Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Ivan Netuka; Jiří Veselý

Sto let Baireovy věty o kategoriích

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 45 (2000), No. 3, 232--256

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141040

Sto let Baireovy věty o kategoriích

Ivan Netuka a Jiří Veselý, Praha

1. Baireova věta

1.1. Úvod

V r. 1992 uspořádala Lucemburská matematická společnost mezinárodní konferenci s názvem *Rozvoj matematiky v letech 1900–1950.* Při této příležitosti se zrodil zajímavý projekt: přední matematici a historikové matematiky s podporou několika desítek dalších odborníků vytvořili seznam matematických výsledků nazvaný *Guidelines 1900–1950*; viz [Pi]. Ten pro každý rok, počínaje r. 1900 a konče r. 1950, zahrnuje zhruba 10–25 článků a monografií, které výrazným způsobem ovlivnily matematiku 20. století.

Rok 1899 se jen těsně vymkl sledovanému období. Přesto se dá téměř s určitostí jmenovat práce, která by nemohla v seznamu pro rok 1899 chybět: R. Baire, *Sur les fonctions de variables réelles*; viz [Ba2]. Tento článek o 123 stránkách, tedy spíše monografie, je ve skutečnosti Baireova doktorská disertační práce. Na základě podnětu předního italského matematika U. Diniho byla publikována v *Annali di Matematica.*

Tento článek má skromný a poněkud neobvyklý cíl: představit čtenáři *jedinou* matematickou větu, která se nazývá *Baireova věta o kategoriích.* Uvedeme motivaci, která autora k této větě přivedla, a naznačíme její další zobecnění. Především se však pokusíme ukázat, jak se tato věta, jejíž důkaz je tak jednoduchý a přirozený, že bývá nyní obvykle zařazována do druhého ročníku univerzitního studia matematiky, stala významným nástrojem v různých matematických disciplínách. Je fascinující, v kolika různorodých situacích se setkáváme s pojmem množiny 1. kategorie a kolikrát byla v různých aplikacích Baireova věta v uplynulých sto letech, doslova až do dnešních dnů, použita.

1.2. Cantorův důkaz nespočetnosti

Na první pohled se Cantorův výsledek pramálo vztahuje k tématu článku. Uvidíme však, že Cantorův přístup poskytuje bezprostřední návod k metodě důkazu Baireovy věty.

Prof. RNDr. Ivan Netuka, DrSc. (1944), a doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc. (1940), Matematický ústav UK, Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: `netuka@karlin.mff.cuni.cz`, `jvesely@karlin.mff.cuni.cz`

Tento článek vznikl za podpory Grantové agentury UK (GAUK 165/1999) a výzkumného záměru MSM 1132 00007.

Nezřídka se lze setkat s názorem, že Cantor dokazoval nespočetnost množiny reálných čísel tzv. *diagonální metodou*, nesoucí jeho jméno. Není tomu tak: Cantorův původní důkaz, který zde ve zjednodušené formě připomeneme, byl publikován v r. 1874, zatímco diagonální metoda pochází až z r. 1891. (Velmi podrobnou analýzu příslušných Cantorových prací lze nalézt v [Da], s. 50–54, 165–168.)

Cantor dokazuje tuto větu: *Je-li* $\{x_n\}$ *libovolná posloupnost reálných čísel a* $I \subset \mathbb{R}$ *je uzavřený interval, potom existuje reálné číslo* $x \in I$ *takové, že* $x \neq x_n$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$. Zde je Cantorova úvaha v poněkud modifikované podobě (intervalem se v tomto článku rozumí nedegenerovaný interval): Zvolme omezený uzavřený interval $I_1 \subset I \setminus \{x_1\}$, potom uzavřený interval $I_2 \subset I_1 \setminus \{x_2\}$ a dále obdobně indukcí definujeme nerostoucí posloupnost intervalů $\{I_n\}$ takovou, že $I_{n+1} \subset I_n \setminus \{x_{n+1}\}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Víme, že průnik těchto uzavřených intervalů je podle tzv. Cantorovy věty neprázdný; za x lze tedy volit libovolný bod tohoto průniku.

1.3. Baireova cesta k Baireově větě

V Cauchyově *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique* z r. 1821 se vyskytují tato dvě tvrzení.

(1) *Limita konvergentní posloupnosti spojitých funkcí je spojitá funkce.*

(2) *Funkce dvou proměnných, která je odděleně spojitá, je spojitá.*

Připomeňme, že funkce $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ se nazývá *odděleně spojitá*, jestliže pro každé y je funkce $x \mapsto f(x, y)$ spojitá a pro každé x je funkce $y \mapsto f(x, y)$ spojitá.

V r. 1826 si N. Abel povšiml, že bodová limita spojitých funkcí nemusí být spojitá funkce. Obecně se soudí, že první protipříklad na tvrzení (2) předložil J. Thomae v r. 1870. Celé generace matematiků uvádějí následující školní protipříklad, který pochází od H. A. Schwarze z r. 1872:

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad \text{pro} \quad x^2 + y^2 > 0, \quad f(0, 0) = 0. \tag{$*$}$$

Tato funkce f je zřejmě odděleně spojitá, ale není spojitá v bodě $(0, 0)$. Pro všechna $x \neq 0$ totiž platí $f(x, x) = 1$, zatímco $f(0, 0) = 0$.

R. Baire na konci r. 1896, nezávisle na svých předchůdcích, znovu objevil, že odděleně spojité funkce nemusí být spojité. Tento jev ho zaujal a odděleně spojité funkce podrobil důkladnému zkoumání.

Nejprve dokázal, že pro odděleně spojitou funkci $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ má funkce

$$M(x) = \sup\{f(x, y);\ y \in [0, 1]\}, \quad x \in [0, 1],$$

tuto pozoruhodnou vlastnost: *Je-li* $x_0 \in [0, 1]$, *potom pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *takové, že pro každé* $x \in [0, 1]$, $|x - x_0| < \delta$, *platí* $M(x_0) - M(x) < \varepsilon$; o funkci s touto vlastností se říká, že je *zdola polospojitá v bodě* x_0. Příklad $(*)$ ukazuje, že pro odpovídající funkci M je $M(0) = 0$ a $M(x) = 1$ pro $x \in (0, 1]$, tedy analogický výrok s nerovností $M(x) - M(x_0) < \varepsilon$ je nesprávný a M *není shora polospojitá*, a tudíž i spojitá. Je vhodné zdůraznit, že pojem polospojitosti nevznikl oddělením dvou nerovností z definice spojitosti, ale jako přirozená vlastnost, které si Baire povšiml při svých výzkumech. Toto Baire sám konstatuje v poznámce [Ba6] z r. 1927. Význam polospojitých funkcí pro moderní analýzu lze jen stěží přecenit.

Baire dokázal, že polospojité funkce mají v každém intervalu body spojitosti. Dále ho zajímal charakter nespojitostí odděleně spojitých funkcí. Např. si kladl otázky tohoto typu: *Pro jaké funkce* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *existuje odděleně spojitá funkce* f *taková, že* $f(x,x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

H. Lebesgue dokázal v r. 1898 ve své první matematické práci, že každá odděleně spojitá funkce je bodovou limitou polynomů. Baire se soustředil na základní otázku: *Které funkce lze vyjádřit jako* (*bodovou*) *limitu spojitých funkcí?* To je ovšem stejné, v důsledku Weierstrassovy věty, jako vyjádření pomocí bodové limity polynomů. V terminologii konce 19. století tedy šlo o problém, které funkce jsou *analyticky reprezentovatelné*.

V r. 1898 charakterizoval Baire v termínech množiny bodů spojitosti funkce, které jsou limitou spojitých funkcí (tzv. *funkce 1. Baireovy třídy*); viz [Ba1]. V tomtéž roce zavádí klasifikaci funkcí. Např. *funkce 2. Baireovy třídy* jsou definovány jako funkce, které nejsou funkcemi nulté třídy (= spojité funkce) ani 1. Baireovy třídy, ale jsou limitou funkcí 1. Baireovy třídy. V zájmu přesnosti by mělo být řečeno, že Baire místo o limitách posloupností funkcí mluví o součtech řad, což je ovšem rozdíl zcela nepodstatný. Baireovi se nepodařilo v té době najít nutné a postačující podmínky charakterizující funkce 2. Baireovy třídy, v r. 1898 však nalezl nutnou podmínku. Pro její formulaci zavedl fundamentální pojem *množiny 1. kategorie.*

1.4. Množiny 1. kategorie a Baireova věta

Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *řídká* (*v* $\mathbb{R}$), jestliže každý interval $I \subset \mathbb{R}$ obsahuje interval J takový, že $J \cap M = \emptyset$. Jinak řečeno, M není hustá v žádném intervalu. Připomeňme ještě jiné vyjádření, které je vhodné pro definici pojmu řídké množiny nejen v $\mathbb{R}^m$, ale i v metrickém či topologickém prostoru: *uzávěr množiny* M *neobsahuje žádné vnitřní body.*

Množinu P nazýváme *množina 1. kategorie*, existují-li řídké množiny $M_1, M_2, \dots$ takové, že $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Množinu, která není 1. kategorie, nazývá Baire *množinou 2. kategorie.*

V mnoha situacích vystupují množiny 1. kategorie jako množiny topologicky malé, v jistém smyslu nezaujímající příliš rozlehlou část prostoru. Je třeba poznamenat, že mezi různými pojmy „malosti“ však obecně není soulad. Tak např. Cantorovo diskontinuum je řídká, ale co do mohutnosti velká (nespočetná), množina; existují řídké uzavřené množiny kladné Lebesgueovy míry (tu značíme dále λ); množina 1. kategorie může být hustá a může mít plnou míru v každém intervalu. Množina 1. kategorie však nemůže obsahovat interval. To vyplývá z následujícího tvrzení.

Baireova věta (1898). *Nechť P je množina 1. kategorie v $\mathbb{R}$ a $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Potom $I \setminus P \neq \emptyset$.*

Důkaz je ve skutečnosti snadný, modifikuje se úvaha z Cantorova důkazu o nespočetnosti množiny reálných čísel.

Nechť $M_1, M_2, \dots$ jsou řídké množiny takové, že $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Protože M_1 je řídká množina, existuje omezený uzavřený interval I_1 takový, že $I_1 \subset I \setminus M_1$. Podobně existuje uzavřený interval $I_2 \subset I_1 \setminus M_2$ atd. Potom $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ a $P \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$.

