Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jiří Veselý

Weierstrassova věta o aproximaci

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 47 (2002), No. 3, 181--190

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141131`

Weierstrassova věta o aproximaci

Jiří Veselý, Praha

Od objevu Weierstrassovy věty o stejnoměrné aproximaci spojité funkce na intervalu $[a, b]$ polynomy [20] nás dělí více než sto let a přesto tento čas neubírá nic na její důležitosti a kráse. Patří k pilířům matematické analýzy a teorie aproximace, přičemž jen málo vět s ní může svým významem soupeřit. Popisuje jistou možnost přibližného „analytického" vyjádření libovolné spojité funkce[1]), blízkou pohledu Leonharda Eulera (1707–1783); pro něj byly spojité ty funkce, které měly „dostatečně jednoduché" analytické vyjádření. Pohled do historie Weierstrassovy věty ukazuje, že k významným matematickým výsledkům lze dospět i v pokročilém věku a že vývoj poznání je složitý: staré postupy mohou být velmi inspirativní a mohou vést k neočekávaným objevům v „dávno vytěžených" oblastech.

Označíme-li $\|f\| = \max\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$ normu funkce f na prostoru $\mathcal{C}([a, b])$ všech spojitých komplexních funkcí na intervalu $[a, b]$, lze Weierstrassovu větu formulovat např. takto:

Věta W (Weierstrass, 1885)**.** *Pro každou funkci $f \in \mathcal{C}([a, b])$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje polynom P, pro který je $\|f - P\| < \varepsilon$.*

Jinak řečeno, pro každou funkci $f \in \mathcal{C}([a, b])$ existuje posloupnost polynomů $\{P_n\}$ taková, že $\|f - P_n\| \to 0$ pro $n \to \infty$; funkce f je tedy limitou stejnoměrně konvergentní posloupnosti polynomů. Poznamenejme, že různá přibližování složitějších funkcí polynomy jsou podstatně staršího data než Weierstrassův výsledek (Taylorův polynom, Lagrangeova interpolace, ...), těmi se však zabývat nebudeme.

Základním tvrzením, které zde nebudeme dokazovat, je věta o stejnoměrné spojitosti funkce f spojité na intervalu $[a, b]$. Ta říká, že pro takovou funkci f lze ke každému $\varepsilon > 0$ nalézt $\delta > 0$ tak, že $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, jakmile $x, y \in [a, b]$ a $|x - y| < \delta$. Její důkaz není triviální, avšak studenti se s ním seznamují v přednáškách z matematické analýzy poměrně brzo. Jejím důsledkem je možnost stejnoměrně aproximovat $f \in \mathcal{C}([a, b])$ spojitými po částech lineárními funkcemi. Je-li $D = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ dělení, pro něž $\max\{t_k - t_{k-1} : k = 1, \ldots, n\} < \delta$, potom se pro funkci L lineární na všech intervalech $[t_{k-1}, t_k]$ a nabývající v bodech dělení D stejných hodnot jako f snadno dokáže odhad $\|f - L\| < 2\varepsilon$; srv. [19].

Věta o aproximaci nebyla první Weierstrassovou zkušeností se stejnoměrnou konvergencí, spíše jejím završením. Právě Weierstrass zásadním způsobem přispěl k poznání

[1]) Weierstrass a jeho současníci užívali spojení *willkürliche* (*stetige*) *Funktionen* pro obecné (spojité) funkce.

Doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc. (1940), Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8 – Karlín, e-mail: `jvesely@karlin.mff.cuni.cz`

Podporováno výzkumným záměrem MSM 1132 00007.

důležitosti tohoto pojmu: zformuloval a dokázal např. věty o (lokálně) stejnoměrné konvergenci mocninné řady nebo o derivování řady diferencovatelných funkcí „člen po členu“. Stejnoměrnou konvergenci efektivně využíval, dříve např. při konstrukci spojité funkce „bez derivace“.

Současně s Větou W dokázal Weierstrass i tvrzení o stejnoměrné aproximaci spojité 2π-periodické funkce trigonometrickými polynomy, které je s Větou W ekvivalentní. Budeme se podrobněji zabývat převážně Větou W, dříve však uvedeme několik údajů o Weierstrassově životě. Z nich lze vytušit cestu, jak k tomuto tvrzení Weierstrass dospěl. Podrobnější životopisné informace nalezne čtenář např. v [11] a také v [10].

