John Stillwell
Příběh stodvacetistěnu v $\mathbb{R}^4$

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 46 (2001), No. 4, 265--280

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141092`

Příběh stodvacetistěnu v $\mathbb{R}^4$

John Stillwell

Jedním z nejkrásnějších matematických objektů je pravidelný polytop (d-rozměrný mnohostěn) v $\mathbb{R}^4$, jehož hranici tvoří 120 pravidelných[1]) dvanáctistěnů. Tento stodvacetistěn je raritou mezi raritami, protože žije ve třech velmi zvláštních světech. Domovem je mezi pravidelnými mnohostěny v $\mathbb{R}^4$, ale přebývá také na pozoruhodné sféře $\mathbb{S}^3$ a ještě i v algebře kvaternionů $\mathbb{H}$. A navíc, jako by to nestačilo, tento stodvacetistěn také postihuje symetrii dvacetistěnu a strukturu homologické sféry Poincarého. Všechny tyto skutečnosti jsou známy od třicátých let devatenáctého století, ale příběh stodvacetistěnu lze vyprávět elegantněji současnou řečí a ilustrován může být lépe než kdykoliv dříve pomocí počítačové grafiky. Navíc nové obrázky stodvacetistěnu jej přivádějí do souvislosti s aktuální problematikou konfigurací mýdlových bublin; stačí jej přirozeným způsobem zobrazit v $\mathbb{R}^3$.

Vyprávění příběhu současnou řečí v sobě skrývá nebezpečí, že jisté souvislosti se stanou tak „zřejmými“, že je těžko pochopitelné, jak je naši matematičtí předkové mohli přehlédnout. Je však marné se ohlížet zpět; nedokážeme nevidět vztahy, které už nyní známe, a bude tedy nejvhodnější psát tak, jak nejlépe umíme, ale zároveň přiznat, že požíváme výhod, jež naši předchůdci neměli.

Příběh začíná prvním setkáním se čtvrtou dimenzí ve čtyřicátých letech devatenáctého století, zaplete se do teorie grup v desetiletí následujícím a je ovlivněn topologií kolem roku 1900. Abychom však postavili správné kulisy, musíme začít přehledem pravidelných mnohostěnů v $\mathbb{R}^3$, protože ty jsou počátkem všeho, o čem budeme mluvit.

Pravidelné mnohostěny

Pět pravidelných mnohostěnů (viz obr. 1) existovalo v přírodě již před počátkem lidské historie (například jako tvary krystalů nebo virů) a do historie matematiky vstoupilo velmi časně. Jsou vrcholem Eukleidových *Základů*.

Existuje celá řada důkazů, že jiné pravidelné mnohostěny než tato pětice nemohou existovat. Jednak klasický důkaz vypočítávající, které mnohoúhelníky mohou být

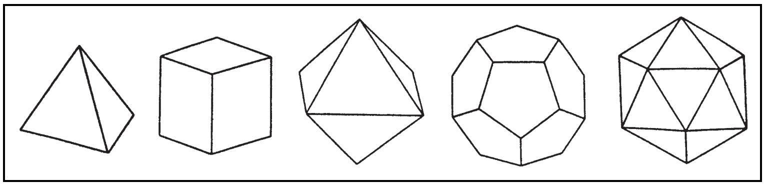
[1]) *Pozn. překladatelů:* Slovo pravidelný budeme nadále většinou vynechávat.

John Stillwell je profesorem na Monash University (Melbourne) a na University of San Francisco. Jeho e-mailová adresa je `john.stillwell@monash.edu.au`.

The story of the 120*-cell.* Notices Amer. Math. Soc. *48* (2001), 17–24.

Přeložili Michal Křížek, Ivan Saxl a Karel Segeth za podpory grantu GA ČR 201/01/1200. Překladatelé děkují Janu Chlebounovi a Oldřichu Kowalskému za cenné připomínky.

stěnami a které součty úhlů jsou přípustné ve vrcholech, jednak topologický důkaz ukazující, že vše je řízeno Eulerovou charakteristikou, a také lze uvést krásný důkaz Legendrův založený na sférické geometrii. Méně elegantní důkaz, připouštějící však zobecnění do vyšší dimenze, uvažuje poměr délek hran k průměru opsané sféry a uvádí jej do souvislosti s odpovídajícím poměrem v objektu nižší dimenze, kterým je *vrcholový obrazec* (konvexní obal vrcholů sousedících s daným vrcholem).



Obr. 1. Pět pravidelných mnohostěnů (platónských těles).

Označme tento poměr ER (angl. edge ratio). Lze snadno ukázat, že pokud Π je mnohostěn ohraničený p-úhelníky a pokud Π' je jeho vrcholový obrazec, pak

$$\mathrm{ER}^2(\Pi) = 1 - \frac{\cos^2(\pi/p)}{\mathrm{ER}^2(\Pi')}$$

a musí platit $1 > \cos(\pi/p)/\mathrm{ER}(\Pi')$. Když Π' je pravidelný q-úhelník, potom $\mathrm{ER}(\Pi') = \sin(\pi/q)$, takže

$$\cos\frac{\pi}{p} < \sin\frac{\pi}{q}\,.$$

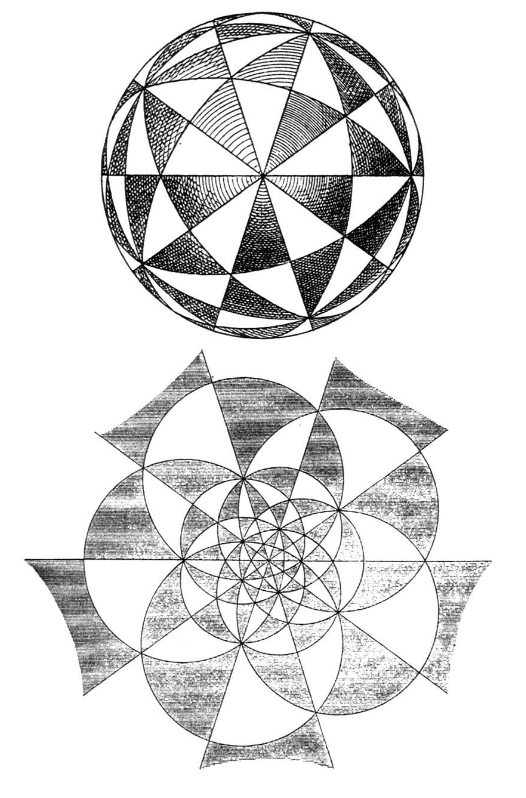
Jediné dvojice párů počtu hran (p, q) splňující tuto podmínku jsou právě ty, které odpovídají pěti standardním mnohostěnům.

Předností tohoto důkazu je *snížení dimenze* při přechodu od Π k Π'. Zobecnění tohoto důkazu umožňuje vyvodit pravidelné objekty Π v $\mathbb{R}^{n+1}$ ze známých pravidelných objektů v $\mathbb{R}^n$.

