kde f probíhá množinu $\mathcal{L}$ a $a \in \mathbb{R}$.

---

[30]) Uveďme například několik jmen: F. Topsøe (1974), B. Anger (1977), P. J. Huber (1981), R. C. Bassanezi a G. H. Greco (1984), A. Buja (1984), J. Kindler (1986) či D. Schmeidler (1986). Původní Choquetův důkaz je v [17]. Abstraktní verzi, kterou uvádíme, lze nalézt v [12].

[31]) Klíčová slova *Choquet integral* nás v Mathematical Reviews vedou k pojmům jako *fuzzy measures, decision processes, multimedia information retrieval, voting schemes, Choquet bargaining solutions, preferential independence, representation of excessive functions, Ellsberg's paradox, Savage's theory*; v recenzích lze číst např. *market prices can be represented by the Choquet integral with respect to a non-additive measure, the price of an insurance risk has a Choquet representation with respect to a distorted probability.* O významu Choquetova integrálu se lze poučit např. v práci [1], která je mimo jiné i rozsáhlou studií různých kapacit v teorii prostorů funkcí a potenciálu; viz též [15]. Z knižních publikací můžeme doporučit [12].

Daniellova-Stoneova věta o reprezentaci. *Nechť A je Daniellův integrál na vektorovém svazu $\mathcal{Z}$ funkcí definovaných na množině P a nechť $\mathcal{Z}$ splňuje Stoneovu podmínku. Potom existuje právě jedna míra μ na $\sigma(\mathcal{Z})$ taková, že*

$$A(f) = \int_P f \, \mathrm{d}\mu \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{Z}.$$

Myšlenka důkazu. Ukážeme cestu, jak využít v důkazu této věty Choquetovu teorii kapacit. Pro jednoduchost předpokládejme, že systém $\mathcal{Z}$ obsahuje konstanty. Označme $X = P \times [0, \infty)$ a

$$L_f = \{(x, t) \in X : f(x) > t\}$$

pro každou nezápornou funkci f na P. Je-li $\mathcal{C} = \{L_f : f \in \mathcal{Z}, f \geqq 0\}$, definujme

$$\mathrm{C}(L_f) = A(f) \quad \text{pro} \quad L_f \in \mathcal{C}.$$

Musíme si ovšem uvědomit, že tato definice je korektní. To vyplývá z toho, že zobrazení $f \mapsto L_f$ je prosté. Díky svazovým vlastnostem $\mathcal{Z}$ je systém $\mathcal{C}$ uzavřený na konečná sjednocení a průniky. Není těžké ukázat, že C má na systému $\mathcal{C}$ vlastnosti obdobné vlastnostem Choquetovy kapacity na $\mathcal{K}$ z druhé kapitoly. Obdobně jako v „lokálně kompaktním případě“ vytvoříme z C množinovou funkci C^* na $\mathcal{P}(X)$. V dalším kroku se pak dokáže, že C^* je vnější kapacita vzhledem k $\mathcal{C}$.

Nejtěžší část důkazu spočívá v ověření, že pro charakteristickou funkci χ_A každé množiny A ze systému $\sigma(\mathcal{Z})$ množina L_{χ_A} je $\mathcal{C}$-analytická. Potom se definuje

$$\mu(A) = \mathrm{C}^*(L_{\chi_A})$$

a poměrně snadno se dokáže, že míra μ má požadované vlastnosti.[32]) ■

Závěrečná poznámka. Dne 21. května 2002 se ve Velké aule Karolina uskutečnilo slavnostní shromáždění, při němž bylo připomenuto 50. výročí vzniku Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy a udělen čestný doktorát francouzskému matematikovi prof. G. Choquetovi. K této příležitosti byla vydána publikace *Professor Gustave Choquet, Doctor Universitatis Carolinae Honoris Causa Creatus*, Matfyzpress, Praha 2002 (editoři: J. Lukeš, I. Netuka, J. Veselý), v níž je tento text uveden.