Karl Weierstrass (1815–1897) měl v r. 1885 za sebou skvělou matematickou dráhu. Dosáhl vynikajících výsledků a vychoval řadu špičkových matematiků. Připomeňme, že mezi nimi byli Gösta Mittag-Leffler (1846–1927) a Karl Runge (1856–1927), jemu nejmilejší však byla Soňa Kovalevská (1850–1891). Z jejich obsáhlé korespondence se dochovaly pouze dopisy, které psal Weierstrass jí, on její dopisy na sklonku života spálil.

Dopisy odrážejí atmosféru Weierstrassova života. V dopise ze srpna r. 1883 si stěžuje na zhoršování vztahů s kolegou Leopoldem Kroneckerem (1823–1891). Nepíše nic o matematice, byl nemocen, a odjíždí se do Francie zotavit. Cítí se duševně i fyzicky vyčerpán. Teprve říjnový dopis svědčí o velkém zvýšení Weierstrassova zájmu o *reálné funkce reálné proměnné*. Spolu s Kovalevskou se věnuje problematice parciálních diferenciálních rovnic. Zobecňuje též Riemannův integrál, zabývá se konvergencí Fourierových řad. Prázdniny tráví patrně v Berlíně, v září r. 1884 však píše o rozhodnutí kvůli Kroneckerovi Berlín opustit. V tomto duševním rozpoložení, necelé dva měsíce před svými sedmdesátými narozeninami, posílá Mittagu-Lefflerovi a Kovalevské práce o aproximaci. Vycházejí prakticky okamžitě, patrně v souvislosti s jeho nadcházejícím jubileem.

Důležitost Věty W byla brzo rozeznána. Borelův text [5] z r. 1905 ji již uvádí slovy: *Je to základní tvrzení náležející Weierstrassovi.* Význam věty je podtržen nejen mnoha aplikacemi, ale i okruhem otázek, které v oblasti aproximací vyvolala. Proto záhy upoutala pozornost mnoha matematiků, kteří se snažili Weierstrassův důkaz zjednodušit nebo nahradit důkazem elementární povahy. K tomuto úsilí se dostaneme dále. Nežli však větu dokážeme, celou situaci zjednodušíme.

Komplexní funkci lze rozložit na reálnou a imaginární část a aproximovat každou z těchto funkcí zvlášť; tvrzení proto stačí dokázat jen pro reálné funkce. Každý interval $[a, b]$ lze *lineární funkcí* zobrazit na interval $[0, 1]$; polynomy takovou transformací přecházejí zase v polynomy. Lze se tedy omezit pouze na interval $[0, 1]$. Od f lze odečíst lineární funkci, nabývající v bodech 0, 1 stejné hodnoty jako f. Na základě těchto jednoduchých úvah se lze při důkazu Věty W eventuálně omezit jenom na případ speciálních spojitých funkcí f.

Pro větší přehlednost ještě položme $f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2,\ x \in [0, 1]$. Aproximující polynomy explicitně popíšeme. Je-li $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, pak polynomy $B_n f$ definované vztahem

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0, 1], \tag{1}$$

jsou tzv. *Bernštejnovy polynomy*; jsou to polynomy stupně nejvýše n-tého a pro všechny funkce $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ a $n \in \mathbb{N}$ je $B_n f(0) = f(0)$, $B_n f(1) = f(1)$. Dokážeme, že

$\|B_n f - f\| \to 0$, tj. že $B_n f$ konvergují k f stejnoměrně na $[0,1]$. Pro větší přehlednost rozdělíme důkaz do několika jednoduchých tvrzení. Kromě použití stejnoměrné spojitosti jsou jednotlivé kroky elementární. Dosazením f_0 do (1) dostaneme podle binomické věty následující tvrzení:

Lemma 1. *Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $B_n f_0 = f_0$.*

Lemma 2. *Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $B_n f_1 = f_1$.*

Důkaz. Uvážíme, že pro $1 \leqq k \leqq n$ je

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \frac{k}{n} \cdot \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = \binom{n-1}{k-1}. \tag{2}$$

Dosazením f_1 do (1) dostaneme pomocí (2)

$$\begin{aligned} B_n f_1(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-k} = \\ &= x \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{(n-1)-j} = x \cdot 1 = x, \quad x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Lemma 3. *Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $B_n f_2 = (1 - 1/n) f_2 + (1/n) f_1$.*