Jiné snížení dimenze, užitečné pro účely zobrazení, může být ilustrováno také pomocí pravidelných mnohostěnů. Vrcholy pravidelného mnohostěnu Π leží na sféře $\mathbb{S}^2$ v $\mathbb{R}^3$, takže centrální projekce Π z jeho středu na $\mathbb{S}^2$ vytvoří pravidelnou teselaci[2]) $\mathbb{S}^2$ sférickými mnohostěny. Tato teselace může být poté zobrazena v $\mathbb{R}^2$ stereografickou projekcí. Felix Klein použil této myšlenky ke znázornění grup symetrie pravidelných mnohostěnů a skvělé obrázky odpovídajících teselací tak byly pořízeny z jeho podnětu. Dvě z nich ukazuje obr. 2, převzatý z práce [10, s. 105–106], jejíž autoři jsou Klein a Fricke. Tyto teselace jsou odvozeny z dvacetistěnu (a jeho duálního dvanáctistěnu), jejichž každá stěna je rozdělena svými osami symetrie.

Stejnou myšlenku lze použít i pro pravidelné mnohostěny v $\mathbb{R}^4$ a tato myšlenka je zvlášť užitečná pro znázornění stodvacetistěnu. Jeho projekce na $\mathbb{S}^3$, a pak do $\mathbb{R}^3$ dává obrazy, které jsou srozumitelné a matematicky významné. Zejména uvidíme, že stodvacetistěn poskytuje jiný pohled na grupu rotací dvacetistěnu.

[2]) *Pozn. překladatelů:* Místo slova teselace se často též užívá mozaika, parketáž, kachlíkování.



Obr. 2. Dvacetistěnová teselace $\mathbb{S}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

Klein zjistil, že grupy rotací čtyřstěnu, krychle (a jejího duálního osmistěnu) a dvacetistěnu (a jeho duálního dvanáctistěnu) nejsou nic jiného než alternující a symetrické grupy A_4, S_4 a A_5. Ve svých slavných *Lekcích o dvacetistěnu* dospěl k výsledným vztahům mezi pravidelnými mnohostěny a řešením rovnic pátého stupně.

Avšak již v roce 1856, dávno před prací Kleinovou, nalezl William Rowan Hamilton algebraický ekvivalent obrázku 2: *reprezentaci* dvacetistěnové grupy pomocí generátorů a jistých vztahů. Byl to první významný výsledek kombinatorické teorie grup. V následující práci [8, s. 609] Hamilton zavedl všechny tři polyedrální grupy: grupu $\mathcal{T}$ rotací čtyřstěnu, grupu $\mathcal{O}$ rotací osmistěnu (a krychle) a grupu $\mathcal{I}$ rotací dvacetistěnu (a dvanáctistěnu).

Hamilton definoval $\mathcal{I}$ pomocí tří symbolů ι, κ a λ a vztahů

$$\iota^2 = \kappa^3 = \lambda^5 = 1, \quad \lambda = \iota\kappa.$$

Protože λ je nadbytečné, může být grupa jednodušeji definována vztahy

$$\iota^2 = \kappa^3 = (\iota\kappa)^5 = 1.$$

Symbol ι může být interpretován jako poloviční otočka dvacetistěnu kolem osy procházející středy protilehlých hran. (V obrázku 2 je takový střed znázorněn bodem, v němž se stýkají dva černé a dva bílé trojúhelníky.) Symbol κ představuje otočku o jednu třetinu kolem osy procházející středy protilehlých stěn (v obrázku 2 jsou to vrcholy, v nichž se setkávají tři černé a tři bílé trojúhelníky).

Teselace na obrázku 2 tedy zobrazuje Hamiltonovu reprezentaci $\mathcal{I}$ a jako ulitá padne odpovídajícímu dvacetistěnu i dvanáctistěnu. Nicméně se naskýtá otázka, zda neexistuje homogennější obraz $\mathcal{I}$, totiž takový, v němž by byl pouze jediný typ vrcholů místo tří. Později uvidíme, že takový obraz existuje v trojrozměrném prostoru a je v podstatě stodvacetistěnem.

Hamilton měl po ruce kombinatorickou interpretaci ι, κ a λ jako pravidla pro „přechod ze stěny na stěnu" mnohostěnu a nemusel je chápat jako rotace. U objevitele kvaternionové algebry je však překvapivější to, že nechápal ι, κ a λ jako kvaterniony. Dnes si myslíme, že kvaterniony jsou ideálním způsobem, jak reprezentovat rotace, a za původce této myšlenky je považován právě Hamilton.

Kvaterniony

Kvaternionová algebra patří do uzavřeného systému algeber $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ a $\mathbb{O}$, které jsou normovanými algebrami nad $\mathbb{R}$, tj. k algebrám, pro něž součin uv libovolných prvků u a v splňuje $|uv| = |u||v|$. Z těchto čtyř algeber je $\mathbb{H}$ patrně nejúchvatnější. Komplexní pole $\mathbb{C}$ je pro nás už běžná záležitost a algebra oktonionů[3]) $\mathbb{O}$ může být chápána (poněkud nespravedlivě, ale to již leží mimo záměr tohoto článku) jako vedlejší produkt $\mathbb{H}$.

Příběh $\mathbb{H}$ je ovšem nejen příběhem Hamiltona, ale i několika dalších matematiků, kteří sice siluetu kvaternionů zahlédli, ale dostatečně neporozuměli tomu, co vidí.

Hamilton objevil kvaterniony při hledání normovaných algeber nad prostorem $\mathbb{R}$ libovolné dimenze. V roce 1835 zjistil, že $\mathbb{C}$ může být abstraktně definováno jako $\mathbb{R}^2$ s obvyklým vektorovým součtem, avšak s daleko méně zřejmým součinem

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2,\ b_1a_2 + a_1b_2).$$

Tento vztah je pochopitelně inspirován pohledem zpět. Je totiž přesně tím, co dostaneme, když každé komplexní číslo $a + \mathrm{i}b$ považujeme za uspořádanou dvojici (a, b) reálných čísel a spočteme, která dvojice odpovídá $(a_1 + \mathrm{i}b_1)(a_2 + \mathrm{i}b_2)$, jestliže předpokládáme, že i^2 je rovno -1. Vztah však může být nahlédnut i zevnitř: dostatečně chytrý matematik by jej mohl chápat jako důsledek *dvoučtvercové identity.* Tato identita říká, že součty čtverců jsou multiplikativní v tom smyslu, že každé číslo, které se dá vyjádřit jako součin součtů dvou čtverců

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2),$$

je samo o sobě součtem dvou čtverců

$$(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (b_1a_2 + a_1b_2)^2.$$

[3]) *Pozn. překladatelů:* Alternativní název je algebra oktáv, velmi často se používá také termín Cayleyova čísla.

Tuto identitu patrně znal již Diofantos a byla explicitně zmíněna pozdějšími komentátory jeho díla, jako třeba Fibonaccim v jeho *Knize o čtvercích* z roku 1225. Dnes bychom řekli, že identita vyjadřuje multiplikativní vlastnost normy $a^2 + b^2$ dvojice čísel (a, b). (Diofantovo chápání bylo podobné, avšak konkrétnější: (a, b) byl pravoúhlý trojúhelník se stranami a a b, zatímco $a^2 + b^2$ byl čtverec nad přeponou.) Tato vlastnost dělá z $\mathbb{C}$ normovanou algebru, a proto Hamilton doufal, že ji najde ve vyšších dimenzích.

