Pavel Jonáš

Strouhalovo číslo a jeho význam v mechanice tekutin

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 46 (2001), No. 2, 119--127

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141072`

Strouhalovo číslo a jeho význam v mechanice tekutin

Pavel Jonáš, Praha

Pohyb plynů a kapalin je nejrozšířenější a nejsložitější formou makroskopického pohybu hmoty v Kosmu, na Zemi a v technických zařízeních. Jsou to na příklad: mezní vrstva atmosféry, proudy v mořích a oceánech, úplavy za přírodními překážkami, za stavbami, loděmi, vozidly a letadly, proudění v potrubích, kanálech, korytech řek, v chemických reaktorech, v chladicích systémech. Proto je studium proudění tekutin významné pro poznání přírodních zákonitostí i pro řešení praktických problémů lidstva. Mechanika tekutin, tj. hydrodynamika a aerodynamika, tvoří vědecké zázemí pro stavbu lodí, letadel, turbín a jiných proudových strojů, pro oceánografii, meteorologii a další.

Při výzkumu problémů mechaniky tekutin bylo dosaženo významného pokroku v numerických metodách a s rozvojem výpočetní techniky je nyní leckde možno nahrazovat nákladné a zdlouhavé experimentální zkušebnictví výpočtem. Je to ekonomické — šetří se tak čas i finance. Přesto má v řadě úloh výsledek experimentu konečné slovo. Nezastupitelnost experimentu v mechanice tekutin vyplývá z toho, že prakticky významné pohyby tekutin nebo těles v tekutinách se vyznačují velkými hodnotami Reynoldsova čísla

$$\mathrm{Re} = \frac{\varrho U L}{\mu} \gg 1, \tag{1}$$

kde U a L jsou charakteristická rychlost a délka a ϱ a μ jsou hustota a dynamická viskozita tekutiny. Při růstu Reynoldsova čísla nad kritickou hodnotu ztrácí zprvu laminární proudění stabilitu a přechází do turbulence.

Současně s tím se mění původně deterministická povaha procesů v proudění (např. Jonáš [1]) popisovaná uzavřenou soustavou rovnic Naviera a Stokese. Připomeňme si tyto rovnice ve zjednodušení[1]) pro izotermické proudění nestlačitelné tekutiny a se

[1]) Platí dostatečně přesně při obtékání / protékání neprostupných povrchů plynem, když rychlost proudění je menší než asi jedna pětina rychlosti zvuku (do Machova čísla proudění kolem 0,2).

RNDr. Pavel Jonáš, DrSc. (1932), Ústav termomechaniky AV ČR, Dolejškova 5, 182 00 Praha 8.

zanedbáním vnějších sil:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial W_j}{\partial x_j} &= 0, \\
\frac{\partial W_i}{\partial t} + W_j \frac{\partial W_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\delta_{ij} P + 2\mu S_{ij} \right), \\
S_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_i}{\partial x_j} + \frac{\partial W_j}{\partial x_i} \right), \quad i,j = 1,2,3,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

kde P je statický tlak, S_{ij} je tenzor rychlosti deformace, W_i jsou složky vektoru rychlosti v ortogonální souřadné soustavě (x_1, x_2, x_3), δ_{ij} je Kroneckerovo delta; při zápisu rovnice je použito Einsteinovo sumační pravidlo.

Na konci přechodu do turbulence je proudění s vysokým počtem stupňů volnosti, které je výsledkem náhodných vířivých pohybů velkého počtu částic tekutiny — turbulentních vírů. Vždy, když se vytvoří okrajové podmínky jistých vlastností, dochází k ustálení stejných univerzálních vlastností struktury turbulentního proudu. Tehdy lze střední hodnoty parametrů turbulentního proudění popisovat s dobrou přesností pomocí statistických zákonů. Rovnice středního turbulentního proudění se odvodí z NS-rovnic (např. Tennekes a Lumley [2]) za předpokladu, že:

- okamžité hodnoty jsou superpozicí střední hodnoty (označena pruhem nahoře) a fluktuace (Reynoldsův rozklad):

$$
\begin{gathered}
W_k = \overline{W}_k + w_k, \quad P = \overline{P} + p, \quad S_{ij} = \overline{S}_{ij} + s_{ij}, \\
\overline{w}_k = 0, \quad \overline{p} = 0, \quad \overline{s}_{ij} = 0,
\end{gathered}
\tag{3}
$$

- NS-rovnice (2) popisují okamžitý stav proudění. Po zavedení Reynoldsova rozkladu do rovnic (2) se odvodí soustava Reynoldsových rovnic středního turbulentního proudění:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{W}_j}{\partial x_j} &= 0, \\
\frac{\partial \overline{W}_i}{\partial t} + \overline{W}_j \frac{\partial \overline{W}_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\delta_{ij} \overline{P} + 2\mu \overline{S}_{ij} - \varrho\, \overline{w_i w_j} \right), \\
\overline{S}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{W}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{W}_j}{\partial x_i} \right), \quad i,j = 1,2,3.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Tato soustava pohybových rovnic pro střední turbulentní proud je neuzavřená, protože ke středním hodnotám parametrů proudění přibyly členy s korelacemi složek fluktuací rychlosti $(-\varrho\, \overline{w_i w_j})$. Ukazuje se, že změna hybnosti středního proudění záleží nejen na tlakové síle a silách molekulové vazkosti, ale také na přenosu hybnosti, který způsobují fluktuační pohyby částic tekutiny. Vzniká při tom turbulentní napětí (tenzor Reynoldsových napětí):

$$
\tau_{ij} = -\varrho\, \overline{w_i w_j}, \quad i,j = 1,2,3. \tag{5}
$$

Problém uzavření soustavy rovnic popisujících střední proudění se řeší déle než století. S využitím jednoduchých fyzikálních představ se matematicky modelují některé turbulentní proudy. Matematické modely turbulence zavádějí na různé úrovni v rovnicích pro statistické charakteristiky různých řádů empirické koeficienty nebo vztahy, kterými se nahrazují informace, původně obsažené v rovnicích Naviera a Stokese, avšak ztracené při Reynoldsově středování výchozí soustavy rovnic. Matematické modely se opírají o poznatky plynoucí z experimentů a zároveň se experimenty ověřují. Tímto úvodem je naznačen význam experimentů při studiu pohybu těles v tekutině nebo při pohybu tekutiny kolem povrchů různých vlastností.

Z výčtu příkladů využívání mechaniky tekutin vyplývá, že zpravidla je obtížné uspořádat potřebný pokus přesně tak, jaké jsou okolnosti a podmínky v přírodě nebo na technickém díle. Často je možné studovat obecné procesy nebo řešit dílčí technické otázky na modelu, který je obvykle menší i levnější než jeho vzor. Typickými příklady jsou výzkumy letadel nebo jejich částí v aerodynamických tunelech a podobně studie aerodynamických vlastností staveb, plavidel, krajinných útvarů atd. Nesmí se zapomenout ani na aerodynamické a hydrodynamické výzkumy raket, lodí a zejména ponorek.

Důvěryhodnost závěrů z experimentů na modelech závisí na tom, jak věrně napodobuje proudění kolem modelu v měřicím prostoru aerodynamické nebo hydrodynamické tratě, proudění kolem objektu v neomezeném prostoru nebo ve skutečných dimenzích. Proto se vyvinula teorie fyzikálního modelování v aerodynamice a v hydrodynamice. Nutnou podmínkou pro pokusy na modelech je geometrická podobnost modelu a vzoru, podle které musí být libovolné dva délkové rozměry L_{m1}, L_{m2} modelu ve stejném poměru jako jim odpovídající dvojice rozměrů L_1, L_2 na vzoru:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{L_{m1}}{L_{m2}}, \qquad \frac{L_i}{L_{mi}} = \frac{L}{L_m} = M \quad \text{(konst.)}, \tag{6}$$

kde M je měřítko modelu. Odtud plyne, že charakteristické délky L_m a L pro model a vzor si musí odpovídat; např. pro kruhový válec se volí jako charakteristická délka průměr $L = D$. Model a vzor si budou fyzikálně podobné, jestliže fyzikální jevy stejného druhu na modelu a vzoru budou popisovat stejné rovnice. Když se omezíme na mechaniku, tak podmínkami mechanické podobnosti jsou geometrická a dynamická podobnost. Vzor a model jsou si dynamicky podobné, jestliže poměr libovolných navzájem si odpovídajících sil téhož druhu je konstantní.

