Luděk Zajíček

Obecná teorie derivování funkcí a měr na katedře matematické analýzy MFF UK

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 45 (2000), No. 3, 188--207

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141037`

Obecná teorie derivování funkcí a měr na katedře matematické analýzy MFF UK

Luděk Zajíček, Praha

1. Úvod

K teorii derivování podstatně přispěl svými pracemi, zejména ve třicátých letech, prof. V. Jarník a stal se tak zakladatelem tradice této disciplíny na Univerzitě Karlově. (S jeho výsledky v této problematice je možno se seznámit v [Pr9].) Na katedře matematické analýzy Matematicko-fyzikální fakulty UK (dále jen KMA) vzniklo okolo stovky prací o teorii derivování, z nichž řada přímo navázala na Jarníkovy práce. V tomto článku se pokusím vysvětlit některé z výsledků patřících do teorie derivování, které (částečně) vznikly na KMA od r. 1970. Mezi ně patří nejen výsledky D. Preisse (na KMA v letech 1970–1990, pak na University College London), z nichž řada nepochybně patří k vůbec nejcennějším příspěvkům k teorii derivování, ale i výsledky dalších pracovníků a bývalých studentů.

O výsledcích, které se týkají derivování funkcí jedné proměnné, je pojednáno v následující 2. části; funkcím více proměnných a funkcím na Banachových prostorech je věnována 3. část článku. Ve 4. části popíši některé výsledky o derivování měr. O řadě dalších prací (ale zdaleka ne o všech) se jen zmíním; pak uvádím zpravidla jen číslo recenze v Mathematical Reviews. Odkazy na práce, které (alespoň částečně) vznikly na KMA, budou uváděny tučně (např. [**LMZ**]).

2. Derivování reálných funkcí reálné proměnné

Pro jednoduchost budeme v této části uvažovat pouze reálné funkce definované na celé reálné přímce.

2.1. Některá fakta z teorie derivací

Připomeňme, že funkce f se nazývá derivací, existuje-li funkce F taková, že $F'(x) = f(x)$ v každém bodě $x \in \mathbb{R}$. Množinu všech derivací budeme označovat symbolem $\mathcal{D}$. Teorií derivací (v užším smyslu) se rozumí teorie, která zkoumá vlastnosti

---

Prof. RNDr. Luděk Zajíček, DrSc. (1947), katedra matematické analýzy MFF UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: `zajicek@karlin.mff.cuni.cz`

Napsáno za podpory grantů GAČR 201/94/0069 a MSM 113200007.

množiny $\mathcal{D}$ a jejích prvků. V tomto odstavci se zmíním alespoň o některých základních faktech této teorie (s níž se lze seznámit v [Br]).

Ze základního kurzu analýzy je známo, že každá spojitá funkce je derivací (její neurčitý Riemannův integrál je její primitivní funkcí), ale ne každá derivace je spojitá. Klasickým příkladem nespojité derivace je funkce $f(x) = \cos(1/x)$, $f(0) = 0$. Dokonce existuje (omezená) derivace, která je ve skoro všech bodech (ve smyslu Lebesgueovy míry) nespojitá. Také existují (tzv. köpckeovské) derivace, které na každém intervalu mění znaménko! (O elementárních konstrukcích takových funkcí pojednává studentská práce [**BBM**].)

Na druhé straně jsou derivace v některých ohledech podobné spojitým funkcím. Již Darboux r. 1875 dokázal, že každá derivace má jednu ze základních vlastností spojitých funkcí — totiž *Darbouxovu vlastnost* (vlastnost nabývání mezihodnot). Dále: je-li f derivace a F její primitivní funkce, lze psát

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} n\big(F(x + 1/n) - F(x)\big),$$

takže vidíme, že f je (bodovou) limitou posloupnosti spojitých funkcí (jinými slovy: f patří do systému B_1 funkcí *první Baireovy třídy*). Funkce první Baireovy třídy jsou blízké spojitým funkcím nejen podle své definice, ale také tím, že pro každou funkci $f \in B_1$ je její množina bodů nespojitosti „zanedbatelná v topologickém smyslu" (tj. je to množina první kategorie — sjednocení spočetně mnoha řídkých množin). Speciálně je každá $f \in B_1$, a tedy i každá derivace, spojitá v bodech husté nespočetné množiny.