Jeho prvním pokusem bylo hledání takové součinové formule pro trojici $(a, b, c) = a + \mathrm{i}b + \mathrm{j}c$, která by z $\mathbb{R}^3$ udělala normovanou algebru. Hamilton pracoval na tomto problému zhruba od roku 1830 do 1843 a překvapivě si neuvědomoval známé obtíže tohoto řešení. Součinová formule na $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ implikuje, jak jsme viděli, že součty dvou čtverců jsou multiplikativní. Například — a je to právě ta úloha z Diofanta, z níž pozdější komentátoři vyvodili dvoučtvercovou identitu —

$$65 = 13 \cdot 5 = (3^2 + 2^2)(2^2 + 1^2),$$

a proto

$$65 = (3 \cdot 2 - 2 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 2 + 3 \cdot 1)^2 = 4^2 + 7^2.$$

Podobná součinová formule s multiplikativní normou na $\mathbb{R}^3$ by implikovala, že celé číslo rozkládající se na součin dvou součtů tří čtverců je samo součtem tří čtverců, což však prostě není pravda. Uvažujme kupříkladu

$$15 = 5 \cdot 3 = (2^2 + 1^2 + 0^2)(1^2 + 1^2 + 1^2).$$

Jiný příklad, $63 = 21 \cdot 3$ (používající pouze kladné čtverce), byl publikován Legendrem. Hamilton však na něj nenarazil dříve, než se vzdal dalších pokusů s $\mathbb{R}^3$. Trojice opustil 16. října 1843, když uviděl, že potřebuje nikoliv dvě imaginární jednotky i a j, ale tři: i, j a ij = k splňující

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1.$$

Z těchto vztahů plyne, že $\mathrm{ij} = -\mathrm{ji}$, takže součin není komutativní, avšak Hamilton byl na takovou možnost připraven. Setkal se s ní již při svém neúspěšném hledání součinu trojic. Součin čtveřic měl spásný dar multiplikativní normy, takže Hamilton dosáhl svého hlavního cíle: nalezl normovanou algebru čtveřic, známou nyní jako *kvaternionová algebra* $\mathbb{H}$.

Důsledkem multiplikativní normy je *čtyřčtvercová identita*, již Hamilton v první chvíli považoval za svůj objev. Ve skutečnosti ji však znal Euler již v roce 1748 a Lagrange ji také použil ve svém dobře známém (některým matematikům) důkazu, že každé kladné celé číslo je součtem čtyř čtverců. Navíc pozoruhodným přeformulováním čtyřčtvercové identity je *komplexní dvoučtvercová identita*, objevující se v nepublikované práci Gaussově (Werke, vol. 3, s. 383–384):

$$(|a_1|^2 + |b_1|^2)(|a_2|^2 + |b_2|^2) = |a_1 a_2 - b_1 \overline{b_2}|^2 + |b_1 \overline{a_2} + a_1 b_2|^2.$$

Gaussova identita svou udivující podobností s identitou Diofantovou napovídá definici kvaternionového násobení (ekvivalentního Hamiltonovu) jako součinu párů (a, b) komplexních čísel,

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 \overline{b_2}, b_1 \overline{a_2} + a_1 b_2).$$

Komplexní dvoučtvercová identita je příbuzná jiné formuli nalezené Gaussem kolem roku 1819 (a diskutované níže), takže patrně pochází ze stejné doby. Pohlédneme-li zpět, můžeme tyto Eulerovy a Gaussovy výsledky považovat za „tušení“ algebry $\mathbb{H}$, podobná Diofantovu tušení algebry $\mathbb{C}$. Jiné tušení algebry $\mathbb{H}$, jež měl Rodrigues v roce 1840, bude popsáno při diskusi vztahu kvaternionů k rotacím. Hamiltonovo prvenství je však bezpečné; zásluhu jeho objevu jenom zvětšuje skutečnost, že tak velcí matematici jako Euler a Gauss kvaternionovou algebru minuli, ačkoliv ji zdálky zahlédli.

Rotace

Jakmile Hamilton objevil kvaterniony, byl si jist tím, že stojí za to, aby je studoval po zbytek svého života. Jeho přátelé si tím tak jisti nebyli. V říjnu 1843 napsal Hamiltonovi John Graves, který s ním pracoval léta na normovaných algebrách:

Musel jste mít velmi rozvernou náladu, když jste se vytasil s takovým ukvapeným nápadem, že by ij *mohlo být různé od* ji *… Máte nějaké aspoň slabé zdání o existenci přírodních procesů, působení, jevů nebo představ analogických řetězci*

$$\begin{aligned} \mathrm{ij} &= -\mathrm{ji} = \mathrm{k}, \\ \mathrm{jk} &= -\mathrm{kj} = \mathrm{i}, \\ \mathrm{ki} &= -\mathrm{ik} = \mathrm{j}\,? \end{aligned}$$

Hamilton ve své odpovědi naznačil aplikace ve fyzice a sdělil, že kvaterniony by jistě mohly být použity pro odvození vět ve sférické trigonometrii. Graves však nebyl spokojen:

Ještě stále je v systému něco, co mě uvádí do rozpaků. Dosud jsem si neudělal jasný názor na rozsah, v němž si můžeme libovolně vytvářet imaginární jednotky a vybavovat je nadpřirozenými vlastnostmi … I když však mají Vaše symboly své fyzikální vzory, které by mohly vést k Vašim kvaternionům, jakým právem máte takové štěstí, že k tomu systému dojdete pouhým důvtipem?

(Více o těchto dopisech viz v práci [7], vol. 3, s. 443.)

Samozřejmě, že Gravesova poznámka o štěstí byla ironická. Graves sám vstoupil do této záležitosti v prosinci 1843 tím, že objevil osmičtvercovou identitu a s ní i normovanou algebru oktonionů $\mathbb{O}$ — ale to je jiný příběh. Odpověď na jeho otázku byla, že „fyzikální vzory“ kvaternionů byly již dvakrát zaznamenány v literatuře, v pracích Gausse a Rodriguese. Jsou jimi rotace v $\mathbb{R}^3$.

Byl zde opět precedens, a to v historii komplexních čísel, která souvisejí s rotacemi v $\mathbb{R}^2$. Kolem roku 1590 se zjistilo, že Diofantův proces generování dvojice stran $(a_1a_2 - b_1b_2, b_1a_2 + a_1b_2)$ pravoúhlého trojúhelníka z dvojic stran (a_1, b_1) a (a_2, b_2) v sobě skrývá ještě jedno tajemství. Viète ve své práci *Genesis triangulorum* ukázal, že tento proces nejen násobí přepony, ale také „sčítá" úhly (mezi první odvěsnou a přeponou). Viète odvodil vztah mezi úhly a komplexními čísly, který později našel svou podobu v Moivrově větě.