Jako první ilustraci užití Baireovy věty uveďme tento Baireův výsledek: *Je-li f funkce 1. Baireovy třídy, potom množina bodů nespojitosti funkce f je 1. kategorie.* *Důkaz* naznačíme. Pro $x \in \mathbb{R}$ definujme *oscilaci* funkce f v bodě x rovností

$$\omega_f(x) = \lim_{\delta \to 0+} \Big(\sup f\big((x-\delta, x+\delta)\big) - \inf f\big((x-\delta, x+\delta)\big)\Big).$$

Zřejmě $\omega_f(x) = 0$, právě když je funkce f v bodě x spojitá. Pro důkaz věty stačí dokázat toto tvrzení: *Pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $M_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R};\, \omega_f(x) \geqq 5\varepsilon\}$ řídká.* Množina bodů nespojitosti funkce f je totiž rovna sjednocení všech těchto množin pro $\varepsilon = 1/(5n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Nechť $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce a nechť $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, tj. pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$F_n = \bigcap_{j,k \geqq n} \big\{x \in \mathbb{R};\, |f_j(x) - f_k(x)| \leqq \varepsilon\big\}.$$

Potom je F_n uzavřená množina, $F_n \subset F_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Zvolme libovolný uzavřený interval $I \subset \mathbb{R}$. Protože $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \cap I)$, nejsou podle Baireovy věty všechny množiny $F_n \cap I$ řídké. Existuje tudíž $n \in \mathbb{N}$ takové, že $F_n \cap I$ obsahuje otevřený interval J. Podle definice množiny F_n je pak $|f_k(x) - f_n(x)| \leqq \varepsilon$ pro všechna $x \in J$ a všechna $k \geqq n$. Přejdeme-li k limitě pro $k \to \infty$, dostáváme $|f(x) - f_n(x)| \leqq \varepsilon$ pro všechna $x \in J$. Je-li $x_0 \in J$, pak existuje okolí $V(x_0) \subset J$ takové, že $|f_n(x) - f_n(x_0)| \leqq \varepsilon$, kdykoli $x \in V(x_0)$. Odtud plyne, že $|f(x) - f_n(x_0)| \leqq 2\varepsilon$ pro všechna $x \in V(x_0)$, tudíž $\omega_f(x_0) \leqq 4\varepsilon$. Dokázali jsme, že žádný bod z J není prvkem množiny M_ε, a tedy M_ε je řídká.

Uvedeme, nyní již bez důkazu, dvě tvrzení, v nichž množiny 1. kategorie vystupují v roli zanedbatelných množin.

Mluvili jsme již o funkcích nulté, 1. a 2. Baireovy třídy. Analogicky se zavádějí *funkce 3. Baireovy třídy*, obecně *n-té Baireovy třídy*, transfinitní indukcí pak funkce *α-té třídy* pro každé spočetné ordinální číslo α. Funkce, které náležejí do některé Baireovy třídy, se nazývají *baireovské funkce*. Platí toto tvrzení: *Každá baireovská funkce je spojitá, zanedbáme-li množinu 1. kategorie.* Podrobněji: *Pro baireovskou funkci f existuje množina $S \subset \mathbb{R}$ taková, že $\mathbb{R} \setminus S$ je množina 1. kategorie a restrikce funkce f na množinu S je spojitá.* (Toto je tzv. *Baireova vlastnost funkce f*; viz [Ba3].)

Další ukázka je svázána s počátky ergodické teorie; viz [Ox], s. 67. Vztahuje se k práci *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, kterou publikoval H. Poincaré v r. 1899. Je užitečné poznamenat, že právě v tomto období pojem množiny 1. kategorie a pojem míry teprve krystalizovaly a ve skutečnosti bychom je v Poincarého práci explicitně nenašli.

Nechť X je omezená otevřená množina v prostoru $\mathbb{R}^m$ a nechť $T : X \to X$ je homeomorfismus zachovávající míru, tj. G a $T(G)$ mají stejnou Lebesgueovu míru pro každou otevřenou $G \subset X$. Pro $x \in X$ definujme $T^0 x = x$ a $T^n x = T(T^{n-1}x)$, $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ nazveme *trajektorie prvku* x. Nechť $G \subset X$ je otevřená množina a $x \in G$. Budeme říkat, že $x \in G$ je *bod návratu pro* T *vzhledem ke* G, jestliže $T^n x \in G$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$.

Při užití současné terminologie lze z Poincarého důkazu vyčíst tento výsledek: *Nechť $G \subset X$ je otevřená množina. Potom existuje taková množina $E \subset G$, která je 1. kategorie a má Lebesgueovu míru 0, že každý bod z $G \setminus E$ je pro T bodem návratu vzhledem ke G.*

V tomto případě jde ruku v ruce „malost“ ve smyslu míry i topologie. V posledních desetiletích se uplatnil pojem tzv. *σ-pórovitých množin*. Systém těchto množin je obsažen v průniku systému množin 1. kategorie a systému množin Lebesgueovy míry nula a ukázal se v řadě souvislostí jako adekvátní systém zanedbatelných množin; viz [Za2].

1.5. Baireovy prostory a topologická hra

Baireova věta nám říká, že množina 1. kategorie je na reálné ose topologicky malá: „podstatná většina“ bodů každé otevřené neprázdné množiny leží mimo ni.

Pojem řídké množiny lze přirozeně definovat v každém metrickém (a také každém topologickém) prostoru X: množina $M \subset X$ se nazývá *řídká* (*v* X), když uzávěr M má prázdný vnitřek. Definice množin 1. a 2. kategorie není třeba pro tento obecnější kontext znovu uvádět; připomeňme ještě, že množina $Q \subset X$ se nazývá *hustá* (*v* X), když uzávěr Q splývá s X.

Uveďme některé definice. Topologický prostor X se nazývá *Baireův prostor*, jestliže je v něm doplněk každé množiny 1. kategorie hustá množina. Množina R v Baireově prostoru X se nazývá *reziduální*, jestliže její doplněk $X \setminus R$ je množina 1. kategorie.

Víme již, že $\mathbb{R}$ je Baireův prostor a že např. množina iracionálních čísel je reziduální, neboť množina $\mathbb{Q}$ racionálních čísel je zřejmě 1. kategorie. Obecněji, *každý Baireův prostor P je množinou 2. kategorie v P*. Uvažujeme-li v $\mathbb{R}$ podprostor

$$X = (-\infty, 0) \cup \big(\mathbb{Q} \cap [0, \infty)\big),$$

pak X není Baireův prostor, ale je 2. kategorie. Z definice snadno plyne, že X *je Baireův prostor, právě když průnik každé posloupnosti otevřených hustých podmnožin X je hustá množina v X*. V odst. 2.1 uvedeme užitečné zobecnění této věty. Poznamenejme ještě, že každá otevřená podmnožina Baireova prostoru je zřejmě Baireův prostor.

Každý úplný metrický prostor je Baireův. Důkaz lze provést podobně jako v případě reálné osy. Místo posloupnosti intervalů se volí posloupnost do sebe zařazených uzavřených koulí s poloměry konvergujícími k nule. Průnik všech těchto koulí je podle Cantorovy věty neprázdný.

Dále *každý lokálně kompaktní topologický prostor je Baireův.* Toto tvrzení a další výsledky o Baireových prostorech se dají také dokázat pomocí *Banachovy-Mazurovy topologické hry.* Náš výklad bude spíše populární, formalizovanou verzi lze nalézt např. v [Ox].

Nechť X je metrický (nebo topologický) prostor. Dva hráči, Petr a Pavel, hrají na X tuto hru: Petr volí neprázdnou otevřenou množinu U_1, pak Pavel volí neprázdnou otevřenou množinu $V_1 \subset U_1$, pak Petr neprázdnou otevřenou množinu U_2 obsaženou ve V_1, atd. Oba hráči tak definují nerostoucí posloupnosti $\{U_n\}$ a $\{V_n\}$ neprázdných otevřených množin takových, že $U_n \supset V_n \supset U_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. V takovém případě je zřejmě $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n$; tento průnik označme Y. Petr je vítězem hry, když $Y = \emptyset$, a Pavel je vítězem hry, když $Y \neq \emptyset$. Budeme říkat, že hráč má vítěznou strategii, jestliže zná postup, který mu umožňuje zvítězit nezávisle na tom, jak postupuje jeho protihráč.

Jestliže v prostoru X existuje neprázdná otevřená množina G a řídké uzavřené množiny F_n takové, že $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, pak Pavel nemá vítěznou strategii. Petr může totiž začít s $U_1 = G$ a na Pavlovu odpověď V_n vždy reaguje volbou $U_{n+1} = V_n \setminus F_n$. Odtud snadno plyne, že pokud Pavel má vítěznou strategii, je X Baireův prostor.

Nechť např. X je úplný metrický prostor. Pavel může postupovat takto: Postupně volí neprázdné otevřené koule V_n, $V_n \subset \overline{V_n} \subset U_n$, jejichž průměr konverguje k nule. Pak, nezávisle na tom, jak hraje Petr, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{V_n} \neq \emptyset$. Je-li X lokálně kompaktní topologický prostor, volí Pavel neprázdné otevřené množiny V_n, jejichž uzávěr $\overline{V_n}$ je kompaktní. Potom opět $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{V_n}$ a poslední množina je neprázdná, neboť nerostoucí posloupnost neprázdných kompaktních množin má, jak plyne z definice kompaktnosti, neprázdný průnik.

Další užitečné modifikace (a matematický výklad bez Petra a Pavla) lze nalézt v prvním dílu [Cho], s. 115.

1.6. Baireova věta u Osgooda

Vcelku málo se ví, že pro případ reálné osy se Baireova věta objevuje v r. 1897 v práci [Os] W. F. Osgooda. Ten podrobil pečlivému studiu bodovou konvergenci spojitých funkcí ke spojité funkci a soustředil se zejména na vyšetřování charakteru množiny bodů, v jejichž okolí není konvergence stejnoměrná. V této souvislosti zavádí (na s. 161) podmínku (P): množina splňuje *podmínku* (P), když je, v naší terminologii, uzavřená a řídká. Dále (na s. 171) definuje *podmínku* (Q): množina splňuje podmínku (Q), jestliže je sjednocením neklesající posloupnosti množin splňujících podmínku (P). S využitím dokázaných vět o konvergenčním chování posloupností spojitých funkcí odvozuje (na s. 173), že doplněk množiny typu (Q) je v každém intervalu nespočetný.

S ohledem na Banachovu-Steinhausovu větu (viz odst. 2.6) stojí za zmínku, že z výsledků téže práce (s. 159) lze vyčíst tuto větu: *Jsou-li* f_n, $n \in \mathbb{N}$, *spojité funkce na* (a,b) *a* $\sup\{|f_n(x)|;\, n \in \mathbb{N}\} < \infty$ *pro každé* $x \in (a,b)$, *potom existuje interval* $(c,d) \subset (a,b)$ *takový, že* $\sup\{|f_n(x)|;\, n \in \mathbb{N},\, x \in (c,d)\} < \infty$, *neboli posloupnost* $\{f_n\}$ *je na intervalu* (c,d) *omezená.*

Ani Osgood však nebyl první, kdo použil aparátu Cantorovy teorie množin k dosažení výsledků, které úzce souvisejí s pozdější Baireovou větou. V. Volterra v práci [Vo], kterou napsal v r. 1880, tedy v době, kdy mu nebylo ještě ani 20 let, dokázal větu: *Jsou-li* f *a* g *funkce, které mají množinu bodů spojitosti hustou v* $\mathbb{R}$, *pak existuje bod* $x \in \mathbb{R}$, *ve kterém jsou obě funkce* f, g *spojité.* Jeho důkaz je založen opět na Cantorově větě o vložených intervalech. Ve skutečnosti dokázal Volterra více: označíme-li po řadě F, G množiny bodů spojitosti funkcí f a g, pak pro každý interval $(a,b) \subset \mathbb{R}$ je $F \cap G \cap (a,b) \neq \emptyset$. Poznamenejme, že *množina bodů nespojitosti funkce* f *definované na* $\mathbb{R}$ *je množinou 1. kategorie, právě když je množina bodů spojitosti* f *hustá v* $\mathbb{R}$; viz [Ox], s. 33. Odtud plyne, že množina bodů, ve kterých jsou spojité obě funkce f a g, je reziduální.

1.7. René Baire

Spolu s E. Borelem (1871–1956) a H. Lebesguem (1875–1941) patří R. Baire k nejvýznamnějším představitelům zlatého období francouzské matematické analýzy přelomu století. Přestože mu život dopřál věnovat se intenzivní vědecké práci pouhou desítku let, zůstane jeho jméno navždy spojeno s teorií nespojitých funkcí, s pojmy polospojité funkce, množiny 1. kategorie atd., ale především s počátky aplikací Cantorovy teorie množin v reálné analýze, s položením základů moderní topologie a deskriptivní teorie množin.