Důkaz. Nejprve pomocí (2) spočteme pro $k \geqq 1$

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} = \frac{k}{n}\binom{n-1}{k-1} = \frac{k-1}{n}\binom{n-1}{k-1} + \frac{1}{n}\binom{n-1}{k-1}; \tag{3}$$

první člen posledního součtu pro $k \geqq 2$ ještě upravíme:

$$\frac{k-1}{n}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n-1}{n}\,\frac{k-1}{n-1}\binom{n-1}{k-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\binom{n-2}{k-2}. \tag{4}$$

Po dosazení f_2 do (1) obdržíme pro všechna $x \in [0,1]$

$$B_n f_2(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

a pomocí (3) a (4) jednoduchou úpravou postupně dostaneme

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = \\ &\quad = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^j (1-x)^{(n-2)-j} + \frac{x}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{(n-1)-j} = \\ &\quad = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{x}{n}, \end{aligned}$$

což již dává dokazované tvrzení; to zřejmě platí i pro $n = 1$.

Lemma 4. *Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0,1]$ platí rovnost a odhad*

$$\sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{k}{n} - x\Big)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \leqq \frac{1}{4n} \,. \tag{5}$$

Důkaz. Úpravou výrazu na levé straně (5) pomocí Lemmat 2 a 3 obdržíme

$$\sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{k}{n}\Big)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - 2x \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + x^2 =$$
$$= \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) x^2 + \frac{1}{n} x - 2x \cdot x + x^2 = \frac{x(1-x)}{n} \leqq \frac{1}{4n} \,,$$

což již dává dokazované tvrzení.

Lemma 5. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ a $x \in [0,1]$. Označme $F = F_x$ množinu všech takových $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, pro něž $|(k/n) - x| \geqq \delta$. Potom*

$$\sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqq \frac{1}{4n\delta^2} \,.$$

Důkaz. Použijeme Lemma 4. Po dosazení postupně dostaneme

$$\sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k \in F} \Big(\frac{k}{n} - x\Big)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqq \frac{1}{4n\delta^2} \,.$$

Věta B (Bernštejn, 1912)**.** *Pro každou $f \in \mathcal{C}([0,1])$ platí $\|B_n f - f\| \to 0$.*

Důkaz. Zvolme $f \in \mathcal{C}([0,1])$ a $\varepsilon > 0$. Ze stejnoměrné spojitosti funkce f na intervalu $[0,1]$ plyne existence takového $\delta > 0$, pro které $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$, jakmile $x, y \in [0,1]$, $|x - y| < \delta$. Připomeňme, že s ohledem na Lemma 1 pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in [0,1]$ platí

$$\Big| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \Big| = \Big| \sum_{k=0}^{n} \Big(f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \Big| \leqq$$
$$\leqq \sum_{k=0}^{n} \Big| f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) \Big| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Je-li nyní $x \in [0,1]$, označme $F = F_x$ množinu, kterou jsme zavedli v Lemmatu 5. Potom

$$\Big| f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) \Big| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \,, \quad k \notin F \,, \quad \text{a} \quad \Big| f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) \Big| \leqq 2\, \|f\| \,, \quad k \in F.$$

Odtud dostaneme pomocí Lemmatu 5 odhad

$$\big| f(x) - B_n f(x) \big| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \notin F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + 2\, \|f\| \sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqq$$
$$\leqq \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 + 2\, \|f\| \cdot \frac{1}{4n\delta^2} \,.$$

Z něj vyplývá, že pro $n > \|f\|/\varepsilon\delta^2$ je $|f(x) - B_n f(x)| \leqq \varepsilon$, a tedy $\|B_n f - f\| \leqq \varepsilon$.

Tím jsme dokázali Větu B a tedy i Weierstrassovu Větu W. Vícerozměrnou verzi tohoto důkazu nalezne čtenář např. v [9][2]).