Pojem spojitosti byl zobecňován mnoha různými způsoby. Jak ukázal A. Denjoy již r. 1915, v teorii derivací má zásadní význam pojem aproximativní spojitosti, definovaný takto:

Funkce f je *aproximativně spojitá*, jestliže pro každý bod $x \in \mathbb{R}$ existuje měřitelná množina E taková, že $\lim\limits_{\substack{y\to x\\ y\in E}} f(y) = f(x)$ a x je bodem hustoty množiny E, tj.

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{2h}\,\lambda\big(E \cap (x-h, x+h)\big) = 1,$$

kde λ je Lebesgueova míra.

Není těžké dokázat, že každá omezená aproximativně spojitá funkce je derivací (svého neurčitého Lebesgueova integrálu). Platí tedy důležité inkluze

$$bC_{\mathrm{ap}} \subset \mathcal{D} \subset DB_1,$$

kde DB_1 označuje systém všech darbouxovských funkcí první Baireovy třídy a bC_{ap} je systém všech omezených aproximativně spojitých funkcí.

Přitom je velmi důležitá skutečnost, že pro konstrukci aproximativně spojitých funkcí lze použít metody známé z topologie, což vzhledem k inkluzi $bC_{\mathrm{ap}} \subset \mathcal{D}$ dává široké možnosti pro konstrukce derivací s předepsanými vlastnostmi. K rozvinutí této topologické metody v teorii derivací přispěli hlavně A. Denjoy, A. J. Ward (1933) a Z. Zahorski (1950, [Zh]). S její podstatou a některými aplikacemi se lze seznámit např. v monografii J. Lukeše, J. Malého a L. Zajíčka [**LMZ**], která obsahuje i několik nových výsledků z teorie derivací.

Velmi přirozený, starý a zajímavý je *„problém (úplné) charakterizace derivací“* (srov. [Br], kap. 7).

V současné době se však všeobecně soudí, že tento (nepřesně formulovaný) problém nemá uspokojivé řešení. Převládá totiž názor, že nelze nalézt „jednoduchou“ charakterizaci derivací, která by „nebyla tautologií“. Některé (přesné) argumenty pro podporu této (nepřesně formulované) teze lze nalézt například ve [Fr].

Není ale těžké dokázat, že derivace nelze charakterizovat pomocí úrovňových množin, tj. množin tvaru $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$ a $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < \alpha\}$. Přesněji: neexistuje systém $\mathcal{M}$ podmnožin $\mathbb{R}$, pro který by platila ekvivalence

$$f \in \mathcal{D} \iff \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}, \quad \{x \in \mathbb{R} : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{M} \quad \text{pro každé } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Přitom pro třídu DB_1 i třídu C_{ap} všech aproximativně spojitých funkcí charakterizace pomocí úrovňových množin existují.

2.2. Úrovňové množiny derivací

Asi nejznámější práci [Zh] o teorii derivací napsal polský matematik Zahorski r. 1950. V ní se mu mj. podařilo charakterizovat systém úrovňových množin omezených derivací; tedy systém množin A, které jsou tvaru $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$, kde f je omezená derivace a $\alpha \in \mathbb{R}$. Tato charakterizace je dosti složitá, ale jde o „vnitřní charakterizaci“, ve které se vůbec nehovoří o derivacích, ale jen o standardních „množinových vlastnostech“ množiny A. (Tuto Zahorského charakterizaci se podařilo formálně zjednodušit ve studentské práci M. Zlonické, srov. [**Zj5**] a [Br], str. 171.)