René Baire se narodil 21. ledna 1874 v rodině krejčího. Talent k matematice se u něj výrazně projevil již v gymnaziálních letech. Výborně se umístil v konkurzech a v r. 1892 byl přijat jak na *École Normale Supérieure*, tak také na *École Polytechnique.* Po ukončení École Normale získává po úspěšném konkurzu v r. 1895 kvalifikaci gymnaziálního profesora (*agrégé de mathématiques*) a do r. 1897 vyučuje na gymnáziu. S velkým nasazením se přitom věnuje svým výzkumům nespojitých reálných funkcí. Jeho první sdělení v *Comptes Rendus* upoutalo pozornost italského matematika V. Volterry. Baire využil možnosti získat stipendium a do Turina se za Volterrou vydal. Při svém pobytu v Itálii dokázal větu, která charakterizuje funkce 1. Baireovy třídy. V důkazu uplatnil téměř všechny pojmy, které zavedl či rozvinul G. Cantor: mohutnost množiny, ordinální čísla, uzavřené, dokonalé a husté množiny. Jak později napsal A. Denjoy: *Toto postačilo k vybudování topologické teorie funkcí reálné proměnné.* V r. 1898 dokončil Baire disertační práci a nastoupil opět jako profesor na gymnáziu. Obhajoba disertační práce se konala 24. března 1899 před komisí ve složení G. Darboux, P. Appel a E. Picard. Intenzivní vyčerpávající práce vyvolává návrat již dříve se projevujících zdravotních problémů: Baireovi působí obtíže zúžení jícnu, dostavuje se také svalová slabost, neurologické potíže, neschopnost soustředit se na intelektuální činnost a celková deprese.

Na podzim r. 1901 se Baire stává docentem na přírodovědecké fakultě v Montpellier a připravuje rozsáhlou publikaci *Sur la réprésentation des fonctions discontinues*. Ta však vychází v *Acta Mathematica* až v r. 1906 a další část v r. 1909. V r. 1904 je pověřen přednáškami na *Collège de France*; viz [Ba4]. V r. 1905 dostává místo na přírodovědecké fakultě univerzity v Dijonu jako nástupce C. Méraye: zakladatel teorie nespojitých funkcí tak nahradil matematika, jehož zájmem byly výhradně analytické funkce. Baire se vrhl do sepisování dvoudílné knihy *Leçons sur les théories générales de l'analyse*. Mimořádná zátěž definitivně podlomila jeho zdraví. V letech 1909–1913 stále působí na univerzitě, k vědecké práci se však již nevrátil. V r. 1914 odchází na zdravotní dovolenou, kterou si musí rok po roku prodlužovat: žije ve Švýcarsku v mimořádně skromných podmínkách a r. 1925 je penzionován.

V r. 1920 se Baireův zájem obrátil k reformě kalendáře, o níž se v dalším odstavci článku pro zajímavost zmíníme. Navrhovaná reforma byla příliš radikální a nenalezla příznivou odezvu.

Díky iniciativě E. Borela je R. Baire jmenován v r. 1922 členem korespondentem Pařížské akademie věd. Podlomené zdraví brání Baireovi v jakékoli práci. Okolo r. 1930 se problémy s jícnem stávají čím dál více nesnesitelné. Poslední dny svého života strávil Baire na psychiatrické klinice; zemřel 5. července 1932. Podrobnější informace o Baireově životě a díle lze nalézt v [Du] a [Me2].

1.8. Baireův návrh na reformu kalendáře

O Baireově návrhu se zmíníme jen velmi stručně, zájemce odkazujeme přímo na [Ba5]; viz též [Ba7]. Radikální modifikace spočívá v novém pojetí týdne: týden má, až na níže uvedené výjimky, 6 dnů. Rok má 12 měsíců, 7 z nich je po 30 dnech, 5 po 31 dnech: leden 30, únor 30, březen 31, duben 30, květen 31, červen 30, červenec 30, srpen 31, září 30, říjen 31, listopad 30 a prosinec 31. V přestupném roce má červenec 31 dnů. Každý měsíc bez výjimky jsou dny číslovány 1–30 a následují v pořadí neděle, ..., pátek. Sobota žádná. V měsíci o 31 dnech se den s datem 31 definuje jako sobota. Tento den je vložen mezi pátek 30. a neděli 1. dne následujícího měsíce. Neděle jsou dny svátku (je jich 60), každý z dnů pondělí–pátek je pracovní (každý den se vyskytuje šedesátkrát), pracovních dnů je tudíž 300. Sobot je v roce 5 nebo 6. Každý stát si rozhodne, které z nich prohlásí za dny svátku a které za dny pracovní. Baire věnuje rozboru výhod svého návrhu 7 stránek textu vysázeného petitem. Baireův projekt reformy kalendáře, jako mnoho dalších, zapadl.

2. Aplikace Baireovy věty

2.1. Oscilující funkce

Budeme uvažovat spojité funkce na intervalu $I = [0, 1]$. Existenci spojité funkce na I, která není monotónní na žádném intervalu $J \subset I$, není těžké dokázat přímou konstrukcí. Jako ilustraci standardní aplikace Baireovy věty zde dokážeme, že dokonce *typická spojitá funkce* na I není monotónní na žádném intervalu $J \subset I$. Vysvětleme nejprve, co se tímto výrokem rozumí.

Jako obvykle, symbolem $C(I)$ označíme prostor všech spojitých funkcí na intervalu I. Jestliže pro $f, g \in C(I)$ definujeme $\varrho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|;\ x \in I\}$, je funkce $\varrho : C(I) \times C(I) \to [0, \infty)$ metrika a $(C(I), \varrho)$ je metrický prostor. Není těžké dokázat, že je to úplný metrický prostor. Výrokem *typická funkce z $C(I)$ má vlastnost V* rozumíme, že existuje množina $E \subset C(I)$, která je 1. kategorie v $(C(I), \varrho)$, a každá funkce $f \in C(I) \setminus E$ má vlastnost V.

Při důkazu tvrzení, že typická funkce z $C(I)$ není monotónní na žádném intervalu $J \subset I$, budeme postupovat takto: všechny uzavřené intervaly, které mají racionální koncové body v I, tvoří spočetnou množinu. Její prvky označíme $I_1, I_2, \ldots$ Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$E_n = \bigl\{f \in C(I);\ f \text{ je monotónní na } I_n\bigr\}$$

a pro každé $n \in \mathbb{N}$ dokážeme:

(1) $C(I) \setminus E_n$ *je otevřená;*
(2) $C(I) \setminus E_n$ *je hustá.*

Odtud vyplývá, že množina E_n je řídká a množina $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ je tedy 1. kategorie v $C(I)$. Je-li $f \in C(I) \setminus E$ a $J \subset I$ je interval, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $I_n \subset J$. Protože $f \notin E_n$, není funkce f monotónní na I_n, a tedy není monotónní na J. Je užitečné zde zdůraznit roli Baireovy věty: množina $C(I) \setminus E$ je nejen neprázdná, nýbrž průnik $G \cap \bigl(C(I) \setminus E\bigr)$ je pro každou neprázdnou otevřenou podmnožinu $G \subset C(I)$ množina 2. kategorie. Tvrdí se tedy mnohem více, než že $C(I) \setminus E$ je hustá podmnožina $C(I)$.

Nyní k *důkazu* (1): Nechť $f \in C(I) \setminus E_n$. Potom existují body $x_j \in I_n$, $j = 1, 2, 3$, takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, a že buďto $f(x_1) < f(x_2)$ a $f(x_2) > f(x_3)$, nebo $f(x_1) > f(x_2)$ a $f(x_2) < f(x_3)$. Zvolme $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \min\bigl\{|f(x_{j+1}) - f(x_j)|;\ j = 1, 2\bigr\}$ a $g \in C(I)$, $\varrho(f, g) < \varepsilon$. Potom $g(x_1) < g(x_2)$ a $g(x_2) > g(x_3)$ nebo $g(x_1) > g(x_2)$ a $g(x_2) < g(x_3)$, takže g není monotónní na I_n. Dokázali jsme, že

$$\bigl\{g \in C(I);\ \varrho(f, g) < \varepsilon\bigr\} \subset C(I) \setminus E_n,$$

a tedy f je vnitřním bodem množiny $C(I) \setminus E_n$. Platí tudíž (1).

K *důkazu* (2): Zvolíme $f \in C(I)$ a $\varepsilon > 0$. Máme dokázat, že

$$\bigl\{g \in C(I);\ \varrho(f, g) < \varepsilon\bigr\} \setminus E_n \neq \emptyset.$$

Pokud f není na I_n monotónní, jsme s důkazem hotovi. Je-li f na I_n monotónní, sestrojíme snadno funkci $h \in C(I)$ takovou, aby $\varrho(0,h) < \varepsilon$ a aby funkce $g = f + h$ nebyla na I_n monotónní. Pro f neklesající na I_n stačí např. volit body $x_1 < x_2$ ve vnitřku I_n takové, aby $f(x_2) \leqq f(x_1) + \frac{1}{4}\varepsilon$, a funkci h definovat takto: $h = 0$ na $[0, x_1] \cup [x_2, 1]$, $h\big(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\big) = \frac{1}{2}\varepsilon$ a h je lineární na intervalech $[x_1, \frac{1}{2}(x_1 + x_2)]$ a $[\frac{1}{2}(x_1 + x_2), x_2]$.

Ze základních přednášek z matematické analýzy je známo, že spojitá funkce, která není v žádném bodě z I diferencovatelná (viz odst. 2.4 tohoto článku), není monotónní na žádném intervalu $J \subset I$. Zajímavá a delikátnější je tato otázka: *Existují diferencovatelné funkce, které nejsou na žádném intervalu monotónní?* Pro každou takovou funkci f jsou především nutně všechny množiny

$$\big\{x \in I;\ f'(x) > 0\big\}, \quad \big\{x \in I;\ f'(x) = 0\big\}, \quad \big\{x \in I;\ f'(x) < 0\big\}$$

husté v I, tedy speciálně množina bodů nespojitosti funkce f' je hustá; podle odst. 1.4 víme, že musí být 1. kategorie, neboť derivace funkce je funkce 1. Baireovy třídy.

Více či méně složité konstrukce těchto funkcí se vyskytují v literatuře; viz např. [KaSt]. Baireovou metodou kategorií je existence diferencovatelných funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které nejsou monotónní na žádném intervalu $J \subset \mathbb{R}$, dokázána ve [We]. Volba úplného metrického prostoru, v němž se pracuje, je v tomto případě rafinovanější. Nejprve se uvažuje prostor D omezených derivací, tj. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je prvkem D, jestliže f je omezená a existuje taková funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, že $F' = f$ v $\mathbb{R}$. Se supremovou metrikou je D úplný metrický prostor. Dále se uvažuje podprostor D_0 všech $f \in D$, pro něž je množina $\{x \in \mathbb{R};\ f(x) = 0\}$ hustá. Ukáže se, že D_0 je uzavřený podprostor úplného prostoru D, tedy úplný prostor. Dále se ukáže, že množina E všech $f \in D_0$, pro něž existuje interval J takový, že $f \geqq 0$ na J nebo $f \leqq 0$ na J, je 1. kategorie.