Vraťme se k rovnicím Naviera a Stokese (2). Zvolíme si časový interval τ, délku L a rychlost V jako charakteristické veličiny. S jejich pomocí zavedeme bezrozměrné proměnné (čárkované symboly) do NS-rovnic:

$$W_i' = \frac{W_i}{V}, \quad x_j' = \frac{x_j}{L}, \quad t' = \frac{t}{\tau}, \quad P' = \frac{P}{\varrho V^2}, \quad \varrho' = \frac{\varrho}{\varrho_0}, \quad \mu' = \frac{\mu}{\mu_0} \approx 1. \tag{7}$$

Dosadíme bezrozměrné proměnné do rovnic (2)

$$\frac{V}{\tau}\,\frac{\partial W_i'}{\partial t'} + \frac{V^2}{L}\,W_j'\,\frac{\partial W_i'}{\partial x_j'} = -\delta_{ij}\frac{V^2}{L}\,\frac{\partial P'}{\partial x_j'} + \frac{\mu V}{\varrho L^2}\,\frac{\partial}{\partial x_j'}(2S_{ij}'),$$

zavedeme pro Strouhalovo a Reynoldsovo číslo označení Sh a Re

$$\mathrm{Sh} = \frac{L}{\tau V}, \qquad \mathrm{Re} = \frac{\varrho L V}{\mu} \tag{8}$$

a obdržíme rovnice Naviera a Stokese v bezrozměrném tvaru

$$\mathrm{Sh}\,\frac{\partial W_i'}{\partial t'} + W_j'\,\frac{\partial W_i'}{\partial x_j'} = -\delta_{ij}\frac{\partial P'}{\partial x_j'} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\frac{\partial}{\partial x_j'}(2S_{ij}')\,. \tag{9}$$

Odtud je již zřejmé: aby byla dosažena dynamická podobnost, musí být u modelu i vzoru shoda v bezrozměrné setrvačné (levá strana rovnice (7)), tlakové (první člen na pravé straně (7)) a třecí síle (druhý člen na pravé straně (7)). Jinými slovy: pro model i vzor musí být stejné hodnoty bezrozměrných parametrů Sh a Re.

Snadno se přesvědčíme, že když se zkoumané proudění nevyznačuje nějakým významným intervalem času, je možno vyjádřit časovou jednotku jako dobu, kterou potřebuje částice tekutiny k tomu, aby urazila rychlostí V dráhu L. Potom je pro model i vzor Strouhalovo číslo rovno jedné.

To jsou ovšem případy proudění vzdálené okolnostem „zrodu“ koeficientu, který Čeněk Strouhal v roce 1878 označil C ve shrnutí výsledků svého zkoumání akustických jevů při pohybu rotačních válců vzduchem [3]:

$$N = C \cdot V/D. \tag{10}$$

Ve vzduchu při translačním pohybu kolmém k ose rotačního válce z libovolného materiálu vzniká tón, jehož výška N je přímo úměrná rychlosti pohybu V a nepřímo úměrná průměru D válce.

Strouhal zkoumal akustické jevy, které provázejí pravidelné odtrhávání vírů na válcích a jiných špatně obtékaných tělesech. Anglicky se taková tělesa nazývají *bluff-body* a je pro ně typické pravidelné odtrhávání vírů střídavě po stranách tělesa. Víry tvoří uspořádané řady. Vysvětlení jejich vzniku podal v roce 1912 von Karmán [4] a na jeho počest se nazývají tyto řady jeho jménem; někdy se hovoří o Karmánově vírové stezce.