L i t e r a t u r a

[1] Adams, D. R.: *Choquet integrals in potential theory.* Publ. Mat. (1) *42* (1998), 3–66.
[2] Adams, D. R., Hedberg, L. I.: *Function spaces and potential theory.* Springer-Verlag, Berlin 1999.
[3] Aikawa, H., Essén, M.: *Potential Theory — selected topics.* Lecture Notes in Math. 1633, Springer-Verlag, Berlin 1996.

[32]) Detaily lze nalézt v [29].

[4] Anger, B.: *Approximation of capacities by measures.* In: Lecture Notes in Math. 226, Springer-Verlag, Berlin 1971, 152–170.

[5] Anger, B.: *Representation of capacities.* Math. Ann. *229* (1977), 245–258.

[6] Armitage, D. H., Gardiner, S. J.: *Classical potential theory.* Springer-Verlag, London 2001.

[7] Arsove, M. G.: *The Wiener-Dirichlet problem and the theorem of Evans.* Math. Z. *103* (1968), 184–194.

[8] Bliedtner, J., Hansen, W.: *Potential theory — An analytic and probabilistic approach to balayage.* Springer-Verlag, Berlin 1986.

[9] Carleson, L.: *Lectures on exceptional sets.* Van Nostrand, Princeton 1967.

[10] Dellacherie, C.: *Capacités, rabotages et ensembles analytiques.* Séminaire Choquet, G., Rogalski, M., Saint-Raymond, J., 19e année, Initiation à l'Analyse, Publ. Math. Univ. Pierre et Marie Curie 41, Univ. Paris VI, Paris 1980.

[11] Dellacherie, C., Meyer, P.-A.: *Probabilités et potentiel.* Chapitres I à IV, Hermann, Paris 1975.

[12] Denneberg, D.: *Non-additive measure and integral.* Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht 1994.

[13] Doob, J. L.: *Classical potential theory and its probabilistic counterpart.* Springer-Verlag, New York 1984.

[14] Fan, S. C.: *Integration with respect to an upper measure function.* Amer. J. Math. *63* (1941), 319–338.

[15] Fuglede, B.: *Capacity as a sublinear functional generalizing an integral.* Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. (7) *38* (1971).

[16] Helms, L. L.: *Introduction to potential theory.* Wiley-Interscience, New York – London – – Sydney 1969.

[17] Choquet, G.: *Theory of capacities.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) *5* (1953/54), 131–295.

[18] Choquet, G.: *Lectures on analysis I–III.* W. A. Benjamin, Inc., New York–Amsterdam 1969.

[19] Choquet, G.: *Vznik teorie kapacit: zamyšlení nad vlastní zkušeností.* Pokroky Mat. Fyz. Astronom. *34* (1989), 71–83.

[20] König, H.: *Measure and integration. An advanced course in basic procedures and applications.* Springer-Verlag, Berlin 1997.

[21] Král, J., Netuka, I., Veselý, J.: *Teorie potenciálu II., III., IV.* SPN, Praha 1972, 1976, 1977.

[22] Kuratowski, K.: *Topology I.* Academic Press, New York 1966.

[23] Lorentz, G. G.: *Who discovered analytic sets?* Math. Inteligencer (4) *23* (2001), 28–32.

[24] Lukeš, J.: *Lebesgueův integrál.* Časopis Pěst. Mat. (4) *91* (1966), 371–383.

[25] Lukeš, J., Malý, J.: *Measure and integral.* Matfyzpress, Praha 1995.

[26] Lukeš, J., Malý, J., Zajíček, L.: *Fine topology methods in real analysis and potential theory.* Lecture Notes in Math. 1189, Springer-Verlag, Berlin – New York 1986.

[27] Meyer, P.-A.: *Probabilités et potentiel.* Hermann, Paris 1966.

[28] Port, S. C., Stone, C. J.: *Brownian motion and classical potential theory.* Academic Press, New York 1978.

[29] Rao, M. M.: *Measure theory and integration.* Wiley-Interscience, New York 1987.

[30] Sedlák, B., Štoll, I.: *Elektřina a magnetismus.* Academia, Praha 2002.

[31] Wermer, J.: *Potential theory.* Lecture Notes in Math. 408, Springer-Verlag, Berlin 1974.

[32] Wiener, N.: *Certain notions in potential theory.* J. Math. Phys. M. I. T. *3* (1924), 24–51.