Existuje tedy mnoho funkcí s omezenou derivací, které nejsou monotónní na žádném intervalu $J \subset \mathbb{R}$. Za zmínku stojí, že samotný důkaz úplnosti prostoru D_0 je založen na tomto důsledku Baireovy věty: *Průnik posloupnosti hustých množin typu G_δ je v úplném metrickém prostoru množina hustá.* (Připomínáme, že podle definice je množina *typu* G_δ, jestliže je průnikem spočetného systému otevřených množin.)

Důkaz uzavřenosti D_0 probíhá takto: Nechť f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou prvky D_0, $f \in D$ a nechť f_n konvergují k f (v metrice prostoru D, tj. stejnoměrně). Označme dále $Z_n = \{x \in \mathbb{R};\ f_n(x) = 0\}$. Protože funkce f_n je 1. Baireovy třídy (je derivací!), je Z_n množina typu G_δ, která je podle předpokladu hustá. Tudíž množina $Z = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$ je hustá v $\mathbb{R}$. Ovšem zřejmě $Z \subset \{x \in \mathbb{R};\ f(x) = 0\}$, a tedy $f \in D_0$.

2.2. Liouvilleova čísla

Připomeňme, že $\mathbb{R}$ obsahuje hustou podmnožinu $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel. Množina $\mathbb{Q}$ je spočetná a je 1. kategorie v $\mathbb{R}$. Je tvořena čísly, která jsou kořeny algebraických rovnic prvního stupně s celočíselnými koeficienty. Popsanou situaci zobecníme: Číslo $x \in \mathbb{R}$ se nazývá *algebraické číslo* (*stupně* n), jestliže je kořenem polynomu stupně n s celočíselnými koeficienty (a n je přitom nejmenší možné). Ostatní reálná čísla, která nejsou algebraickými čísly stupně n pro žádné $n \in \mathbb{N}$, se nazývají *transcendentní.* Není obtížné dokázat, že algebraická čísla tvoří spočetnou podmnožinu $\mathbb{R}$. Odtud vyplývá existence alespoň jednoho transcendentního čísla. Je ovšem zřejmé, že množina všech transcendentních čísel je 2. kategorie a je nespočetná.

Tomuto jednoduchému důkazu existence transcendentních čísel předcházel důkaz J. Liouvillea. Ten o transcendentních číslech poskytuje navíc informaci týkající se aproximace pomocí čísel racionálních. Opírá se o toto tvrzení: *K libovolnému algebraickému číslu x stupně $n > 1$ existuje číslo $M \in \mathbb{N}$ tak, že je*

$$|x - p/q| > 1/Mq^n \tag{$*$}$$

pro všechna celá čísla $p, q,\ q > 0$; viz [Ox], s. 7. Číslo $x \in \mathbb{R}$ se nazývá *Liouvilleovo číslo*, jestliže je iracionální a pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují celá čísla $p, q,\ q > 1$, tak, že

$$|x - p/q| < 1/q^n.$$

Tak například číslo $x := \sum_{k=1}^{\infty} 1/10^{k!}$ je Liouvilleovým číslem: stačí volit $q = 10^{n!}$. Každé Liouvilleovo číslo je číslem transcendentním; viz opět [Ox], s. 7. Z definice vyplývá, že pro množinu E všech Liouvilleových čísel platí:

$$E = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,$$

kde $G_n = \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} (p/q - 1/q^n,\ p/q + 1/q^n)$. Množina G_n je sjednocením otevřených intervalů a je tedy otevřená; protože $\mathbb{Q} \subset G_n$, je rovněž hustá v $\mathbb{R}$. Její doplněk v $\mathbb{R}$ je proto řídká množina a s ohledem na rovnost

$$\mathbb{R} \setminus E = \mathbb{Q} \cup \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus G_n) \Big)$$

je doplněk E v $\mathbb{R}$ množinou 1. kategorie v $\mathbb{R}$. Liouvilleova čísla jsou tedy příkladem typických reálných čísel. Na druhé straně je množina Liouvilleových čísel malá ve smyslu míry: má *nulovou α-rozměrnou Hausdorffovu míru pro každé $\alpha > 0$.*

2.3. Charakteristika polynomů

Následující tvrzení je jednoduché a chronicky známé: *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a nechť existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $f^{(n)}(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Potom je f polynom.*

Možná poněkud překvapující je toto tvrzení: *Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má derivace všech řádů a nechť pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $n(x) \in \mathbb{N}$ takové, že $f^{(n(x))}(x) = 0$. Potom f je polynom.* Zde není a priori vůbec zřejmé, proč by funkce $x \mapsto n(x)$ měla být omezená.

V důkazu druhého tvrzení využijeme Baireovu větu. Pracujeme pouze s nekonečně diferencovatelnými funkcemi na $\mathbb{R}$. Pro otevřený interval $I \subset \mathbb{R}$ píšeme $f \in P(I)$, jestliže existuje polynom p tak, že $f = p$ na I. Následující pozorování je elementární: *Je-li $x \in (a,b)$ a $f \in P((a,x)) \cap P((x,b))$, je $f \in P((a,b))$.*

Pro $M \subset \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ označme $E_n(M) = \{x \in M;\ f^{(n)}(x) = 0\}$. Je-li $K \subset \mathbb{R}$ uzavřený interval, je podle předpokladu $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n(K)$. Podle Baireovy věty ($K$ je úplný metrický prostor) existuje $n \in \mathbb{N}$ a otevřený interval $I \subset K$ tak, že $I \subset E_n(K)$, neboli $f^{(n)} = 0$ na I. Odtud plyne, že sjednocení V všech otevřených intervalů I, pro něž $f \in P(I)$, je hustá otevřená množina v $\mathbb{R}$. Povšimněme si, že je-li $J \subset V$ otevřený interval, je $f \in P(J)$. V okolí každého bodu z J je totiž f polynomem, a tedy funkce přiřazující bodu $x \in J$ stupeň tohoto polynomu je na J lokálně konstantní, a tudíž konstantní, neboť množina J je souvislá. Množina $F = \mathbb{R} \setminus V$ je tudíž uzavřená a řídká; podle našeho pozorování F neobsahuje žádné izolované body. Budeme předpokládat, že $F \neq \emptyset$, a odvodíme spor.

Protože F je úplný prostor, vyplývá z Baireovy věty existence $n \in \mathbb{N}$ a otevřeného intervalu (a,b), pro který $F \cap (a,b) \neq \emptyset$ a $f^{(n)} = 0$ na $F \cap (a,b)$. Žádný bod množiny $F \cap (a,b)$ není izolovaný, a tak z definice derivace plyne rovnost $f^{(k)} = 0$ na $F \cap (a,b)$ pro všechna $k \geqq n$. Zvolme $x \in F \cap (a,b)$. Pak alespoň jedna z množin $F \cap (a,x)$ a $F \cap (x,b)$ je neprázdná; předpokládejme, že $\alpha \in (a,x) \cap F$. Dokážeme, že pak $f \in P((\alpha,x))$. Nechť $(c,d) \subset (\alpha,x)$ je styčný interval množiny F, tj. $\{c,d\} \subset F$ a $(c,d) \cap F = \emptyset$. Připomeňme, že $f^{(k)}(c) = 0$ pro všechna $k \geqq n$. Protože $(c,d) \subset V$, existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že $f^{(m)} = 0$ na (c,d). Pokud je $m \leqq n$, je zřejmě i $f^{(n)} = 0$ na (c,d). Je-li $m > n$, je $0 = \int_c^x f^{(m)} = f^{(m-1)}(x)$, $x \in (c,d)$ a analogicky dostaneme $f^{(k)} = 0$ na (c,d) pro $m \geqq k \geqq n$, tedy i $f^{(n)} = 0$ na (α,x).

Jestliže existuje $\beta \in F \cap (x,b)$, odvodí se podobnou úvahou, že $f \in P((x,\beta))$. Je-li $F \cap (x,b) = \emptyset$, je (x,b) podmnožinou V a tedy $f \in P((x,b))$. Podle výše zmíněného pozorování je f polynom na intervalu obsahujícím bod x, takže $x \notin F$, a to je hledaný spor.

2.4. Diferencovatelnost spojitých funkcí

V době, kdy se utvářely pojmy spojitosti a diferencovatelnosti funkce, panovalo obecné přesvědčení o jejich úzké vzájemné souvislosti. Z prací Weierstrassových vyplývá, že patrně i Gauss, Cauchy a Dirichlet se domnívali, že derivace spojité funkce nemusí existovat pouze ve výjimečných bodech. Teprve Riemann ve svých přednáškách r. 1861 a snad ještě dříve vyslovil domněnku, že funkce

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2 t)}{k^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

ač je všude v $\mathbb{R}$ spojitá, nemá v žádném bodě vlastní derivaci. Mnohem později, až r. 1970, J. Gerver dokázal, že tato domněnka není správná; viz [Me1], s. 211. Vedla však k tomu, že r. 1872 Weierstrass sestrojil ve formě součtu trigonometrické řady funkci s uvedenou vlastností. Jeho objev publikoval r. 1875 Du Bois-Reymond a od té doby se spojité funkce nemající nikde derivaci těší velkému zájmu; viz [Me1], s. 209. Později se ukázalo, že funkce tohoto typu sestrojili dříve B. Bolzano a Ch. Cellerier, aniž však dokázali, že mají tuto vlastnost. Poznamenejme ještě, že r. 1924 publikoval A. S. Besicovitch (komplikovaný) příklad spojité funkce, která nemá v žádném bodě *vlastní ani nevlastní* jednostranné derivace.

R. 1929 H. Steinhaus položil otázku, jak velká je množina spojitých nikde diferencovatelných funkcí v prostoru $C([a,b])$ se supremovou normou. Řešení nalezli v r. 1931 S. Banach a S. Mazurkiewicz: dokázali, že typická funkce $f \in C([a,b])$ nemá vlastní (jednostrannou) derivaci v žádném bodě $t \in [a,b]$. Mazurkiewiczův důkaz Banach velmi zjednodušil, a tak významně přispěl ke zpopularizování metody kategorií.

Metoda důkazu vzbudila mimořádně velký zájem a dnes je často vykládána v přednáškách z matematické analýzy. Proto ji (pro interval $[0,1]$ při zkráceném označení $C = C([0,1])$) jen stručně popíšeme: Ukáže se, že množina

$$E_n = \{f \in C;\ \text{existuje } t \in [0, 1-1/n] \text{ tak, že } |f(t+h) - f(t)| \leqq nh,\ 0 < h < 1-t\}$$

je pro každé $n \in \mathbb{N}$ uzavřená a řídká v C. Uzavřenost se snadno dokáže z definice a pomocí „pilovitých“ funkcí se ukáže, že $C \setminus E_n$ je hustou podmnožinou C.

Výsledek doplnil S. Saks v r. 1932 v [Sa1] pozorováním, že takové funkce, jako je ta, kterou sestrojil Besicovitch, tvoří v C pouze množinu 1. kategorie. Všeobecně pak převládl názor, že k důkazu existence funkcí tohoto typu je metoda kategorií nepoužitelná.

O rok později V. Jarník dokázal, že existuje množina 1. kategorie $A \subset C$ taková, že pro každou $f \in C \setminus A$, každé $t \in (0,1)$ a každé $a \in [-\infty, +\infty]$ existuje posloupnost reálných čísel $\{h_n\}$, $h_n \to 0$, pro kterou

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(t+h_n) - f(t)}{h_n} = a.$$

To ukazuje další možný směr zobecňování: Definujeme-li horní Diniho derivaci zprava v bodě $t \in [0,1)$ vztahem

$$D^+ f(t) = \limsup_{u\to 0+} \frac{f(t+u) - f(t)}{u}$$

a analogicky zbývající tři Diniho derivace $D_+ f(t)$, $D^- f(t)$, $D_- f(t)$, je zajímavé zkoumat jejich vzájemné vztahy.