V proudu za válcem kruhového průřezu o průměru D je příčná vzdálenost řad Δy a délka mezer mezi víry v jedné řadě Δx. Tyto rozměry jsou závislé na frekvenci f odtrhávání proudu, kterou určuje Strouhalovo číslo:

$$\Delta x = V/f, \quad \Delta y = 0{,}28 \cdot V/f, \quad f = \mathrm{Sh} \cdot V/D. \tag{11}$$

Každé odtržení proudu způsobí změnu rozložení tlaku na obtékaném povrchu i v jeho okolí. Tudíž je provázeno změnou silových účinků na těleso i generováním zvuku.

Nahradíme-li frekvenci N periodou času $1/\tau$, můžeme Strouhalův vzorec (10) upravit tak, aby byla zřejmá shoda koeficientu C a parametru, který jsme nazvali Strouhalovo číslo:

$$C = D/(V \cdot \tau) = \mathrm{Sh}. \tag{12}$$

Z poměrně rozsáhlého souboru měření tónu vznikajícího při obtékání válců různých průměrů při různých rychlostech tekutiny došel Strouhal k závěru, že koeficient C je přibližně konstantní:

$$C \approx 0{,}185. \tag{13}$$

Dále ve své publikaci ovšem uvádí, že přesnější aproximací výsledků by byla rovnice

$$N = C \cdot [V - f(V)]/D. \tag{14}$$

Představa o tvaru funkce $f(V)$ není v práci [3] uvedena a o fyzikálním významu této funkce jsou naznačeny pouze hypotézy pro další práci.

Zaslouží si uvést, že v roce 1970 publikoval Massey [5] empirický vztah

$$\mathrm{Sh} = 0{,}198(1 - 19{,}7/\mathrm{Re}) \quad \text{pro} \quad 250 < \mathrm{Re} < 2 \cdot 10^5. \tag{15}$$

Jerie [6] interpoloval původní měření Strouhala s výsledkem

$$\mathrm{Sh} = 0{,}198(1 - 19{,}9/\mathrm{Re} - 306/\mathrm{Re}^2 + 17600/\mathrm{Re}^3), \tag{16}$$

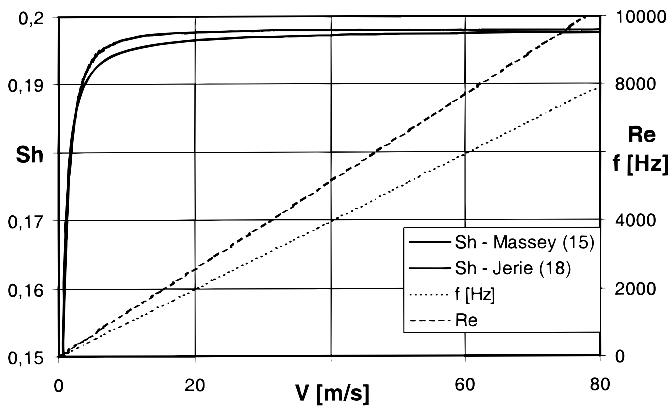
který platí v intervalu hodnot Reynoldsova čísla

$$40 < \mathrm{Re} < 5 \cdot 10^3. \tag{17}$$

V ještě lepší shodě s experimenty Strouhala je interpolace Jerieho ve tvaru

$$\mathrm{Sh} = 0{,}198 - 10^{-1{,}48+0{,}98\log\mathrm{Re}-0{,}46(\log\mathrm{Re})(\log\mathrm{Re})}. \tag{18}$$

Pro představu je na obr. 1 znázorněno, jak se mění s rychlostí V [m/s] proudu vzduchu nabíhajícího na váleček o průměru $D = 2\,\mathrm{mm}$ hodnoty Strouhalova čísla Sh, vypočteného podle uvedených empirických formulí. Dále jsou v obrázku znázorněny Reynoldsovo číslo Re válečku a frekvence strhávání vírů f [Hz].



Obr. 1. Rotační válec ve vzdušném proudu: $D = 2\,\mathrm{mm}$.