Naše další pozorování se bude týkat integrálů. Je-li $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ a množina $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ je omezená, můžeme definovat tzv. *konvoluci funkcí* f, g vzorcem

$$(g * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-v) f(v)\,\mathrm{d}v.$$

Lineární prostor funkcí $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, pro něž je $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ omezená, značíme $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Naskýtá se otázka, zda existuje taková funkce $\omega \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, pro kterou by platilo $\omega * f = f$ pro každou $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Odpověď je negativní, existuje ale jistá náhražka, která souvisí s aproximacemi. Říkáme, že spojité funkce $K_n \geqq 0$, $n \in \mathbb{N}$, pro které

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_n(v)\,\mathrm{d}v = 1$$

a ke kterým pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $0 < \delta < 1$ existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geqq m$ platí

$$\int_{|x| \geqq \delta} K_n(v)\,\mathrm{d}v < \varepsilon, \tag{6}$$

tvoří *Diracovu posloupnost.* Název souvisí s tzv. Diracovou distribucí, která by v jistém smyslu náš problém řešila, to však již není funkce v obvyklém smyslu. Není obtížné dokázat tvrzení:

Lemma 6. *Je-li K_n Diracova posloupnost, pak pro každou funkci $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ platí $\|K_n * f - f\| \to 0$.*

Spokojíme se s popisem důkazu, který by měl čtenáři připomenout část předchozích úvah. Zvolíme bod $x \in \mathbb{R}$ a uvážíme, že f je navíc stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}$ (protože $f(v) = 0$ pro všechna v mimo nějaký interval $[a, b]$). Proto lze zvolit k $\varepsilon > 0$ číslo $\delta > 0$ tak, aby byla splněna podmínka stejnoměrné spojitosti na $\mathbb{R}$. Dále zvolíme $m \in \mathbb{N}$ tak, aby pro všechna $n \geqq m$ platilo (6), a odhadujeme

$$\begin{aligned}
|f(x) - (K_n * f)(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} K_n(x-v)\big(f(x) - f(v)\big)\,\mathrm{d}v \right| = \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} K_n(v)\big(f(x) - f(x-v)\big)\,\mathrm{d}v \right| \leqq \\
&\leqq \int_{-\infty}^{\infty} K_n(v)\big|f(x) - f(x-v)\big|\,\mathrm{d}v \leqq \\
&\leqq \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} K_n(v)\,\mathrm{d}v + 2\|f\| \int_{|v| \geqq \delta} K_n(v)\,\mathrm{d}v \leqq (1 + 2\,\|f\|)\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Vidíme, že odhad nezávisí na volbě x, konvergence je tedy stejnoměrná.

[2]) Weierstrass se později zabýval i vícerozměrným případem, avšak vyšetřování tohoto případu provedl první r. 1891 ÉMIL CHARLES PICARD (1856–1941); srv. [16].

Všimneme si nyní vývoje důkazů Věty W. Weierstrass založil její důkaz na partiích, které ho v té době zajímaly a o kterých patrně diskutoval s Kovalevskou. Jestliže je funkce f definována na intervalu $[-1, 1]$, rozšíříme ji spojitě na $\mathbb{R}$ tak, že je rovna 0 mimo interval $[-2, 2]$. Po tomto rozšíření je tedy f omezená spojitá funkce na $\mathbb{R}$. Na $\varphi(\,\cdot\,, 0) := f$ budeme pohlížet jako na popis průběhu teploty v tenké nekonečné kovové tyči. Uvědomíme si, že průběh teploty $\varphi(x, t)$ v závislosti na poloze bodu x a na čase $t \geqq 0$ má být spojitou funkcí v uzavřené „horní" polorovině a na jejím vnitřku řešením rovnice pro vedení tepla; proto se bude pro malá $t > 0$ funkce $\varphi(\,\cdot\,, t)$ málo lišit od f. Funkci φ lze definovat integrálem, který nese Weierstrassovo jméno a který Weierstrasse patrně k důkazu Věty W dovedl. Podstatné jsou přitom vlastnosti, které mají i jiné „podobné" integrály. Platí např.

$$\lim_{k\to 0} \varphi(x, k) = \lim_{k\to 0} \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \exp\left[-\left(\frac{v-x}{k}\right)^2\right] \mathrm{d}v = f(x), \tag{7}$$

přičemž v (7) je možné faktor u funkce f v integrandu nahradit obecnější funkcí $\psi\big((v - x)/k\big)$ s vlastnostmi, které Weierstrass popsal.[3]) Důkaz lze charakterizovat v podstatě jako „dvoustupňový", neboť nejprve aproximujeme f funkcí $\varphi(\,\cdot\,, k)$ s malým $k > 0$ a potom tuto funkci polynomem, který je částečným součtem její Maclaurinovy řady. Dnes se můžeme však již jen dohadovat, že Weierstrassovy úvahy o parciálních diferenciálních rovnicích, speciálně o rovnici pro vedení tepla, ho dovedly k aproximační větě. Weierstrassovo uvažování je blízké způsobu tehdejšího studia trigonometrických řad, je zkoumán i případ nespojitých limitních funkcí, kdy konvergence polynomů nemůže být stejnoměrná; srv. [18]. Z dnešního hlediska jsou pro $k = 1/n$ ve vzorci (7) funkce $v \mapsto (n/\sqrt{\pi}\,) \exp[-(nv)^2]$ speciálními jádry $K_n(v)$, tvořícími Diracovu posloupnost.