Gaussův proces, který z dvojic komplexních čísel (a_1, b_1) a (a_2, b_2) vytváří dvojici $(a_1a_2 - b_1\overline{b}_2, b_1\overline{a}_2 + a_1b_2)$, kombinuje podobně rotace v $\mathbb{R}^3$. Gauss to objevil kolem roku 1819 (*Werke*, vol. 8, s. 354–362) tak, že stereograficky promítl sféru $\mathbb{S}^2$ do roviny. Když rovinu interpretoval jako $\mathbb{C}$, zjistil, že každá rotace sféry $\mathbb{S}^2$ indukuje zobrazení roviny $\mathbb{C}$, jež má tvar

$$z \longmapsto \frac{az + b}{-\overline{b}z + \overline{a}}\,.$$

Každá rotace sféry $\mathbb{S}^2$ (tj. rotace $\mathbb{R}^3$) se tedy dá parametrizovat dvojicí komplexních čísel (a, b). Jestliže se kombinují rotace parametrizované dvojicemi (a_1, b_1) a (a_2, b_2), výsledná rotace je parametrizována dvojicí $(a_1a_2 - b_1\overline{b}_2, b_1\overline{a}_2 + a_1b_2)$.

Gauss však tento výsledek nepublikoval, takže Cayley ([1], vol. X, s. 153) jej znovu objevil v roce 1879. Vede k elegantní maticové reprezentaci algebry $\mathbb{H}$, která je už naznačena v Cayleyově článku o maticích ([1], vol. II, s. 491) z roku 1858. Místo lineární lomené funkce $z \mapsto (az + b)/(-\overline{b}z + \overline{a})$ se užívá matice

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ -\overline{b}, & \overline{a} \end{pmatrix},$$

kterou lze rozložit na součet

$$\alpha\mathbf{1} + \beta\mathbf{i} + \gamma\mathbf{j} + \delta\mathbf{k}$$

tak, že se položí $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$ a $b = \gamma + \mathrm{i}\delta$, kde α, β, γ a δ jsou reálná čísla. Matice $\mathbf{1}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ pak mají postupně tvar

$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathrm{i}, & 0 \\ 0, & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0, & \mathrm{i} \\ \mathrm{i}, & 0 \end{pmatrix}$$

a splňují identitu

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}.$$

Cayleyovy matice $\alpha\mathbf{1} + \beta\mathbf{i} + \gamma\mathbf{j} + \delta\mathbf{k}$ jsou tedy izomorfní s kvaterniony $\alpha + \mathrm{i}\beta + \mathrm{j}\gamma + \mathrm{k}\delta$.

Přejdeme-li od lineární lomené funkce $(az + b)/(-\overline{b}z + \overline{a})$ ke kvaternionu

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ -\overline{b}, & \overline{a} \end{pmatrix},$$

připouštíme určitou nejednoznačnost, která se týká rotací. Téže funkci odpovídá nekonečně mnoho matic, a i když se omezíme na kvaterniony s normou $|a|^2 + |b|^2 = 1$, každá rotace odpovídá dvojici

$$\pm\begin{pmatrix} a, & b \\ -\overline{b}, & \overline{a} \end{pmatrix}.$$

Tomu nelze zabránit, protože kvaterniony s normou 1 tvoří $\mathbb{S}^3$, kdežto rotace sféry $\mathbb{S}^2$ vytvářejí projektivní prostor $\mathbb{R}P^3$, který není homeomorfní s $\mathbb{S}^3$. Vskutku $\mathbb{R}P^3$ je prostor protilehlých dvojic bodů sféry $\mathbb{S}^3$, což jsou právě svrchu uvedené dvojice matic, jež se liší pouze znaménkem.

Protože každé rotaci odpovídají dva kvaterniony, jsou polyedrální grupy $\mathcal{T}$, $\mathcal{O}$ a $\mathcal{I}$ „povýšeny“ na kvaternionové grupy dvojnásobné velikosti: *binární čtyřstěnovou grupu* **T** o 24 prvcích, *binární osmistěnovou grupu* **O** o 48 prvcích a *binární dvacetistěnovou grupu* **I** o 120 prvcích.

Můžeme si položit otázku, jaký je vztah čtyř reálných parametrů α, β, γ a δ ve dvojici kvaternionů $\pm(\alpha + i\beta + j\gamma + k\delta)$ ke geometrickým parametrům odpovídající rotace. Odpověď je pozoruhodně jednoduchá:

$$\alpha = \cos\tfrac{1}{2}\theta, \quad \beta = \lambda\sin\tfrac{1}{2}\theta, \quad \gamma = \mu\sin\tfrac{1}{2}\theta, \quad \delta = \nu\sin\tfrac{1}{2}\theta,$$

kde (λ, μ, ν) je jednotkový vektor ve směru osy rotace a θ je velikost pootočení kolem osy. Dokázali to Hamilton a Cayley nezávisle na sobě v roce 1845 (viz [1], vol. 1, s. 123). Cayley (jako obvykle čitelnější než Hamilton) si také všiml, že stejné parametry použil už v roce 1840 Rodrigues ve svém pravidle pro výpočet parametrů složené rotace, což v podstatě bylo pravidlo pro násobení kvaternionů. Později, když se objevila nepublikovaná Gaussova práce, se ukázalo, že Gauss toto pravidlo také znal.

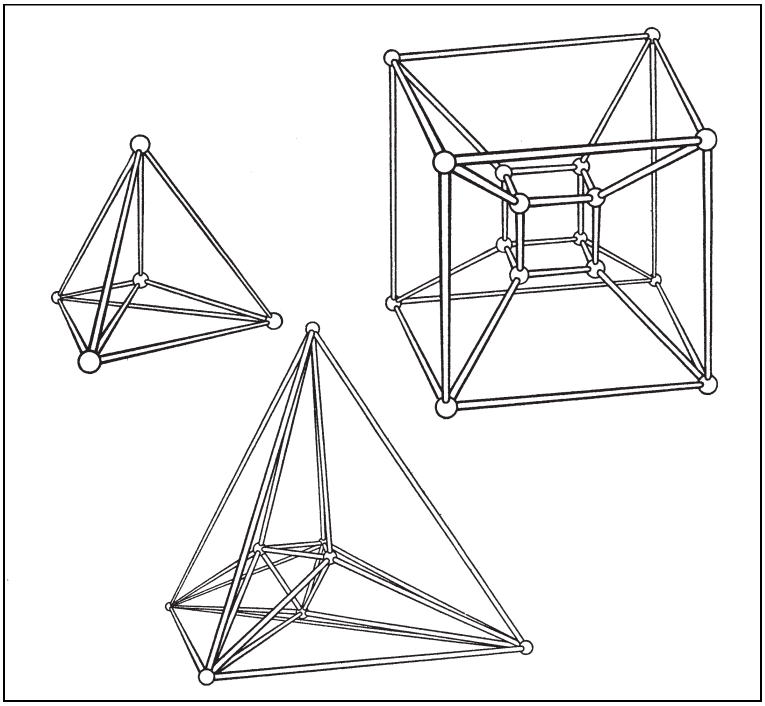
V lednu 1863 Cayley (viz [1], vol. V, s. 539) použil geometrické parametry, aby vyjádřil prvky binárních polyedrálních grup **T**, **O** a **I** jako kvaterniony. Tvoří totiž pozoruhodně symetrické množiny v $\mathbb{R}^4$ a — což Cayley nevěděl — byly již v geometrii známy.