Věta. *Typická funkce $f \in C$ má tuto vlastnost: Pro každý bod $x \in (0,1)$ platí buďto*

(a) $D^+ f(x) = \infty$, $D_- f(x) = -\infty$ *a* $D_+ f(x) \leqq D^- f(x)$, *nebo*
(b) $D_+ f(x) = -\infty$, $D^- f(x) = \infty$ *a* $D_- f(x) \leqq D^+ f(x)$.

Toto je shrnutí výsledků S. Banacha z r. 1931, S. Mazurkiewicze z r. 1931 a V. Jarníka z r. 1933. Vzniká přirozeně otázka, zda platí další vztahy tohoto druhu. Téměř před dvaceti lety tuto otázku negativně zodpověděl D. Preiss; viz [PrZa] a komentář v [Za1] a [Za4].

Věta. *Nechť $D^+, D_+, D^-, D_- \in [-\infty, \infty]$ jsou taková čísla, že buďto*

(a) $D^+ = \infty$, $D_- = -\infty$ *a* $D_+ \leqq D^-$, *nebo*
(b) $D_+ = -\infty$, $D^- = \infty$ *a* $D_- \leqq D^+$.

Potom pro typickou funkci $f \in C$ existuje bod $x \in (0,1)$ takový, že

$$D^+ = D^+f(x), \quad D_+ = D_+f(x), \quad D^- = D^-f(x), \quad D_- = D_-f(x).$$

Nakonec uvedeme výsledek o uzlových bodech. Bod $x \in (0,1)$ se nazývá *uzlový bod*, jestliže $D^+f(x) = D^-f(x) = \infty$ a $D_+f(x) = D_-f(x) = -\infty$. V. Jarník v r. 1933 dokázal, že *pro typickou funkci $f \in C$ jsou λ-skoro všechny body $x \in (0,1)$ uzlové.* V r. 1970 K. M. Garg v [Ga] doplnil tento výsledek tvrzením, že *pro typickou funkci $f \in C$ tvoří uzlové body reziduální množinu.*

Existuje mnoho dalších výsledků o diferencovatelnosti funkcí, které souvisejí s Baireovou větou. Zájemce odkazujeme na [Br] a na [Pr], [Za1], [Za3] a [Za4].

Na závěr tohoto odstavce uvedeme ještě jeden zajímavý výsledek. Již jsme se zmínili o spojitých funkcích, které nemají v žádném bodě vlastní ani nevlastní jednostranné derivace. Saksův výsledek naznačuje, že Besicovitchova konstrukce takové funkce patrně musí být složitější než konstrukce Weierstrassova. V r. 1984 J. Malý v [Ma] ukázal, jak lze existenci i takových funkcí dokázat metodou kategorií. Tato rehabilitace metody kategorií je založena na konstrukci vhodného prostoru, ve kterém funkce Besicovitchova typu jsou typické. Poznamenejme na závěr tohoto odstavce, že literatura o studiu nediferencovatelných funkcí zahrnuje stovky položek: např. autor disertace [Re] uvádí ve své práci 1001 citací.

2.5. Derivace neurčitého integrálu

Pro funkce jedné proměnné jsou věty o souvislosti hodnoty derivace neurčitého integrálu s hodnotami integrandu dobře známy. V základním kurzu analýzy se dokazuje tato věta: *Je-li $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá funkce,*

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{$*$}$$

pak platí $G'(x) = g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pokročilejší znají patrně větu: *Je-li g lokálně lebesgueovsky integrovatelná v $\mathbb{R}$ a funkce G je definována rovností $(*)$ (kde integrál chápeme jako Lebesgueův), potom rovnost $G'(x) = g(x)$ nastává pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$.*

Pro lebesgueovsky integrovatelnou funkci f na $\mathbb{R}^m$ je rozumné za *neurčitý integrál* považovat *množinovou* funkci, přiřazující lebesgueovsky měřitelné množině $A \subset \mathbb{R}^m$ číslo $\int_A f(t)\,\mathrm{d}\lambda_m(t)$, kde λ_m značí m-rozměrnou Lebesgueovu míru. Nechť $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ a nechť $B_r(x)$ je koule o středu x a poloměru $r > 0$. Číslo $a \in \mathbb{R}$ nazveme *symetrickou derivací neurčitého integrálu funkce $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ v bodě $x \in \mathbb{R}^m$, jestliže*

$$\lim_{r \to 0+} \frac{1}{\lambda_m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(t)\,\mathrm{d}\lambda_m(t) = a.$$

Klasická věta o derivování neurčitého integrálu říká: *Pro λ_m-skoro všechna $x \in \mathbb{R}^m$ je symetrická derivace neurčitého integrálu funkce $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ rovna $f(x)$.*

V definici vystupují koule smršťující se k bodu x. Analogický výsledek platí, pokud koule zaměníme krychlovými m-rozměrnými intervaly se středem v bodě x, nebo když se uvažují krychle obsahující bod x s délkou hrany konvergující k nule. Neformálně řečeno, věta o derivaci neurčitého integrálu pro funkce $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ platí při definici derivace pomocí množin smršťujících se k bodu x, pokud je míra uvažovaných množin srovnatelná s m-tou mocninou jejich průměru; srv. [Ru], s. 172.

Situace se dramaticky změní, jestliže se uvažují *libovolné* intervaly obsahující bod x; nepožaduje se tedy např. žádná kontrola poměru délek nejkratší a nejdelší hrany intervalu. Je-li $I = \{I_n\}$ posloupnost otevřených intervalů v $\mathbb{R}^m$ a $x \in \mathbb{R}^m$, budeme pro stručnost psát $I \to x$, jestliže je $x \in I_n$ a průměry I_n konvergují pro $n \to \infty$ k nule. Systém všech posloupností $I = \{I_n\}$, pro něž $I \to x$, označíme $\mathcal{J}(x)$. Pro $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ a $x \in \mathbb{R}^m$ přiřadíme každé posloupnosti $I \in \mathcal{J}(x)$ číslo

$$\Delta(I) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_m(I_n)} \int_{I_n} f(t)\,\mathrm{d}\lambda_m(t).$$

Číslo $\sup\{\Delta(I);\, I \in \mathcal{J}(x)\}$ se nazývá (*silná*) *horní derivace* neurčitého integrálu funkce f v bodě x. S. Saks v [Sa2] velmi důrazně ukázal nedostatečnost definice derivace užívající *všechny* intervaly smršťující se k bodu x. Pro prostory $\mathbb{R}^m$, $m \geqq 2$, dokázal tuto pozoruhodnou větu: *Množina M všech funkcí $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$, pro něž je horní derivace neurčitého integrálu f konečná alespoň v jednom bodě, je 1. kategorie v $L^1(\mathbb{R}^m)$.*

V důkazu se uvažují množiny M_k všech funkcí $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$, pro něž existuje bod $x \in \mathbb{R}^m$ takový, že $|x| \leqq k$ a pro všechny otevřené intervaly J s průměrem menším než $1/k$ a obsahující bod x platí $\int_J f(t)\,\mathrm{d}\lambda_m(t) \leqq k\lambda_m(J)$. Zřejmě $M = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k$. Není příliš těžké dokázat, že M_k jsou uzavřené množiny. Dokázat, že M_k má prázdný vnitřek, je mnohem náročnější.

V [DeG] se k tomu využívá toto značně netriviální lemma: *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje nezáporná funkce φ_n taková, že*

(a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}\lambda_m(t) \leqq 1/n,$

(b) *pro každé $x \in \overline{B_n(0)}$ existuje otevřený interval J tak, že $x \in J$, průměr J je menší než $1/n$ a*

$$\int_J \varphi_n(t)\,\mathrm{d}\lambda_m(t) > n\lambda_m(J).$$

Smysl Saksovy věty není v tom, že se má na silnou „diferenciální bázi“ tvořenou *všemi* intervaly zapomenout. Říká jenom to, že na derivování neurčitých integrálů *všech* funkcí z $L^1(\mathbb{R}^m)$ nestačí. Je např. známo, že pro funkce $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$, pro něž

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(t)|\bigl(1 + \log^+ |f(t)|\bigr)^{m-1}\,\mathrm{d}\lambda_m(t) < \infty,$$

je „silná derivace“ neurčitého integrálu funkce f v bodě x rovna $f(x)$ pro λ_m-skoro všechna $x \in \mathbb{R}^m$; viz [DeG].

2.6. Základy funkcionální analýzy

Jedním ze základních výsledků lineární funkcionální analýzy je Banachova-Steinhausova věta, neboli *princip stejnoměrné omezenosti*; viz [Ru], s. 114.

Věta. *Nechť X je Banachův prostor a nechť $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ je systém spojitých lineárních funkcionálů na X. Potom nastává právě jeden z následujících případů:*

(a) *existuje $M < \infty$ tak, že pro všechna $\alpha \in A$ je $\|f_\alpha\| \leqq M$, nebo*
(b) *existuje hustá množina typu G_δ v X taková, že v každém jejím bodě x platí*

$$\sup\{|f_\alpha(x)|;\ \alpha \in A\} = \infty.$$

Cesta k důkazu, který se dnes běžně prezentuje v úvodních přednáškách z funkcionální analýzy, nebyla přímočará. V r. 1922 dokázal H. Hahn pro posloupnost spojitých lineárních funkcionálů $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ toto tvrzení: *Je-li pro každé $x \in X$ posloupnost $\{|f_n(x)|\}_{n=1}^\infty$ omezená, je omezená i posloupnost $\{\|f_n\|\}_{n=1}^\infty$*. Při důkazu sporem postupoval takto: pokud by posloupnost $\{\|f_n\|\}_{n=1}^\infty$ nebyla omezená, bylo by možné sestrojit induktivně posloupnost bodů $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ prostoru X a indexů $n_k \in \mathbb{N}$ tak, že:

(a) řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ má součet $x \in X$;
(b) pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je $\sum\limits_{j=k+1}^{\infty} |f_{n_k}(x_j)| \leqq 1$;
(c) pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí odhad $|f_{n_k}(x_k)| \geqq k + \sum\limits_{l=1}^{k-1} |f_{n_k}(x_l)|$.

Potom by však pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platilo

$$|f_{n_k}(x)| \geqq |f_{n_k}(x_k)| - \sum_{l=1}^{k-1} |f_{n_k}(x_l)| - \sum_{l=k+1}^{\infty} |f_{n_k}(x_l)| \geqq k-1,$$

což vede ke sporu s omezeností posloupnosti $\{|f_n(x)|\}_{n=1}^\infty$.