Aproximace výsledků pokusů provedených před více než 120 lety jsou zde uvedeny hlavně proto, že je udivující přesnost měření s tak jednoduchým vybavením[2]), jaké používal Strouhal; Jerie [6] uvádí odchylky interpolace od pozorování do 1 procenta. Rovněž je pozoruhodná úplnost Strouhalem publikovaných dat, která umožnila reprodukovat jejich analýzu. S něčím podobným se dnes zřídka chlubí články v prestižních časopisech.

Priorita Strouhala, že první popsal významný jev vzniku periodického proudění při ustáleném pohybu tuhého tělesa vzduchem a nalezl základní zákon, kterým se jev řídí, je obecně uznávaná. Uznáním této zásluhy je užívání názvu Strouhalovo číslo pro bezrozměrný parametr, který popisuje souvislost frekvence, charakteristického rozměru a měřítka rychlosti periodicky se měnícího proudění. Pravděpodobně jako první použil název *Strouhalovo číslo* na konferenci IUTAM (Stresa, 1960) Sir G. I. Taylor z Cambridge, jeden z pionýrů výzkumu turbulence. Dnes se zkratka Sh uvádí v seznamu symbolů každé významné monografie oboru mechanika tekutin.

Nyní se na chvíli krátce vzdálíme od Strouhalova čísla a podíváme se blíže do publikace, ve které bylo poprvé formulováno.

V roce 1978 se pořádalo na zámku v Liblicích mezinárodní kolokvium „Strouhal Number Centenary". Profesor Jan Jerie tam ve svém příspěvku upozornil na některé myšlenky z původního článku Čeňka Strouhala, které předběhly svou dobu.

Jde zejména o poznatky, které se týkají představy o odtržení proudu na obtékaném povrchu:

- *Vznik periodického obtékání tělesa rovnoměrně se pohybujícího vzduchem je následkem tření* (volně přeloženo)

a později

- *účinek tření je možno chápat tak, že tlakové rozdíly vyrovnává, až dosáhnou určitou hladinu. Potom následuje nespojité odtržení proudu, které se periodicky opakuje v závislosti na tlakovém rozdílu* (volně přeloženo).

Dále Strouhal na dvou místech článku naznačil představu mezní vrstvy na obtékaném povrchu, když píše:

- *tření nevzniká mezi vzduchem a vlastním tělesem, ale mezi vzduchem a těsně k tělesu přiléhající vrstvou vzduchu* (volně přeloženo).

Představu o mezní vrstvě zformuloval exaktně teprve řadu let poté Prandtl [7].

Proč je používání Strouhalova čísla prakticky významné? Každé odtržení proudu způsobí změnu rozložení tlaku na obtékaném povrchu, a tudíž je provázeno změnou silových účinků na těleso. Proto může být periodické odtrhávání zhoubné, jestliže jeho frekvence je stejná jako vlastní frekvence tělesa. Na tento jev je nutné brát zřetel u staveb (komíny, věže, visuté mosty), ve výměnících tepla, při kotvení stožárů a podobně, kde může a v řadě případů již způsobil tento jev havárii. Akustické jevy, které odtržení proudu provázejí, ovlivňují kvalitu věcí, obtěžují a mohou mít i ničivé následky.

---

[2]) Pro ilustraci jsou ke konci článku připojena schémata experimentálního zařízení a ukázky výsledků převzaté z původní publikace Strouhala [3].

Existence Karmánovy vírové řady a znalost Strouhalova čísla se využívají při měření rychlosti proudění. Snímá se buď frekvence budící síly na válec známého průměru, nebo frekvence rozruchů v úplavu za tímto válcem. Ze vztahu mezi průměrem válce, rychlostí proudění a frekvencí odtrhávání proudu se podle Strouhalova čísla vypočte rychlost:

$$\mathrm{Sh} = \frac{fD}{V} \longrightarrow V = \frac{fD}{\mathrm{Sh}}; \qquad 400 \leqq \mathrm{Re} \leqq 5 \cdot 10^4 \Longrightarrow \mathrm{Sh} \approx 0{,}2. \tag{19}$$

Strouhalovo číslo je významným kritériem při modelových zkouškách vrtulí, lodních šroubů, rotorů vrtulníků, turbín a kompresorů. Tehdy popisuje podíl obvodové rychlosti k postupné rychlosti a charakterizuje tak úhel náběhu obtékaných profilů a tím režim obtékání zkoušených zařízení.