Pravidelné polytopy[4])

Kvaterniony byly součástí výrazné vlny geometrie ve více dimenzích, která se přivalila, z důvodů poněkud tajemných, v letech 1843–1844. Až do té doby byla geometrie ve více než třech dimenzích oblíbena dokonce ještě méně než neeukleidovská geometrie. Nicméně v roce 1843 Cayley zveřejnil, nezávisle na Hamiltonovi, článek nazvaný „Chapters in the analytical geometry of (n) dimensions“ a Grassmann psal první vydání své knihy *Ausdehnungslehre*, která vyšla v roce 1844. Můžeme připustit, že tyto poslední práce byly v obecném matematickém vědomí zaznamenány jen nepatrně, ale možná fungovalo matematické podvědomí. Kolem roku 1852 odpověděl jiný matematik, který pracoval spíše ve skrytu, na všechny základní otázky o vícedimenzionálních pravidelných mnohostěnech neboli polytopech, jak se jim nyní říká.

---

[4]) *Pozn. překladatelů:* Termín *polytop* pro polyedry dimenze vyšší než tři zavedl v roce 1852 německý matematik R. Hoppe, známý svou účastí v řešení sporu Newtona a Gregoryho o počtu nejbližších sousedů koule. Jeho všeobecné rozšíření je však zásluhou Alicie Boole Stottové (1860–1940), třetí dcery George Boolea, která, ačkoli neměla žádné matematické vzdělání, se proslavila svými kartonovými modely řezů čtyřrozměrnými pravidelnými polytopy a pozdější spoluprací s H. S. M. Coxeterem.



Obr. 3. Tři nejjednodušší pravidelné polytopy.

Ludwig Schläfli předložil tyto a mnohé další výsledky ve své práci *Theorie der vielfachen Kontinuität* [13], napsané v roce 1852, v úplné podobě však vydané až v roce 1901, šest let po jeho smrti. Jeho výsledky o polytopech se staly všeobecně známými, až když je jiní matematici objevili znovu v osmdesátých letech 19. století.

Hlavní výsledky Schläfli získal pomocí poměru ER, o kterém jsme se zmínili v odstavci o mnohostěnech, a dají se v současné terminologii vyjádřit takto:

- V každém prostoru $\mathbb{R}^n$ existují zobecnění čtyřstěnu, krychle a osmistěnu, která se nazývají n-simplex, n-krychle a n-ortoplex[5]).

  Kromě nich pro $n > 2$ existují jen následující pravidelné polytopy: dvanáctistěn a dvacetistěn v $\mathbb{R}^3$ a tři speciální polytopy v $\mathbb{R}^4$. Tyto tři se nazývají čtyřiadvacetistěn, stodvacetistěn a šestisetstěn podle počtu svých hraničních stěn. Stodvacetistěn a šestisetstěn jsou vzájemně duální[6]).

- V každém prostoru $\mathbb{R}^n$ existuje zobecnění krychlové teselace, které se nazývá n-krychlová teselace.

  Jediné pravidelné teselace, které kromě krychlových existují, jsou dvě pravidelné teselace v $\mathbb{R}^2$ — duální teselace trojúhelníky a šestiúhelníky — a dvě pravidelné teselace v $\mathbb{R}^4$ — duální teselace čtyřiadvacetistěny a 4-ortoplexy.

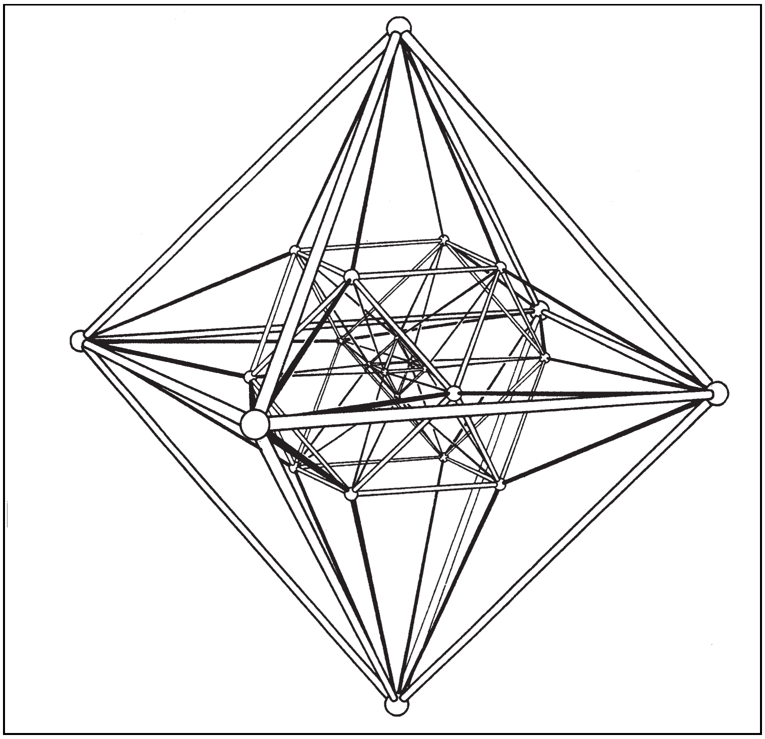
[5]) *Pozn. překladatelů:* Přesný český překlad termínu *orthoplex* by byl „ortospleť“ z řeckého $\pi\lambda\epsilon\kappa\tau\acute{o}\varsigma$ — spletitý.

[6]) *Pozn. překladatelů:* Čtyřiadvacetistěn v $\mathbb{R}^4$ je duální sám k sobě.

Schläfliova monografie neobsahuje žádné obrázky, což mohl být jeden z důvodů, proč byla špatně přijata. Stringhamova práce [15] z roku 1880, ve které byly poprvé znovu objeveny pravidelné polytopy, je doprovázena několika ilustracemi včetně perokreseb 4-simplexu, 4-krychle a 4-ortoplexu. Obrázky pravidelných polytopů generované současnými počítači lze najít na řadě webových stránek, často animované, popřípadě i ve stereoskopických párech. Dobrá startovací adresa je

`http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/polytope.html.`

Těžko překonatelné jsou však podle autorova názoru obrázky čtyř nejjednodušších polytopů v práci *Anschauliche Geometrie* autorů Hilberta a Cohn-Vossena [9] z roku 1932. Obr. 3 předvádí jejich nádherně nakreslený 4-simplex, 4-krychli a 4-ortoplex, které skutečně vypadají jako třídimenzionální, jen se jich dotknout. A obr. 4 představuje jejich znázornění čtyřiadvacetistěnu.



Obr. 4. Čtyřiadvacetistěn.

Samozřejmě, že tyto obrázky jsou, přesně řečeno, projekce vrcholů a hran polytopů do $\mathbb{R}^2$, ale vnímáme je jako objekty („drátěné modely“) v $\mathbb{R}^3$ ukazující projektivně zkreslené obrazy trojrozměrných stěn polytopů v $\mathbb{R}^4$. Například takovým trojrozměrným obrazem 4-simplexu je velký čtyřstěn se čtyřmi menšími čtyřstěny uvnitř. Těchto pět čtyřstěnů jsou obrazy pěti tetraedrálních stěn 4-simplexu. (Analogicky k obvyklé projekci čtyřstěnu[7]) do $\mathbb{R}^2$, která jej zobrazuje jako jeden velký trojúhelník se třemi malými uvnitř.)