Důkaz, který jsme podrobně provedli, lze označit jako „jednostupňový": aproximující polynomy jsme konstruovali přímo a popsali jsme dokonce jejich explicitní vyjádření. Je to modifikace důkazu, který předložil r. 1912 v [3] Sergej Natanovič Bernštejn (1880–1968). Kromě jednoduchosti má další výhody, ke kterým se dostaneme později.

Téměř ve stejnou dobu jako Weierstrassova práce [20] vyšel článek [17], který napsal jeho žák Runge; jde vlastně o výňatek z jeho dopisu Mittagu-Lefflerovi. Aproximační Věta W není v článku explicitně vyslovena, ale výsledky tohoto článku o aproximaci *racionálními funkcemi* spolu s článkem, který Runge napsal v tomtéž roce (srv. poznámku u [17]), dávají *jiný*, také dvoustupňový důkaz Věty W.

Pro nedostatek místa se nelze věnovat *všem* variantám důkazu Věty W, všimneme si proto pouze těch, které jsou pro nás zajímavé. Po důkazu z r. 1891, který publikoval Picard, se o rok později objevila práce Matyáše Lercha (1860–1922), ve které popsal jiný důkaz Věty W: byl opět dvoustupňový, založený na aproximaci po částech lineární funkce částečnými součty Fourierovy řady a rozvoji (konečně mnoha) členů těchto součtů v Maclaurinovy řady. Důkaz rozhodně nebyl elementární, avšak Lerch se k němu r. 1903 vrátil v článku [15]; jeho první část obsahuje jednodušší dvoustupňový důkaz, založený na jiném způsobu aproximace po částech lineární funkce. Ta využívá *speciálních Fourierových řad dvou funkcí.*

---

[3]) Viz např. [13], kde mezi více důkazy Věty W je uveden na str. 292 i modernizovaný důkaz Weierstrassův a popsán podrobněji vztah k rovnici pro vedení tepla.

Pomineme i důkaz, který předložil r. 1897 VITO VOLTERRA (1860–1940), a popíšeme další, který podal r. 1898 ve své první publikované práci HENRI LEÓN LEBESGUE (1875–1941). Také on je založen na aproximaci spojité funkce po částech lineární spojitou funkcí. Klíčovou roli v něm hraje rozvoj absolutní hodnoty v řadu. Pomocí ní se rozvíjí funkce $k(t + |t|)$, $t \in \mathbb{R}$, s parametrem k a z posunutí těchto funkcí se po částech lineární funkce „skládá". K rozvoji absolutní hodnoty slouží jednoduchý výpočet (lze ale užít i jiné řady)

$$|t| = \sqrt{t^2} = \sqrt{1 - (1 - t^2)} = 1 - \frac{1}{2}\,(1 - t^2) - \frac{1}{2 \cdot 4}\,(1 - t^2)^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\,(1 - t^2)^3 - \cdots$$

Tato řada (není to Taylorova řada!) konverguje stejnoměrně na $[-1, 1]$. Lebesgueův důkaz tak patří k těm, které jsou myšlenkově relativně jednoduché, i když technické provedení je opět poněkud pracné; srv. [7], s. 5, kde se po částech lineární funkce explicitně vyjadřuje.