Například si můžeme představit model vrtule v měřítku 1 : 10. Shoda Strouhalova a Reynoldsova čísla modelu (index m) a vzoru (bez indexu) vyžaduje splnění podmínky

$$\begin{aligned} \mathrm{Sh} = \frac{fL}{V} = \frac{f_m L_m}{V_m}, \qquad \mathrm{Re} = \frac{LV}{\nu} = \frac{L_m V_m}{\nu}, \\ L = 10\,L_m \Longrightarrow \frac{V_m}{V} = \frac{L}{L_m} = 10, \qquad f_m = f\,\frac{V_m}{V}\,\frac{L}{L_m} \Longrightarrow f_m = 100f; \end{aligned} \tag{20}$$

zde f značí otáčky vrtule a V je rychlost nabíhajícího proudu. Tento výsledek naznačuje, jak nesnadná je realizace modelových zkoušek v podobných problémech.

Závěr

Bylo by zajisté možné vyhledat v literatuře další příklady uplatnění Strouhalova čísla v mechanice tekutin a akustice. Autor se omezil na příklady aplikací, se kterými se při své činnosti setkal. Obecně platí, že pro splnění podmínek podobnosti při vyšetřování nestacionárního pohybu tekutiny nebo tělesa v tekutině je vždy nutné zachovat shodu hodnot Strouhalova čísla originálu i jeho modelu. S rozvojem poznání a s rozšiřováním možností zkoumat v čase se měnící jevy se bude v technických aplikacích uplatňovat Strouhalovo kritérium ještě více než nyní.

L i t e r a t u r a

[1] Jonáš, P.: *O turbulenci.* Inženýrská mechanika *5* (1998), č. 2, 89–106.

[2] Tennekes, H., Lumley, J. L.: *A first course in turbulence.* MIT Press, Cambridge--Massachusetts 1974.

[3] Strouhal, V.: *Ueber eine besondere Art der Tonerregung.* Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge Bd V, Herausgegeb. v. G. Wiedermann, 1878, 216–251.

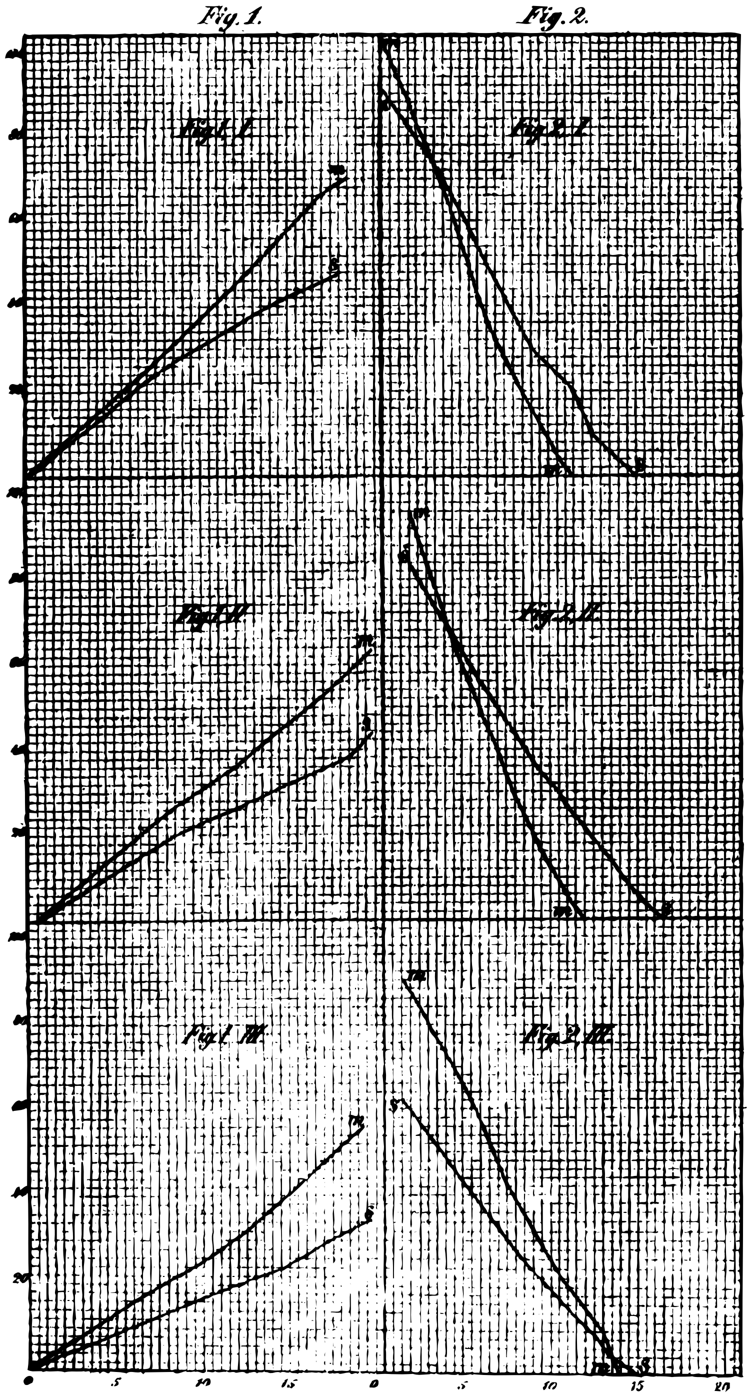
[4] Kármán, T.: *Über den Mechanismus des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes.* Nachr. D. Wiss. Ges. Göttingen, Math. Phys. Klasse 509 (1911) u. 547 (1912).