Další obrázky předvádějí podobným způsobem tato fakta:

- 4-krychle je ohraničena osmi obvyklými krychlemi a může se tedy také nazývat osmistěnem v $\mathbb{R}^4$.
- 4-ortoplex je ohraničen šestnácti čtyřstěny a může se tedy také nazývat šestnáctistěnem v $\mathbb{R}^4$.
- Čtyřiadvacetistěn v $\mathbb{R}^4$ je ohraničen dvaceti čtyřmi osmistěny a má dvacet čtyři vrcholy. Polytop k němu *duální*, který má vrchol uprostřed každého hraničního mnohostěnu tohoto čtyřiadvacetistěnu, je opět čtyřiadvacetistěn.

Zcela snadno se najdou souřadnice vrcholů těchto polytopů. Nejjednodušší je to s 4-ortoplexem, jehož vrcholy se dají najít jako průsečíky souřadnicových os v $\mathbb{R}^4$ s jednotkovou 3-koulí. Čtyřiadvacetistěn se dá konstruovat ořezáním 4-ortoplexu nadrovinami, které procházejí středy jeho hran a jsou kolmé k osám souřadnic.[8]) Zvolíme-li vhodně měřítko, dostaneme čtyřiadvacetistěn, jehož vrcholy tvoří šestnáct bodů

$$\left(\pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}\right)$$

a osm bodů

$$(\pm 1, 0, 0, 0), \quad (0, \pm 1, 0, 0), \quad (0, 0, \pm 1, 0), \quad (0, 0, 0, \pm 1).$$

To je dohromady čtyřiadvacet jednotkových kvaternionů

$$\pm\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\mathrm{i} \pm \tfrac{1}{2}\mathrm{j} \pm \tfrac{1}{2}\mathrm{k}, \quad \pm 1, \quad \pm\mathrm{i}, \quad \pm\mathrm{j}, \quad \pm\mathrm{k},$$

které nepředstavují (v párech protilehlých bodů) nic jiného než dvanáct rotací pravidelného čtyřstěnu! Ověřit to je snadné a zábavné, pokud se použijí Gaussovy-Rodriguesovy-Cayleyovy parametry pro rotace uvedené v předchozím odstavci.

Zdá se, že Steinitz byl první matematik, který si (v práci [14], s. 125) všiml, že množina vrcholů čtyřiadvacetistěnu je binární čtyřstěnová grupa **T**. Poznal také, že množina vrcholů šestisetstěnu je binární dvacetistěnová grupa **I**. Je však zvláštní, že jeho poznámky zůstaly bez povšimnutí, dokud grupa **I** neprošla mlýnem topologické a kombinatorické teorie grup. Tento neočekávaný obrat v našem příběhu začal v roce 1904 a budeme o něm hovořit v následujícím odstavci.

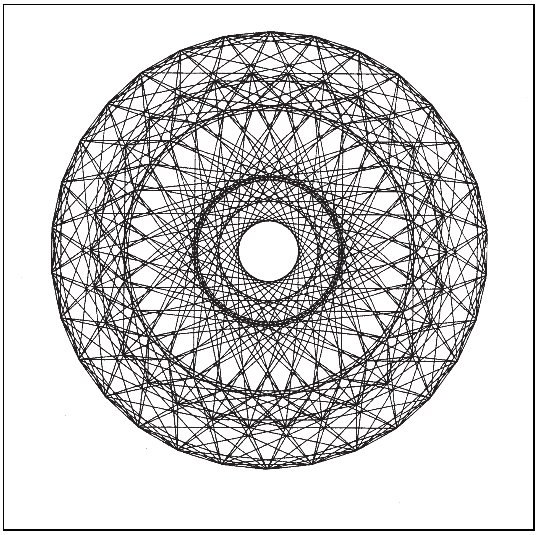
Homologická sféra Poincarého

V roce 1895 Poincaré zavedl nový přístup ke geometrii ve vyšších dimenzích tím, že se soustředil na *topologii*. Ve svém článku „Analysis situs“ a jeho pěti „Compléments“

[7]) *Pozn. překladatelů:* Zcela běžným znázorněním polytopů v trojrozměrném prostoru je Schlegelův diagram, v němž je polytop promítnut centrálně z vhodně vybraného bodu ležícího mimo něj do jedné ze stěn. Modely na obr. 3 lze chápat jako trojrozměrné Schlegelovy diagramy.

[8]) *Pozn. překladatelů:* Podobnou konstrukcí vznikne z osmistěnu známý Thompsonův tetrakaidekaedr (čtrnáctistěn) omezený šesti čtverci a osmi pravidelnými šestiúhelníky.

představil grupy homologií a homotopií jako prostředky pro topologickou klasifikaci a položil si známou otázku, která zůstává dodnes otevřená[9]): Je každá kompaktní trojrozměrná varieta s triviální fundamentální grupou homeomorfní s $\mathbb{S}^3$? Zpočátku se Poincaré domníval, že každá kompaktní trojrozměrná varieta s triviálními homologiemi může být homeomorfní s $\mathbb{S}^3$, což se však ukázalo jako nesprávné díky objevu *homologické sféry* v pátém „Complément“ (1904).



Obr. 5. Tato van Ossova projekce šestisetstěnu datovaná rokem 1901 získala široké rozšíření jako titulní list Coxeterovy klasické knihy *Regular Polytopes* z roku 1948. Pak byla také překreslena v jeho *Regular Complex Polytopes.*

Poincaré tento protipříklad vytvořil tak, že slepil dvě tělesa ohraničená plochami rodu 2 tak, aby kanonické křivky splynuly. Z této konstrukce spočítal generátory a vztahy pro fundamentální grupu π_1 a její abelizací[10]) ukázal, že homologická grupa H_1 je triviální (i když se abelizovaná grupa náhodou jevila jako zkolabovaná). Nakonec dokázal, že zkonstruovaná grupa π_1 *není* triviální, protože jejím homomorfním obrazem je grupa $\mathcal{I}$. Výskyt ikosaedrální grupy $\mathcal{I}$ na tomto místě je velké překvapení, protože Poincaréova konstrukce nemá žádnou očividnou symetrii.

V roce 1910 podal M. Dehn novou konstrukci homologické sféry, která zaváděla jistou *chirurgickou* techniku (viz [6, s. 116]). Vyříznutím trojnásobně zauzleného toroidu ze sféry $\mathbb{S}^3$ a jejím odlišným přišitím zpět byl schopen zlepšit konstrukci Poincarého ve dvou směrech. Grupa H_1 byla zřejmě triviální díky vlastnostem uzlu a π_1 mohlo být explicitně ztotožněno s binární ikosaedrální grupou $\mathbf{I}$. Protože $\mathcal{I}$ je homomorfním obrazem $\mathbf{I}$, bylo myslitelné, že by Dehnova homologická sféra byla stejná jako Poincarého, ale tento fakt prokázali Weber a Seifert [20] až v roce 1933.

V roce 1929 Hellmuth Kneser [11] znovu oživil zájem o homologickou sféru Poincarého zjištěním, že Dehnova verze může být zkonstruována ztotožněním protilehlých

[9]) *Pozn. překladatelů:* Vyřešení tohoto problému je spojeno s cenou 1 000 000 USD, kterou vypsal v roce 2000 the Clay Mathematics Institute of Cambridge, Massachusetts.