Na přelomu století v r. 1900 publikovali Mittag-Leffler a LIPÓT FEJÉR (1880–1959) další důkazy Věty W. Jako Weierstrassův důkaz užívají (singulárních) integrálů. Druhý důkaz je zajímavý zejména z teoretického hlediska: Fejér při studiu Fourierových řad dokázal, že pro každou spojitou 2π-periodickou funkci je

$$\sigma_n(f, t) := \frac{s_0(f, t) + s_1(f, t) + \cdots + s_n(f, t)}{n + 1} \rightrightarrows f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

tj. že aritmetické průměry částečných součtů Fourierovy řady spojité 2π-periodické funkce f konvergují *stejnoměrně* k funkci f. Tento možná poněkud překvapivý fakt souvisí s tím, že ve vyjádření

$$s_n(f, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t - v) D_n(v)\, \mathrm{d}v \quad \text{je} \quad D_n(v) = \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})v]}{\sin(\frac{1}{2}v)}$$

a tzv. *Dirichletovo jádro* D_n je „divoké", zatímco pro $\sigma_n(f, t)$ z (8) platí

$$\sigma_n(f, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t - v) K_n^*(v)\, \mathrm{d}v\,, \quad \text{kde} \quad K_n^*(v) = \frac{\sin^2[\frac{1}{2}(n + 1)v]}{(n + 1)\sin^2(\frac{1}{2}v)}\,,$$

a tzv. *Fejérovo jádro* K_n^* je nezáporné a má v podstatě (faktor $1/(2\pi)$) všechny potřebné vlastnosti jader z definice Diracovy posloupnosti.[4])

Populární je také jednostupňový důkaz, který publikoval r. 1908 EDMUND GEORG HERMANN LANDAU (1877–1938). Již víme, že tvrzení stačí opět dokázat jen pro reálné funkce f, pro něž platí

$$f \in \mathcal{C}([0, 1]), \quad f(0) = f(1) = 0.$$

[4]) Podrobněji: pro $f \equiv 1$ je $s(1, t) = \sigma(1, t) = 1$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$, ale v integraci absolutních hodnot $|D_n|$ a $|K_n^*| = K_n^*$ je podstatný rozdíl, protože pro $n \to \infty$ je $\int_{-\pi}^{\pi} |D_n| \to \infty$.

Se zachováním označení se f rozšíří na $\mathbb{R}$ hodnotou 0 všude mimo $[0,1]$, takže f je *stejnoměrně* spojitá na $\mathbb{R}$. Pak definujeme *polynomy* $K_n(v) = c_n(1-v^2)^n$, kde pro všechna $n \in \mathbb{N}$ volíme koeficienty $c_n \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo

$$\int_{-1}^{1} K_n(v)\,\mathrm{d}v = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pro funkci f definujeme aproximující polynomy $P_n f$ vzorcem

$$P_n f(t) = \int_{-1}^{1} f(t+v) K_n(v)\,\mathrm{d}v = \int_{-t}^{1-t} f(t+v) K_n(v)\,\mathrm{d}v = \int_{0}^{1} f(v) K_n(v-t)\,\mathrm{d}v.$$

Poslední integrál dává zřejmě (reálný) polynom v proměnné t; viz [19].

Tak jsme se postupně v historii důkazů Věty W dostali až k r. 1912, kdy Bernštejn publikoval v [3] důkaz této věty. Lemmata, která jsme dokázali, lze interpretovat „pravděpodobnostně“: Lemma 1 popisuje binomické rozdělení a rovnosti

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx, \quad \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x)$$

jeho *střední hodnotu* a *rozptyl*; srv. s Lemmaty 2 a 3. Více pak nalezne čtenář např. v [21], s. 132, v [2] nebo [6]. Není vůbec zřejmé, proč nelze místo polynomů $B_n f$ volit interpolační polynomy nabývající v bodech k/n, $k = 0, \dots, n$, stejných hodnot jako f. Avšak právě Bernštejn ukázal, že např. pro funkci $f(x) = |x|$ a interval $[-1,1]$ tak dostaneme posloupnost polynomů, která k f konverguje *pouze* ve třech bodech -1, 0, 1. Podobný příklad pochází od Rungeho: pro funkci $f(x) = 1/(1+x^2)$ a analogicky získanou posloupnost polynomů P_n platí dokonce $\|f - P_n\| \to \infty$.

Předností Bernštejnova důkazu je to, že zobrazení $L_n : f \mapsto B_n f$ má řadu „pěkných“ vlastností: Je to *lineární* zobrazení $\mathcal{C}([0,1])$ do (pod)prostoru $\mathcal{P}_n$ restrikcí všech polynomů stupně nejvýše n-tého na interval $[0,1]$ a je *nezáporné*, takže je zřejmě i *monotónní*, tj. platí

$$\bigl(f, g \in \mathcal{C}([0,1]),\ f \leqq g\bigr) \implies B_n f \leqq B_n g.$$

Linearita a monotonie se uplatní v obecné větě, ze které Věta B jednoduše vyplývá. Takovou větu (někdy též označovanou „věta o třech funkcích“) dokázal r. 1953 Pavel Petrovič Korovkin (1913–1985)[5]). U nás ji zpopularizoval článek [1]. Dokážeme ji v obecném „funkcionálně-analytickém“ tvaru pomocí obratu, který bývá označován jako „$\sqrt{\delta}$-trik“.