[5] Massey, B. S.: *Mechanics of Fluids* (2^{nd} edition). Van Nostrand Reinhold Comp., London 1970.

[6] Jerie, J.: *Ernst Mach's pupil Čeněk Strouhal and his research on singing wires.* Proc. Int. Conf. E. Mach and the development of Physics, Prague 1988, 249–257.

[7] Prandtl, L.: *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung.* Verhandlg. d. III. Intern. Math. Kongr., Heidelberg 1904.

Annal. d. Phys. u. Chem. N. F. Bd. V.



Taf. II.

Fig. 5.

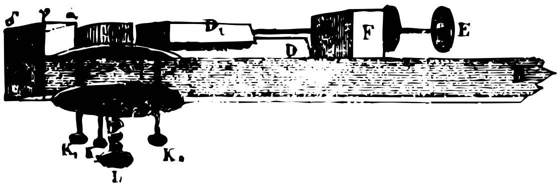


Fig. 7.

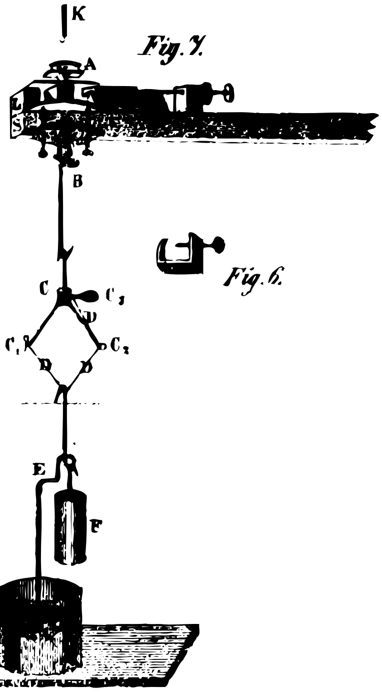


Fig. 6.

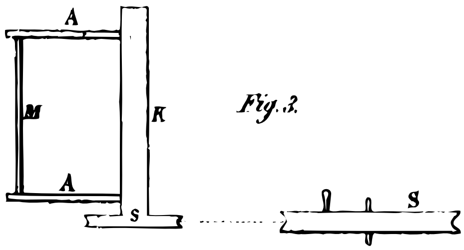


Fig. 3.