[10]) *Pozn. překladatelů:* Abelizací se zde rozumí utvoření faktorové grupy podle komutantu — normální podgrupy, která je vytvořena všemi komutátory dané grupy.

stěn dvanáctistěnu. Threlfall a Seifert [19] vylepšili tuto myšlenku tím, že uvažovali univerzální pokrytí $\mathbb{S}^3$ homologické sféry. Tam může každý vidět teselaci 120 shodnými dvanáctistěnnými celami (buňkami), z nichž každá je fundamentální oblastí pro akci grupy **I**. To je podezřele podobné teselaci projektované na $\mathbb{S}^3$ ze středu stodvacetistěnu v $\mathbb{R}^4$! Vskutku je to tak. Threlfall a Seifert podali geometrickou konstrukci homologické sféry Poincarého — jako faktorizaci grupy $\mathbb{S}^3$ podle její podgrupy **I** — a novou interpretaci stodvacetistěnu jako univerzálního pokrytí $\mathbb{S}^3$.

Zprvu však nevěděli, zda jejich rozdělení $\mathbb{S}^3$ na 120 shodných buněk je skutečně projekcí pravidelného stodvacetistěnu v $\mathbb{R}^4$. Chybějící částí této hádanky byla Steinitzova poznámka z roku 1916, že **I** je množina vrcholů šestisetstěnu. Threlfall to očividně nahlédl v roce 1932 a dal si dvě a dvě dohromady. V krátkém článku [18] zlepšil Steinitzův výsledek tím, že ukázal, že vrcholy a hrany šestisetstěnu tvoří grupový diagram **I**. Tento diagram má vrchol pro každý prvek $g \in \mathbf{I}$ a každý prvek g_i z určité množiny šesti generátorů má hranu směřující z vrcholu g k vrcholu gg_i. V duálním stodvacetistěnu pak 12 sousedů dvanáctistěnné buňky g představuje 12 sousedních prvků $gg_i^{\pm 1}$ prvku $g \in \mathbf{I}$ — stejně jako v univerzálním pokrytí homologické sféry.

Na stodvacetistěn tak můžeme nahlížet jako na znázornění grupy **I** pro Threlfallovy generátory $g_1, g_2, \ldots, g_6$, podobně jako je obrázek 2 znázorněním $\mathcal{I}$ pro Hamiltonovy generátory ι a κ.

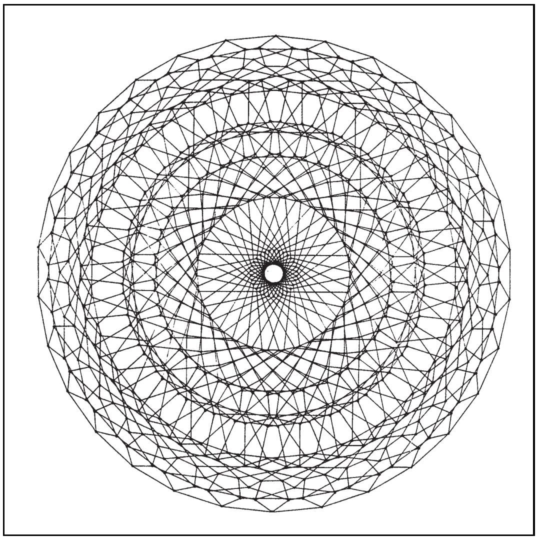
Threlfallův výsledek přinesl představu o **I** jakožto o množině vrcholů šestisetstěnu (viz obr. 5) zpět do matematického povědomí, což dále rozvinul Coxeter v [5]. Kvaternionové generátory **I** dávají krásné symetrické souřadnice vrcholů šestisetstěnu. Podobně jako vrcholy dvacetistěnu, jejichž symetrie reprezentují, mohou být popsány velice jednoduše a symetricky pomocí zlatého řezu $\tau = (1+\sqrt{5})/2$. Takto nedostaneme jen konstrukci šestisetstěnu a stodvacetistěnu, ale též konstrukci, kterou by podepsal i Eukleidés, neboť zahrnuje pouze konstruovatelná čísla.

Než opustíme téma topologie, měli bychom poznamenat, že kvaternionové násobení činí ze sféry $\mathbb{S}^3$ jednotkových kvaternionů spojitou grupu, protože součin a inverzní operace jsou zřejmě spojité funkce polohy v $\mathbb{S}^3$. Podobně je sféra $\mathbb{S}^1$ jednotkových komplexních čísel spojitou grupou s operací násobení komplexních čísel. Élie Cartan v roce 1933 ukázal, že žádná jiná sféra nemá strukturu spojité grupy, takže $\mathbb{S}^3$ a $\mathbb{S}^1$ jsou vlastně v tomto ohledu jedinečné. Může nám vrtat hlavou, zda jejich pozice je výjimečná díky výjimečnosti algeber $\mathbb{C}$ a $\mathbb{H}$ … anebo je to naopak?

Stodvacetistěn

Navzdory duálnímu vztahu mezi šestisetstěnem a stodvacetistěnem se posledně jmenovaný obtížněji graficky znázorňuje. Jeho obrázky v Coxeterově knize z roku 1948 jsou fotografiemi drátových modelů zhotovených Paulem Donchianem. První jeho zobrazení, o němž vím, je obrázek č. 6 pocházející od B. L. Chiltona publikovaný v Coxeterově knize [3].

Obrázek je obyčejnou projekcí z $\mathbb{R}^4$ do $\mathbb{R}^2$, jak lze nahlédnout z jeho hran. Je to velice pěkný graf, ale také velice plochý; snadno zde nalezneme pětiúhelníky, ale jen



Obr. 6. Chiltonova ilustrace stodvacetistěnu. H. S. M. Coxeter mi napsal o této projekci: „Když jsem kolem roku 1930 navštívil van Ossa, ukázal mi nedokonalý tužkou nakreslený obrázek stodvacetistěnu, který před mnoha lety vytvořil Wythoff. Byl však příliš slabý pro reprodukci, i když zcela totožný s tím, který nakreslil Chilton."

obtížně můžeme spatřit dvanáctistěn, a tím méně si je dovedeme složit do projekce stodvacetistěnu na $\mathbb{R}^3$.

Přesvědčivější „trojrozměrný" obraz stodvacetistěnu lze získat projekcí na $\mathbb{S}^3$ a následnou stereografickou projekcí na $\mathbb{R}^3$. Projekce stodvacetistěnu z jeho středu na $\mathbb{S}^3$ totiž vytvoří teselaci $\mathbb{S}^3$ pravidelnými sférickými dvanáctistěny.