Popsaný postup bývá nazýván *metoda klouzavého hrbu*[1]). Posloupnost $\{f_{n_k}(x_i)\}_{k=1}^\infty$ má „hrb“ na místě $i = k$ odpovídajícím bodu x_k, který „klouže“ k bodu x. S. Banach dokázal nezávisle obdobnou, ještě trochu obecnější větu ve své disertaci. V r. 1927 si v [BaSt] S. Banach spolu s H. Steinhausem povšimli, že důkaz popsaného tvrzení lze elegantně založit na Baireově větě z r. 1899! Výsledek se stal velmi populární též tím, že se objevil v Banachově knize *Théorie des opérations linéaires* z r. 1932. V ní je zařazena další významná aplikace Baireovy věty: *věta o otevřeném zobrazení.* Uvedeme ji zde bez důkazu, ten lze nalézt např. v [Ru], s. 116: *Jsou-li X a Y Banachovy prostory a f*

[1]) Metoda klouzavého hrbu byla v [JeKr] s úspěchem užita při důkazu věty o posloupnostech integrovatelných funkcí (forma Fatouova lemmatu).

je spojité lineární zobrazení X na Y, je zobrazení f otevřené, tj. pro každou otevřenou množinu $U \subset X$ je $f(U)$ otevřená množina v Y. Odtud okamžitě plyne: *Je-li navíc zobrazení f prosté, potom je inverzní zobrazení f^{-1} spojité.*

2.7. Fourierovy řady

Označme $\mathcal{C}$ prostor všech 2π-periodických funkcí spojitých na $\mathbb{R}$. Je-li $f \in \mathcal{C}$, pak částečné součty Fourierovy řady funkce f

$$s_n(f,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad t \in \mathbb{R},$$

jsou určeny vzorcem

$$s_n(f,t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t+v) D_n(v)\,\mathrm{d}v,$$

kde tzv. *Dirichletovo jádro* D_n je funkce definovaná vztahem

$$D_n(v) = 2\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kv\right) = \frac{\sin\bigl((n+\frac{1}{2})v\bigr)}{\sin(\frac{1}{2}v)}, \quad v \in (0, 2\pi).$$

Pojmenování souvisí s tím, že pomocí popsaného vyjádření dokázal Dirichlet r. 1829 pro funkce f, které jsou *po částech spojité* a *po částech monotónní* v intervalu $[0, 2\pi]$, rovnost

$$\lim_{n\to\infty} s_n(f,t) = \tfrac{1}{2}\bigl(f(t+) + f(t-)\bigr), \quad t \in [0, 2\pi]$$

(vpravo stojí průměr limit zprava a zleva). Pro spojité po částech monotónní 2π-periodické funkce platí

$$\lim_{n\to\infty} s_n(f,t) = f(t), \quad t \in [0, 2\pi], \tag{$*$}$$

a tedy i pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Z korespondence s C. F. Gaussem z r. 1853 lze soudit, že Dirichlet věřil ve správnost tvrzení i v případě, že f má v intervalu $[0, 2\pi]$ nekonečně mnoho (lokálních) maxim a minim a že pak $(*)$ platí „kromě jistých zcela singulárních případů“. V r. 1876 dokázal Du Bois-Reymond, že existuje $f \in \mathcal{C}$, pro kterou Fourierova řada f diverguje alespoň v jednom bodě. Tzv. *metodou kondenzace singularit*, kterou popsal r. 1870 H. Hankel, se dá pak snadno sestrojit funkce $f \in \mathcal{C}$, jejíž Fourierova řada diverguje na spočetné husté podmnožině intervalu $[0, 2\pi]$. Později, r. 1904, dokázal L. Fejér, že pomocí $(C, 1)$-sčítací metody (aritmetické průměry) je Fourierova řada funkce $f \in \mathcal{C}$ ve všech bodech $t \in \mathbb{R}$ sčítatelná k $f(t)$ a že tedy, pokud Fourierova řada $f \in \mathcal{C}$ konverguje v nějakém bodě $t \in \mathbb{R}$, má „správný součet“ $f(t)$. To však zájem o funkce $f \in \mathcal{C}$ s divergentní Fourierovou řadou nezmenšilo. Du Bois-Reymondův příklad byl velmi komplikovaný, a tak se hledaly jiné. Poměrně jednoduchý příklad sestrojil Fejér r. 1911, avšak již r. 1905 předložil H. Lebesgue jiný příklad založený na výše zmíněné metodě klouzavého hrbu; viz [Le].

Pro pevně zvolené $t \in [0, 2\pi]$ je $F_n : f \mapsto s_n(f, t)$ spojitý lineární funkcionál na prostoru $\mathcal{C}_p$ všech restrikcí $f|_{[0,2\pi]}$ funkcí $f \in \mathcal{C}$ na interval $[0, 2\pi]$. Není těžké dokázat, že

$$\|F_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(v)| \, \mathrm{d}v.$$

Z nerovnosti $|\sin t| \leqq |t|$, $t \in \mathbb{R}$, vyplývá, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí následující odhad

$$\|F_n\| > \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left|\sin(n + \tfrac{1}{2})v\right| \frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{2}{\pi} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} |\sin u| \frac{\mathrm{d}u}{u} >$$
$$> \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin u| \, \mathrm{d}u = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,.$$

Vidíme, že $\|F_n\| \to \infty$ pro $n \to \infty$. Z principu stejnoměrné omezenosti plyne, že existuje hustá množina $A(t) \subset \mathcal{C}_p$ typu G_δ taková, že pro všechna $f \in A(t)$ je $\sup\{|F_n(f)|;\, n \in \mathbb{N}\} = \infty$. Samozřejmě, že Fourierova řada každé funkce z $A(t)$ diverguje v bodě t.

V následující úvaze použijeme tento důsledek Baireovy věty: *V úplném metrickém prostoru X neobsahujícím izolované body není žádná spočetná hustá množina typu G_δ.* Pokud by hustá spočetná množina $E = \{x_k;\, k \in \mathbb{N}\} \subset X$ byla typu G_δ, existovaly by otevřené husté množiny $V_n \supset E$, $E = \bigcap V_n$. Pak by byly otevřené a husté v X i množiny $W_n = V_n \setminus \{x_k;\, k = 1, \dots, n\}$, a platilo by $\bigcap W_n = \emptyset$, což je ve sporu s Baireovou větou.

Nyní nám Baireova věta umožní výsledek o funkcích z $\mathcal{C}_p$ ještě zlepšit: zvolíme spočetnou množinu $\{t_k \in [0, 2\pi];\, k \in \mathbb{N}\}$ hustou v intervalu $[0, 2\pi]$ a definujeme

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A(t_k).$$

Tato množina je průnikem spočetně mnoha hustých podmnožin $\mathcal{C}_p$ typu G_δ a je tedy podle důsledku Baireovy věty, který jsme uvedli v odst. 2.1, také hustou podmnožinou $\mathcal{C}_p$ typu G_δ. Položme $s^*(f, t) = \sup\{|s_n(f, t)|;\, n \in \mathbb{N}\}$, $t \in [0, 2\pi]$. Zřejmě je $s^*(f, t_k) = \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Protože je funkce $t \mapsto s^*(f, t)$ pro každou $f \in \mathcal{C}_p$ supremem spojitých funkcí na $[0, 2\pi]$, je to funkce zdola polospojitá, a proto je množina $\{t \in [0, 2\pi];\, s^*(f, t) = \infty\}$ pro každou funkci $f \in A$ hustá a typu G_δ v $[0, 2\pi]$. Tak jsme dospěli k tvrzení: *Pro každou funkci $f \in A$ Fourierova řada funkce f diverguje na husté podmnožině typu G_δ intervalu* $[0, 2\pi]$. Ta je však, jak jsme dokázali, *nespočetná.*

Připomeňme ještě, že Fourierovy řady mají smysl i pro 2π-periodické funkce na $\mathbb{R}$, jejichž restrikce na interval $[0, 2\pi]$ je z prostoru $L^1([0, 2\pi])$ funkcí lebesgueovsky integrovatelných na intervalu $[0, 2\pi]$. R. 1926 sestrojil A. N. Kolmogorov v tomto prostoru funkci f, jejíž Fourierova řada *diverguje všude* v $\mathbb{R}$. Dlouho nebylo zřejmé, zda totéž nemůže nastat i pro funkci z $\mathcal{C}_p$. Teprve r. 1966 L. Carleson dokázal, že pro každou 2π-periodickou funkci integrovatelnou s kvadrátem na $(0, 2\pi)$, a tedy speciálně pro každou $f \in \mathcal{C}_p$, Fourierova řada konverguje skoro všude v $[0, 2\pi]$ (a také v $\mathbb{R}$), tedy na doplňku množiny nulové Lebesgueovy míry.

2.8. Holomorfní funkce

Jedno z prvních použití metody kategorií se vyskytlo při vyšetřování hraničního chování holomorfních funkcí.

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a $H(G)$ je prostor všech holomorfních funkcí na G. Na $H(G)$ zavedeme metriku např. takto: zvolíme posloupnost $\{K_n\}$ kompaktních množin takových, že množina K_n je obsažena ve vnitřku množiny K_{n+1} a $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = G$. Definujeme-li

$$\varrho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\sup|f-g|(K_n)}{1+\sup|f-g|(K_n)}, \quad f,g \in H(G),$$

je prostor $(H(G), \varrho)$ úplný metrický prostor, ve kterém $f_n \to f$ znamená, že $\{f_n\}$ konverguje k f lokálně stejnoměrně na G.

Nejprve uvedeme několik výsledků pro případ, že G je jednotkový kruh; viz [KiSz]. Je-li $r \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, pak množina všech funkcí $f \in H(G)$, pro něž na úsečce $[r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}]$ existují body $z, w \in G$ takové, že $|f(z)| < \varepsilon$ a $|f(w)| > 1/\varepsilon$, je otevřená a hustá v $H(G)$. Odtud plyne, že *typická funkce $f \in H(G)$ nemá v žádném bodě na hranici G radiální limitu.* Dokonce platí, že *pro typickou funkci f z $H(G)$ je množina $\{f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta});\ r \in [0,1)\}$ pro každé $\theta \in \mathbb{R}$ hustá v $\mathbb{C}$.* A konečně ještě jedno tvrzení: *Typická funkce z $H(G)$ zobrazuje každou výseč jednotkového kruhu G na celou komplexní rovinu.*

Vraťme se k případu obecné oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Bod $z \in \partial G$ nazveme *bodem pokračovatelnosti* funkce $f \in H(G)$, jestliže existuje kruh U o středu z a funkce $g \in H(U)$ taková, že $f = g$ na $G \cap U$. Množinu všech bodů pokračovatelnosti funkce f označíme $C(f)$. Je-li $C(f) = \emptyset$, říkáme, že ∂G je *přirozená hranice* funkce f. Uveďme školní příklad: Funkce $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}/2^n$ je holomorfní na jednotkovém kruhu a jednotková kružnice je její přirozenou hranicí.

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast, $U_1, U_2, \dots, U_n$ jsou kruhy se středy na ∂G a $\varepsilon > 0$. Následující výsledek dokázal S. Mazurkiewicz: *Je-li M_n množina všech funkcí $f \in H(G)$ takových, že pro každé $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ existují v $G \cap U_j$ body z_j, w_j takové, že $|f(z_j)| < \varepsilon$ a $|f(w_j)| > 1/\varepsilon$, potom M_n je hustá otevřená podmnožina prostoru $H(G)$.* Odtud vyplývá, že *pro typickou funkci z $H(G)$ je ∂G její přirozenou hranicí.*

Podobný výsledek lze dokázat také pro harmonické funkce a obecněji pro řešení parciálních diferenciálních rovnic v $\mathbb{R}^m$.

Pro omezené funkce či funkce spojitě rozšiřitelné z G na uzávěr $\overline{G}$ je situace složitější. Je-li např. G jednotkový kruh bez svého středu, nemůže existovat omezená $f \in H(G)$, pro niž $C(f) = \emptyset$; to plyne z věty o odstranitelné singularitě.