Věta K. *Jsou-li L_n, $n \in \mathbb{N}$, monotónní lineární zobrazení $\mathcal{C}([a,b])$ do $\mathcal{C}([a,b])$, pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) $L_n f \rightrightarrows f$ *pro všechny funkce* $f \in \mathcal{C}([a,b])$,

(ii) $L_n f_j \rightrightarrows f_j$ *pro funkce* $f_j(x) = x^j$, $x \in [a,b]$, *kde* $j = 0, 1, 2$.

[5]) Korovkin ohlásil výsledek ve sdělení [12] z r. 1953, avšak o rok dříve podobnou větu uveřejnil v [4] Harald Bohman (1920–1996).

Důkaz. Z podmínky (i) zřejmě plyne (ii), stačí tedy dokázat obrácenou implikaci. Zvolme $f \in \mathcal{C}([a,b])$ a $M \in \mathbb{R}$ tak, že $\|f\| < M$. Je-li $\varepsilon > 0$, pak ze stejnoměrné spojitosti f na $[a,b]$ plyne existence takového $\delta > 0$, že platí (zde je onen „$\sqrt{\delta}$-trik“)

$$(x-y)^2 \leqq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leqq \varepsilon.$$

Položíme-li $\alpha = 2M/\delta$, pak zvážením případů $(x-y)^2 \leqq \delta$ a $(x-y)^2 > \delta$ dostaneme pro všechna $x, y \in [a,b]$ nerovnost

$$|f(x) - f(y)| \leqq \varepsilon + \alpha(x-y)^2,$$

ze které plyne pro všechna $y \in [a,b]$

$$|f - f(y)| \leqq \varepsilon + \alpha(f_1 - y)^2.$$

Z monotonie a linearity operátorů L_n odtud vyplývá

$$\begin{aligned}|L_n f - f(y) L_n 1| &\leqq \varepsilon L_n 1 + \alpha(L_n f_2 - 2y L_n f_1 + y^2 L_n 1) = \\ &= \varepsilon L_n 1 + \alpha\big((L_n f_2 - y^2) - 2y(L_n f_1 - y) + y^2(L_n 1 - 1)\big),\end{aligned}$$

a po dosazení x za y a úpravě

$$\begin{aligned}|L_n f(x) - f(x)| &\leqq |f(x)| \cdot |L_n 1 - 1| + \varepsilon L_n 1 + \\ &\quad + \alpha\big[\big(L_n f_2(x) - f_2(x)\big) - 2 f_1(x)\big(L_n f_1(x) - f_1(x)\big) + f_2(x)(L_n 1 - 1)\big].\end{aligned}$$

Protože existuje $K \in \mathbb{R}$ tak, že $\|f_k\| < K$ pro $k = 0, 1, 2$, dostaneme přechodem k supremu

$$\|L_n f - f\| \leqq M\|L_n f_0 - f_0\| + \varepsilon L_n f_0 + \alpha K(\|L_n f_2 - f_2\| + 2\|L_n f_1 - f_1\| + \|L_n f_0 - f_0\|),$$

z čehož již plyne dokazované tvrzení.

Poznamenejme, že i geometricky je předchozí důkaz velmi názorný: pro danou funkci f „zkontrolujeme“ $L_n f$ v každém bodě $x \in [a,b]$ pomocí systému funkcí $f(x) \pm \big(\varepsilon + \gamma(x-t)^2\big)$, $t \in [a,b]$, s vhodnými $\varepsilon, \gamma > 0$. Tuto „kontrolu“ umožňuje fakt, že známe chování $L_n f_k$ pro $k = 0, 1, 2$. Při $L_n f_0 = f_0$, což nastává např. při $L_n f = B_n f$, se odhady ještě zjednoduší. Je-li použit též *modul spojitosti*, je možno odhadnout $\|L_n f - f\|$ elegantněji a přesněji, což následně vede pro Bernštejnovy polynomy k odhadu rychlosti konvergence pomocí $O(1/\sqrt{n})$; srv. [7], s. 68–70.