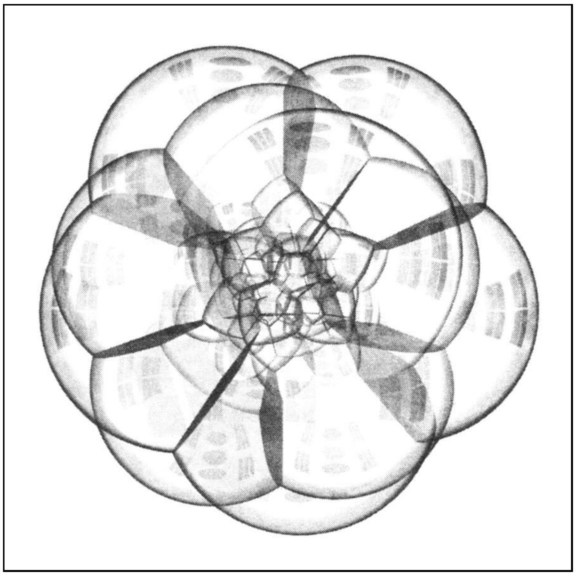
Tato teselace má stejnou kombinatorickou strukturu jako stodvacetistěn, ale její trojrozměrné stěny tvořené dvanáctistěny jsou mírně „nafouklé". Tyto stěny jsou částmi hlavních sfér v $\mathbb{S}^3$ (což jsou analogie hlavních kružnic na $\mathbb{S}^2$), a protože každá hrana je sdílena třemi trojrozměrnými stěnami, jejich diedrální úhly[11]) jsou $120°$. (Diedrální úhly eukleidovského dvanáctistěnu jsou přibližně $116°34'$, takže „nafouknutí" je jen velmi malé.) Každý vrchol stodvacetistěnu je sdílen čtyřmi trojrozměrnými stěnami, což odpovídá čtyřem dvojrozměrným stěnám duálního čtyřstěnu v šestisetstěnu.

Když se tato stodvacetistěnná teselace sféry $\mathbb{S}^3$ stereograficky promítne na $\mathbb{R}^3$, sféry se zobrazují opět na sféry a také úhly se zachovávají díky základním vlastnostem stereografické projekce. Takto dostaneme rozdělení $\mathbb{R}^3$ na 120 oblastí ohraničených částmi sfér. Sférické plochy se navíc protínají pod úhly $120°$ podél každé hrany a čtyři z nich se stýkají v každém vrcholu.

To je však přesně to, co dělají mýdlové bubliny! Všechny pozorované shluky mýdlových bublin se takto chovají, a dělají to i jejich matematické modely, jak plyne z hluboké věty Jeana Taylora [17], jež byla dokázána teprve v roce 1976. A tak je v principu možno modelovat projekci stodvacetistěnu pomocí shluku mýdlových bublin! Přitom díky počítačové grafice ani nemusíme pracovat se skutečným mýdlem. John M. Sullivan vytvořil nádherné simulace mýdlových bublin stodvacetistěnu znázorněné na obrázku 7.

---

[11]) *Pozn. překladatelů:* Diedrální úhel je úhel mezi dvěma stěnami.



Obr. 7. Stodvacetistěn z mýdlových bublin.

Matematické a programovací detaily lze nalézt v Sullivanově článku [16] z roku 1991. Téměř přesně 100 let od publikování klasických obrázků Frickem a Kleinem mají nyní matematici dokonalé nástroje ke znázorňování trojrozměrných objektů.

Poděkování. Děkuji Johnu Sullivanovi z University of Illinois za povolení publikovat jeho obrázky stodvacetistěnu a H. S. M. Coxeterovi za historické informace a povolení použít obrázky z jeho knihy. Konečně děkuji Abe Shenitzerovi a recenzentům za mnoho užitečných připomínek.

L i t e r a t u r a

[1] Cayley, A.: *Collected Mathematical Papers.* Cambridge Univ. Press 1889.
[2] Coxeter, H. S. M.: *Regular Polytopes.* Methuen, London 1948.
[3] Coxeter, H. S. M.: *Introduction to Geometry.* Wiley, New York 1961.
[4] Coxeter, H. S. M.: *Regular Complex Polytopes.* Cambridge Univ. Press 1974.
[5] Coxeter, H. S. M.: *Binary polyhedral groups.* Duke Math. J. *7* (1940), 367–379.
[6] Dehn, M.: *Papers on Group Theory and Topology.* Springer-Verlag, Berlin and New York 1987.
[7] Graves, R. P.: *Life of Sir William Rowan Hamilton.* Hodges, Figgis & Co. 1882–1889.
[8] Hamilton, W. R.: *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton.* Vol. III, Cambridge Univ. Press 1967.
[9] Hilbert, D., Cohn-Vossen, S.: *Anschauliche Geometrie.* Springer, Berlin and New York 1932; English transl. *Geometry and the Imagination*, Chelsea, New York 1952.
[10] Klein, F., Fricke, R.: *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen.* Teubner, Leipzig 1890.
[11] Kneser, H.: *Geschlossene Flächen in dreidimensional Mannigfaltigkeiten.* Jahresber. Deutsch. Math. Verein. *16* (1929), 248–260.
[12] Poincaré, H.: *Cinquième complément à la analysis situs.* Rend. Circ. Mat. Palermo *18* (1904), 45–110.

[13] Schläfli, L.: *Theorie des vielfachen Kontinuität.* Aufträge der Denkschriften-Kommission der Schweizer naturforschender Gesellschaft, Zurcher & Furrer 1901.
[14] Steinitz, E.: *Polyeder und Raumeinteilungen.* Encyklopädie Math. Wissenschaften, III AB 12, Teubner, Leipzig 1916, 1–139.
[15] Stringham, W. I.: *Regular figures in n-dimensional space.* Amer. J. Math. *3* (1880), 1–14.
[16] Sullivan, J. M.: *Generating and rendering four-dimensional polytopes.* The Mathematical Journal *1* (1991), 76–85.
[17] Taylor, J.: *The structure of singularities in soap-bubble-like and soup-film-like minimal surfaces.* Ann. of Math. *103* (1976), 489–539.
[18] Threlfall, W.: *Lösung der Aufgabe 84.* Jahresber. Deutsch. Math. Verein. *41* (1932), 6–7.
[19] Threlfall, W., Seifert, H.: *Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes.* Math. Ann. *104* (1931), 1–70.
[20] Weber, C., Seifert, H.: *Die beiden Dodekaederräume.* Math. Z. *37* (1933), 237–253.

Proč se zabývat fyzikou?

Anatole Abragam

Představitelé Francouzské fyzikální společnosti (SFP) se rozhodli v letošním Bulletinu SFP (červenec–srpen 2001, č. 130, str. 12–14) připomenout projev, který v roce 1973 u příležitosti stého výročí založení Společnosti přednesl prof. Anatole Abragam, její tehdejší předseda.

Proč se zabývat fyzikou? Začne-li si nějaká profesní skupina klást takovouto otázku, znamená to, že tato profese je v krizi. První z našich otevřených ran je rána finanční a mohla by se časem stát ranou smrtelnou. Nebudu zde snášet statistické údaje, každý zná ty své. Ministerstva, řídicí komise, Národní centrum vědeckého výzkumu (CNRS) a Komisariát pro atomovou energii (CEA), každý má svůj způsob, jak definovat výzkum, investiční a provozní náklady, měnové pohyby atd. Dvě věci jsou však jisté. Ve Francii podíl nákladů na fyzikální výzkum na hrubém domácím produktu vytrvale klesá. V posledních třech letech dochází k ročnímu poklesu o více než 10 %. Za druhé, počet pracovních míst a možnost uplatnění pro mladé vědce se stále zmenšují

Anatole Abragam, profesor Collège de France, člen Francouzské akademie, byl jedním z průkopníků jaderné magnetické rezonance a zakladatelem oboru jaderného magnetismu. Vybudoval a vedl Laboratoř fyziky pevných látek a magnetické rezonance (SPSRM) ve Středisku jaderného výzkumu (CEN) v Saclay ve Francii.

Se svolením autora a redakce časopisu Bulletin de la SFP přeložil Miloš Rotter.