Na závěr tohoto odstavce uvedeme ještě jeden výsledek. Nechť $V \subset \mathbb{R}^m$ je omezená otevřená množina, $R \subset \partial V$ je množina regulárních bodů pro Dirichletovu úlohu; viz [KNV]. Označme P úplný prostor všech funkcí spojitých na $\overline{V}$ a harmonických na V s obvyklou supremovou normou. Definujeme-li analogicky bod pokračovatelnosti funkce $f \in P$ jako bod $z \in \partial V$, k němuž existuje koule $U \in \mathbb{R}^m$ o středu z a funkce g

harmonická na U tak, že $f = g$ na $V \cap U$, platí: *Pro každou $f \in P$ je $\partial V \setminus \overline{R} \subset C(f)$ a pro typickou $f \in P$ je $C(f) \cap \overline{R} = \emptyset$.* To vyplývá z výsledků dokázaných v mnohem obecnějším kontextu v [NeVe].

2.9. Diferenciální rovnice

Připomeňme několik poznatků o diferenciálních rovnicích. K těm základním patří tvrzení pocházející od G. Peana: *Je-li f spojitá funkce na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^2$ a $[u, v] \in G$, pak existuje alespoň jedno řešení diferenciální rovnice*

$$y' = f(x, y), \tag{$*$}$$

které vyhovuje počáteční podmínce $y(u) = v$. Podrobněji: existuje otevřený interval $I \subset \mathbb{R}$ obsahující bod u a funkce φ na I tak, že pro všechna $t \in I$ je $\varphi'(t) = f\big(t, \varphi(t)\big)$ a $\varphi(u) = v$.

Je známo, že každé takové řešení lze prodloužit na *maximální řešení*, tedy každým bodem $[u, v] \in G$ prochází alespoň jedno maximální řešení. Jestliže každým bodem množiny G prochází *právě jedno* maximální řešení, řekneme, že rovnice $(*)$ je jednoznačně řešitelná v G.

Jestliže f vyhovuje v G lokálně Lipschitzově podmínce vzhledem k druhé proměnné, potom je rovnice $(*)$ jednoznačně řešitelná v G. Podmínka říká, že ke každému bodu $[u, v] \in G$ existuje okolí U a konstanta K tak, že pro všechny body $[x, y_1], [x, y_2] \in U$ je

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq K|y_1 - y_2|.$$

Je rovnice $(*)$ jednoznačně řešitelná pro typickou spojitou funkci f? Tvrzení pocházející od W. Orlicze uvedeme bez důkazu; viz [Or1]. Uvažujme $G = (0, 1) \times (0, 1)$ a označme $C = C(G)$ prostor všech omezených funkcí spojitých na G opatřený supremovou normou. Připomeňme, že tento prostor je úplný. Množina všech funkcí z C, které v okolí alespoň jednoho bodu $[u, v] \in G$ splňují výše uvedenou lipschitzovskou podmínku, je 1. kategorie v C. O to překvapivěji působí toto tvrzení: *Pro typickou funkci $f \in C$ je rovnice $(*)$ jednoznačně řešitelná v G.*

Orlicz tak dokázal, že existuje „mnoho“ pravých stran $f \in C$, pro něž je rovnice $(*)$ jednoznačně řešitelná, přestože jen pro „málo“ funkcí $f \in C$ je splněna výše uvedená postačující podmínka pro jednoznačnost.

2.10. Nekonečně diferencovatelné funkce

Ze základů matematické analýzy víme, že elementární funkce mají derivace všech řádů a jsou lokálně součtem své Taylorovy řady. Uvažujme prostor $C^\infty(\mathbb{R})$ všech funkcí, které mají na $\mathbb{R}$ derivace všech řádů. Pro každou funkci $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ a bod $a \in \mathbb{R}$ můžeme samozřejmě napsat Taylorovu řadu funkce f:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x - a)^n. \tag{$*$}$$

Její užitek je obecně pramalý. Řada sice vždy konverguje v bodě a, ale rovnost $f(a) = f(a)$ je zcela nezajímavá. Je známo, že existuje číslo $R \in [0, \infty]$ takové, že řada $(*)$ konverguje v každém bodě x, pro který $|x - a| < R$, a diverguje v každém bodě x vyhovujícím podmínce $|x - a| > R$; nazývá se poloměr konvergence řady $(*)$. Problém spočívá v tom, že může nastat jeden ze dvou diskvalifikujících jevů:

(1) *Řada $(*)$ má poloměr konvergence $R = 0$.*

(2) *Řada $(*)$ má poloměr konvergence $R > 0$, ale pro $0 < |x - a| < R$ má „špatný součet“, tj. konverguje k hodnotě různé od $f(x)$.*

Dobrou ilustraci jevu (1) poskytuje pro bod $a = 0$ tento školní příklad: Položme $f(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} \cos(t^2 x)\,\mathrm{d}t$, $x \in \mathbb{R}$. Pak $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ a členy Taylorovy řady o středu 0 jsou tvaru $\pm\bigl((2n)!/n!\bigr)x^n$. Situaci nejlépe ilustruje následující věta; viz [Bo], s. 195: *Je-li $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ zcela libovolná posloupnost reálných čísel, pak existuje $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ taková, že $f^{(n)}(0) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$.*

Školní příklad na jev (2) je funkce $f(x) = \exp(-1/x^2)$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Pak $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ a $f^{(n)}(0) = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Členy Taylorovy řady jsou tedy vesměs nuly, řada má poloměr konvergence $R = \infty$ a její součet je pro každé $x \in \mathbb{R}$ roven 0, zatímco $f(x) > 0$ pro $x \neq 0$. Taylorova řada tak konverguje ke špatnému součtu.

Existuje $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ taková, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ nastává jev (1)? Odpověď je *kladná*, pomocí Baireovy věty lze dokázat, že takovou vlastnost má typická funkce z $C^\infty(\mathbb{R})$; viz [Bo], s. 195.

Příbuzná otázka: *Může se stát, že pro nějakou funkci f má $(*)$ v každém bodě $a \in \mathbb{R}$ kladný poloměr konvergence $R(a)$ a zároveň dává špatný součet pro každý bod $x \in (a - R, a + R) \setminus \{a\}$?* Zde je odpověď *negativní* a plyne z Baireovy věty takto: Nechť $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ a nechť poloměr konvergence $R(a)$ řady $(*)$ je kladný pro všechna $a \in \mathbb{R}$. Víme, že $1/R(a) = \limsup_{n\to\infty} |f^{(n)}(a)/n!|^{1/n}$. Předpokládejme, že $I \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval.

Definujme $\varrho(a) = \sup\{|f^{(n)}(a)/n!|^{1/n};\, n \in \mathbb{N}\}$ a $E_k = \{a \in I;\, \varrho(a) \leqq k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Funkce ϱ je zdola polospojitá, tudíž E_k je uzavřená množina. Protože $R(a) > 0$, kdykoli $a \in I$, je $\varrho(a) < \infty$ pro všechna $a \in I$. Podle Baireovy věty existují $k \in \mathbb{N}$ a otevřený interval $J \subset I$ takové, že $|f^{(n)}(a)/n!|^{1/n} \leqq k$, kdykoli $n \in \mathbb{N}$ a $a \in J$. Pro každé $a \in J$ tudíž zbytek Taylorovy řady $(*)$ konverguje k nule pro každé $x \in J \cap (a - 1/2k,\, a + 1/2k)$, a tedy pro každé $a \in J$ je součet řady $(*)$ roven $f(x)$. Tuto úvahu můžeme opakovat a pro funkci $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ dokázat tuto větu: *Je-li $R(a) > 0$ pro každé $a \in \mathbb{R}$, pak množina bodů $a \in \mathbb{R}$, pro něž Taylorova řada $(*)$ dává v okolí bodu a špatný součet, je řídká.*

2.11. Modul spojitosti

Uvedeme nepříliš známou aplikaci Baireovy věty, vedoucí k důkazu existence spojitých funkcí s pozoruhodnou vlastností. Důkaz lze nalézt v [GoPe]; viz s. 155.

Funkci $m : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ budeme nazývat *přípustnou*, jestliže m je neklesající a je $\lim_{x\to 0+} m(x) = 0$. Nechť $I = [0, 1]$, $f \in C(I)$ a m je přípustná funkce. Říkáme, že m je *modul spojitosti* funkce f, jestliže platí odhad $|f(x) - f(y)| \leqq m(|x-y|)$, $x, y \in I$. Systém funkcí z $C(I)$, pro něž je přípustná funkce m modulem spojitosti, označme $H(m)$. Poznamenejme, že pro každou $f \in C(I)$ existuje přípustná funkce m, pro niž $f \in H(m)$. Platí tato věta: *Nechť m je přípustná funkce. Potom se typická funkce $f \in C(I)$ skoro nikde (vzhledem k Lebesgueově míře) neshoduje s žádnou funkcí z $H(m)$.* Podrobněji: *Množina funkcí $f \in C(I)$, pro něž existuje $g \in H(m)$ taková, že*

$$\lambda\bigl(\{x \in I;\ f(x) = g(x)\}\bigr) > 0,$$

je množina 1. kategorie v $C(I)$.

2.12. Posloupnosti měr

Užitečnou aplikací Baireovy věty o kategoriích překvapil S. Saks ve třicátých letech v důkazu věty, která bývá nyní zpravidla nazývána *Vitaliova-Hahnova-Saksova věta.* Ta je obvykle považována za jeden z nejdůležitějších výsledků v teorii množinových funkcí.

Je-li $(X, \mathcal{A}, \nu)$ prostor s *reálným nábojem*, tedy ν je reálná σ-aditivní funkce na σ-algebře $\mathcal{A}$, definuje se (pseudo)metrika ϱ na $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ přirozeným způsobem: Pro $A, B \in \mathcal{A}$ je $\varrho(A, B) = |\nu|\bigl((B \setminus A) \cup (A \setminus B)\bigr)$, kde $|\nu|$ je variace náboje ν; viz [Ru], s. 135. Po zřejmé faktorizaci je $(\mathcal{A}, \varrho)$ úplný metrický prostor. Baireovu větu užil S. Saks k důkazu tohoto důležitého tvrzení: *Nechť μ_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou reálné náboje na $\mathcal{A}$ a ω je konečná míra na $\mathcal{A}$. Předpokládejme, že μ_n je absolutně spojitý náboj vzhledem k ω pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jestliže pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$ je $\limsup\limits_{n\to\infty} |\mu_n(A)| < \infty$, pak pro totální variace je $\limsup\limits_{n\to\infty} \|\mu_n\| < \infty$ a navíc platí: jestliže pro každé $A \in \mathcal{A}$ existuje konečná $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$, potom μ je reálný náboj a náboje μ_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou stejně absolutně spojité vzhledem k ω.*

2.13. Konvexní geometrie

Konvexním tělesem v $\mathbb{R}^m$ rozumíme kompaktní konvexní množinu s neprázdným vnitřkem. Množinu všech konvexních těles v $\mathbb{R}^m$ označíme $\mathcal{K}$. Přirozená topologie na $\mathcal{K}$ je indukována *Hausdorffovou metrikou*: pro $K, L \in \mathcal{K}$ se definuje

$$\varrho(K, L) = \max\{\sup_{x\in K} \inf_{y \in L} |x-y|,\ \sup_{y\in L} \inf_{x\in K} |x-y|\}.$$

Z *Blaschkeho věty* o výběru plyne, že $\mathcal{K}$ je lokálně kompaktní prostor, tedy je to Baireův prostor. Budeme říkat, že určitou vlastnost má typické konvexní těleso, jestliže tato vlastnost platí pro všechny prvky z $\mathcal{K}$ s výjimkou množiny 1. kategorie.

Existují desítky výsledků popisujících vlastnosti typických konvexních těles; viz [Gr1], [Gr2]. Pro ilustraci zde uvedeme jen tři z nich.