Zvážíme-li vývoj důkazů Věty W, postřehl Lerch záhy, že důkaz lze provést pomocí Fourierových řad. Potřebný aparát byl k dispozici prakticky od r. 1870, kdy Eduard Heine (1821–1881) publikoval práci [8], ve které byla dokázána *stejnoměrná* konvergence Fourierovy řady spojité po částech monotónní funkce. Přesto Větu W objevil až 15 let poté sedmdesátiletý Weierstrass na sklonku své životní dráhy a dokázal ji zcela jiným způsobem. Ještě po dalších téměř sedmdesáti letech hledání jiných důkazů tuto větu pronikavě zdokonalili patrně zcela nezávisle dva lidé. Možná, že se čtenáři bude zdát tento vývoj křivolaký. To však není pro matematiku atypické. Možnost stále hledat a často i nacházet jednodušší cesty je jednou z věcí, které jsou na ní krásné.

Poděkování. Děkuji RNDr. VĚŘE KŮRKOVÉ, DrSc., za upozornění na článek [16], který přináší podstatně hlubší pohled na Weierstrassovu větu a který jsem při psaní tohoto textu neznal. V něm čtenář nalezne řadu dalších podrobností o důkazech Věty W.

L i t e r a t u r a

[1] BAUER, H.: *Aproximace a abstraktní hranice.* PMFA *26* (1981), 305–326.

[2] BAUER, H.: *Probability theory.* De Gruyter, Berlin – New York 1996.

[3] BERNŠTEJN, N. S.: *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités.* Communications of the Charkov Math. Society (1912).

[4] BOHMAN, H.: *On approximation of continuous and of analytic functions.* Ark. Math. *2* (1952), 43–56.

[5] BOREL, É.: *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes.* Gauthier-Villars, Paris 1905.

[6] CAROTHERS, N. L.: *Real analysis.* Cambridge University Press, Cambridge 2000.

[7] FEINERMAN, R. P., NEWMAN, D. J.: *Polynomial approximation.* William & Wilkins, Baltimore 1974.

[8] HEINE, E.: *Über trigonometrischen Reihen.* J. Reine Angew. Math. *71* (1870), 353–365.

[9] JARNÍK, V.: *Diferenciální počet II.* Academia, Praha 1953, 1956, 1976.

[10] KOČINA, P. M.: *Sofija Vasil'evna Kovalevskaja (1850–1891).* Nauka, Moskva 1981.

[11] KOČINA, P. M.: *Karl Vejerštrass (1815–1897).* Nauka, Moskva 1985.

[12] KOROVKIN, P. P.: *O schodimosti linějnych položitělnych operatorov v prostranstve něpreryvnych funkcij.* Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S.) *90* (1953), 961–964.

[13] KÖRNER, T. W.: *Fourier analysis.* Cambridge Univerity Press, Cambridge 1988 (další vydání 1990, 1992).

[14] LEBESGUE, H.: *Sur l'approximation des fonctions.* Bull. Sci. Math. (2. sér.) *22* (1898), 278–287.

[15] LERCH, M.: *Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel.* Acta Math. *27* (1903), 339–351.

[16] PINKUS, A.: *Weierstrass and approximation theory.* J. Approx. Theory *107* (2000), 1–66.

[17] RUNGE, C.: *Über die Darstellung willkürlicher Funktionen (Auszug eines Briefes an Herrn G. Mittag-Leffler).* Acta Math. *7* (1885), 387–392 (navazuje na článek téhož autora z Acta Math. *6*).

[18] SIEGMUND-SCHULTZE, R.: *Der Beweis des Weierstraßschen Approximationssatzes 1885 vor dem Hintergrund der Entwicklung der Fourieranalysis.* Hist. Math. *15* (1988), 299–310.

[19] VESELÝ, J.: *Matematická analýza pro učitele.* Matfyzpress, Praha 1997, 2001.

[20] WEIERSTRASS, K.: *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente. (Aus dem Sitzungbericht der Königl. Akademie der Wischenschaften vom 9. und 30. Juli 1885.)* Mathematische Werke von Karl Weierstrass, Mayer & Müller, Berlin 1903, 1–37.

[21] ZVÁRA, K., ŠTĚPÁN, J.: *Pravděpodobnost a matematická statistika.* Matfyzpress, Praha 2001.