Platí: *Typické konvexní těleso má hladkou hranici* (to znamená, že každým hraničním bodem prochází právě jedna opěrná nadrovina) *a je striktně konvexní*; zobecnění, v němž místo množiny 1. kategorie vystupuje σ-pórovitá množina, dokázal T. Zamfirescu; viz odkaz v [Gr2].

Na otázku o velikosti množiny směrů úseček ležících na hranici konvexního tělesa odpovídá např. toto tvrzení: *Nechť* $K \in \mathcal{K}$ *a* S *je množina jednotkových vektorů rovnoběžných s některou úsečkou ležící na hranici* K. *Potom je* S *v jednotkové sféře podmnožinou 1. kategorie.*

Už víme, že typické konvexní těleso má hladkou hranici. Avšak: *Typické konvexní těleso nemá hranici třídy* C^2. Ve skutečnosti typické konvexní těleso nemá hranici třídy $C^{1+\alpha}$ pro žádné $\alpha > 0$ v „mnoha" hraničních bodech; srv. [KlNe].

Ještě jedna ilustrace. *Biliárovým stolem* budeme rozumět konvexní těleso K s hladkou hranicí. Uvažujeme biliárovou kouli, která se pohybuje jednotkovou rychlostí po přímce v K, dokud nenarazí na hranici K; pak se odrazí známým způsobem. Dráha, po které se od počátečního okamžiku pohybuje, se nazývá trajektorie; ta je tedy sjednocením úseček. Existují biliárové stoly obsahující trajektorie konečné délky. Platí však: *Pro typický biliárový stůl má libovolná trajektorie nekonečnou délku.*

2.14. Další ilustrace

Uvedené aplikace Baireovy věty představují pouze příslovečný vrcholek ledovce tvořeného pracemi věnovanými této problematice. Další aplikace lze nalézt v [Bo], [Gr1], [Gr2], [Cho], [Ku], [Or2], [Pr], [Za4]. Mnoho desítek citací, které jsme shromáždili, nebylo možné do seznamu literatury kvůli rozsahu článku zařadit. A tak jen namátkou s velmi stručnou bibliografickou indikací uveďme pro ilustraci několik témat vztahujících se k problematice článku: absolutně konvergentní Fourierovy řady (Y. Katznelson, 1959), oddělená spojitost (I. Namioka, 1974), ortogonální řady (W. Matuszewska a W. Orlicz, 1959), Baireovy třídy (P. Kiriakouli, 1999), singulární integrální operátory (S. Kaczmarz, 1931), topologické hry (M. R. Krom, 1974; J. Saint-Raymond, 1983; K. Schilling a R. Vaught, 1983), holomorfní funkce, univerzální funkce (K. G. Grosse-Erdmann, 1987, 1999), 13. Hilbertův problém — skládání funkcí (A. G. Vituškin, 1977; J.-P. Kahane, 1980, 2000), metoda integrálních rovnic (J. Král, 1968; I. Netuka, 1971), prostory funkcí (P. Wingren, 1999), diferenciální inkluze (A. Cellina, 1980; G. Pianigiani, 1990), tenké množiny v harmonické analýze (R. Kaufmann, 1993; T. Körner, 1993; J.-P. Kahane, 2000), hyperbolické rovnice (A. Alexiewicz a W. Orlicz, 1956), matematická logika (J. Barwise, 1977), diferenciální rovnice v Banachově prostoru (A. N. Godunov, 1975), funkcionální rovnice (B. Choczewski, 1995), diferencovatelnost konvoluce (V. Jarník, 1936), nestandardní analýza (H. J. Keisler, 1997), Mongeova-Ampèrova rovnice (E. Cator, 1996), multifraktální funkce (S. Jaffard, 2000), teorie dimenze (M. M. Choban a H. Attia, 1991), Hamiltonova-Jacobiho rovnice (B. Dacorogna a P. Marcellini, 1996), fraktální derivace (K. M. Kolwankar a A. D. Gangal, 1996), typické monotónní funkce (T. Zamfirescu, 1981, 1984; F. S. Cater, 1982; Z. Bucolich a J. Nagy, 1999), Fourierovy, Taylorovy a Dirichletovy řady (V. Aversa a A. Olevski, 1993; V. Nestoridis, 1996; J.-P. Kahane, 2000), diferencovatelnost konvexních a lipschitzovských funkcí na Banachových prostorech (D. Preiss a L. Zajíček, 1984; D. Preiss, 1990; R. R. Phelps, 1993; M. Fabian, 1997; J. M. Borwein, W. B. Moors a X. Wang, 1999).

L i t e r a t u r a

[Ba1] Baire, R.: *Sur les fonctions discontinues qui se rattachent aux fonctions continues.* C. R. Acad. Sci. Paris *126* (1898), 1621–1623.

[Ba2] Baire, R.: *Sur les fonctions de variables réelles.* Ann. Math. Pure Appl. *3* (1899), 1–123.

[Ba3] Baire, R.: *Sur la théorie des fonctions discontinues.* C. R. Acad. Sci. Paris *129* (1899), 1010–1013.

[Ba4] Baire, R.: *Leçons sur les fonctions discontinues.* Gauthier-Villars, Paris 1905.

[Ba5] Baire, R.: *Projet de calandrier mensuel fixe.* Revue Scientifique *59* (1921), 233–240.

[Ba6] Baire, R.: *Sur l'origine de la notion de semi-continuité.* Bull. Soc. Math. France *55* (1927), 141–142.

[Ba7] Baire, R.: *Oeuvres scientifiques* (P. Lelong, ed.). Gauthier-Villars, Paris 1990.

[BaSt] Banach, S., Steinhaus, H.: *Sur le principe de la condensation de singularités.* Fund. Math. *9* (1927), 50–59.

[Bo] Boas, R. P.: *A primer of real functions.* Mathematical Association of America, Washington, D. C. 1981.

[Br] Bruckner, A. M.: *Differentiation of Real Functions.* Amer. Math. Soc., Providence, RI 1994.

[Da] Dauben J. W.: *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite.* Princeton University Press, Princeton NJ 1990.

[DeG] De Guzmán, M.: *Differentiation of integrals in* $\mathbb{R}^n$*.* Lecture Notes in Mathematics 481, Springer, Berlin 1975.

[Du] Dugac, P.: *Sur les fondaments de l'analyse de Cauchy à Baire.* Thèse pour obtenir le grade de Docteur ès Science, l'Université Pierre et Marie Curie, Paris 1978.

[Ga] Garg, K. M.: *On a residual set of continuous functions.* Czech. Math. Journal *95* (1970), 537–543.

[GoPe] Goffman, C., Pedrick, G.: *First course in functional analysis.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. 1965.

[Gr1] Gruber, P. M. : *Results of Baire category type in convexity* (Goodman, J. E., ed.). In: *Discrete geometry and convexity*, Ann. New York Acad. Sci., 440, New York Acad. Sci., New York 1985, s. 163–169.

[Gr2] Gruber, P. M.: *Baire categories in convexity.* In: *Handbook of Convex Geometry, Vol. A, B* (Gruber, P. M., Wills, J. M., eds.). North-Holland, Amsterdam 1993, s. 1327–1346.

[Cho] Choquet, G., Marsden, J., Lance, T., Gelbart, S. eds.: *Lectures on analysis, vol I.–III.* W. A. Benjamin, New York 1969.

[JeKr] Jelínek, J., Král, J.: *Note on sequences of integrable functions.* Czech. Math. Journal *13* (1963), 114–126.

[KaSt] Katznelson, Y., Stromberg, K.: *Everywhere differentiable, nowhere monotone functions.* Amer. Math. Monthly *81* (1974), 349–354.

[KiSz] Kierst, S., Szpilrajn, E.: *Sur certaines singularités des fonctions analytiques uniformes.* Fund. Math. *14* (1933), 276–294.

[KlNe] Klíma, V., Netuka, I.: *Smoothness of a typical convex function.* Czech. Math. Journal *31* (1981), 569–572.

[KNV] Král, J., Netuka, I., Veselý, J.: *Teorie potenciálu II.* SPN, Praha 1972.

[Ku] Kuratowski, K.: *Some remarks on the origins of the theory of functions of a real variable and of the descriptive set theory.* Rocky Mountain J. Math. *10* (1980), 25–33.

[Le] Lebesgue, H.: *Recherches sur la convergence des séries de Fourier.* Math. Ann. *61* (1905), 251–280.

[Ma] Malý, J.: *Where the continuous functions without unilateral derivatives are typical.* Trans. Amer. Math. Soc. *283* (1984), 169–175.

[Me1] Medvedev, F. A.: *Očerki istorii teorii funkcij dějstvitělnogo peremennogo.* Nauka, Moskva 1975.

[Me2] Medvedev, F. A.: *Francuzskaja škola teorii funkcij i množestv na ruběže 19.–20. vekov.* Nauka, Moskva 1976.

[NeVe] Netuka, I., Veselý, J.: *Harmonic continuation and removable singularities in the axiomatic potential theory.* Math. Ann. *234* (1978), 117–123.

[Or1] Orlicz, W.: *Z teorji równania różniczkowego $y' = f(x, y)$ — Zur Theorie der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$.* Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Sér. A (1932), 221–228.

[Or2] Orlicz, W.: *Metoda kategorii Baire'a w zastosowaniu do pewnych zagadnień analizy matematycznej.* Wiadom. Mat., Roczniki PTM, Ser. II (1982), 1–15.

[Os] Osgood, W.: *Non uniform convergence and the integration of series term by term.* Amer. J. Math. *19* (1897), 155–190.

[Ox] Oxtoby, J. C.: *Measure and category: a survey of the analogies between topological and measure spaces.* Springer, New York 1980.

[Pi] Pier, J.-P. ed.: *Development of mathematics 1900–1950.* Birkhäuser Verlag, Basel 1994.

[Pr] Preiss, D.: *The work of Professor Jarník in real analysis.* In: *Life and work of Vojtěch Jarník (1897–1970)*, Novák, B. ed., Prometheus, Praha 1999, s. 55–65.

[PrZa] Preiss, D., Zajíček, L.: *On Dini and aproximate Dini derivates of typical continuous functions.* KMA Preprint Ser. 1999-13, Charles University, Praha (URL adresa: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kma/kma.html`).

[Re] Renfro, D. L.: *Some supertypical nowhere differentiability results for $C[0,1]$.* Ph. D. Thesis. N. Carolina State Univ., Raleigh, NC 1993.

[Ru] Rudin, W.: *Analýza v reálném a komplexním oboru.* Academia, Praha 1977.

[Sa1] Saks, S.: *On the functions of Besicovitch in the space of continuous functions.* Fund. Math. *19* (1932), 211–219.

[Sa2] Saks, S.: *Remark on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral.* Fund. Math. *22* (1934), 257–261.

[Vo] Volterra, V.: *Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue.* Giornali di Math. *19* (1881), 76–86.

[We] Weil, C. E.: *On nowhere monotone functions.* Proc. Amer. Math. Soc. *56* (1976), 388–389.

[Za1] Zajíček, L.: *The differentiability structure of typical functions in $C[0,1]$.* Real Anal. Exchange *13* (1987/88), 93, 113–116, 119.

[Za2] Zajíček, L.: *Porosity and σ-porosity.* Real Anal. Exchange *13* (1987/88), 314–350.

[Za3] Zajíček, L.: *Porosity, derived numbers and knot points of typical continuous functions.* Czech. Math. Journal *39* (1989), 45–52.

[Za4] Zajíček, L.: *Differentiability properties of typical continuous functions.* Real Anal. Exchange *25* (1999/00), 149–158.