Podobnou — ale ještě podstatně složitější — charakterizaci úrovňových množin všech (i neomezených) derivací podal až r. 1982 D. Preiss ve významné práci [**Pr4**].

2.3. Maximovova věta

Velmi zajímavou větou patřící do teorie derivací je Maximovova věta, která ukazuje, že systémy $\mathcal{D}$ derivací a DB_1 darbouxovských funkcí první Baireovy třídy jsou si v jistém smyslu velmi blízké. Pro každou funkci $g \in DB_1$ totiž existuje homeomorfismus $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takový, že $g \circ h \in \mathcal{D}$ (dokonce $g \circ h \in \mathcal{D} \cap C_{\mathrm{ap}}$). Tuto větu publikoval I. Maximov [Max] r. 1940 s důkazem, o jehož korektnosti se pochybuje (srov. [Br], str. 169). Zcela jasný důkaz Maximovovy věty podal až D. Preiss [**Pr2**] r. 1979. Poznamenejme ještě, že speciální případ, kdy funkce g z Maximovovy věty je polospojitá, dokázal G. Choquet [Ch] r. 1947 (nezávisle na Maximovovi). (Na Preissovu práci navázala diplomová práce V. Kelara (viz [**Ke**]) a také článek L. Zajíčka z r. 1994 [**MR 96d:26015**].)

2.4. Algebra generovaná derivacemi

Je zřejmé, že systém $\mathcal{D}$ všech derivací tvoří vektorový prostor. Není však uzavřený na násobení, takže netvoří algebru. Například pro derivaci $f(x) = \cos(1/x)$, $f(0) = 0$, není těžké dokázat, že f^2 není derivace (W. Wilcosz, 1921). Vznikají tedy přirozené otázky: *Které funkce lze vyjádřit jako součin dvou* (*nebo konečně mnoha*) *derivací? Lze jednoduše popsat algebru* $\mathrm{Alg}(\mathcal{D})$ *generovanou systémem všech derivací?*

Otázkami tohoto typu se podrobně zabývali například S. J. Agronsky, R. Biskner, A. M. Bruckner a J. Mařík v [ABBM] (s řadou výsledků J. Maříka týkajících se podobných otázek se lze seznámit v [**Zj8**]). V článku [ABBM] autoři vyslovili domněnku, že $\mathrm{Alg}(\mathcal{D}) = B_1$, a že snad dokonce každou $f \in B_1$ lze vyjádřit ve formě

$$f = g' + h'k' \quad (g', h', k' \in \mathcal{D}).$$

Tuto domněnku se podařilo D. Preissovi dokázat ve známé práci [**Pr5**].

2.5. Analogie Denjoyovy-Youngovy-Saksovy věty

Výsledky tohoto odstavce se týkají zobecněných derivací. Pro případ reálných funkcí reálné proměnné mezi klasické a nepochybně velmi důležité zobecněné derivace patří Diniho a aproximativní derivace.

Diniho (jednostranné) derivace jsou definovány takto:

$$D^+f(x) = \limsup_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad D_+f(x) = \liminf_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$
$$D^-f(x) = \limsup_{h\to 0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad D_-f(x) = \liminf_{h\to 0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Číslo $d \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ se nazývá aproximativní derivací funkce f v bodě a (píšeme $f'_{\mathrm{ap}}(a) = d$), existuje-li měřitelná množina $E \subset \mathbb{R}$, která má bod a za bod hustoty a pro kterou

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = d.$$

Kombinací myšlenek obou definic se definují aproximativní Diniho derivace.

Mezi klasické výsledky teorie reálných funkcí patří Denjoyova-Youngova-Saksova věta (srov. [S2], [Br], [Th1]), která udává „nejsilnější vztahy“ mezi čtyřmi Diniho derivacemi, které platí pro libovolnou funkci ve skoro všech bodech (ve smyslu Lebesgueovy míry).

Analogie Denjoyovy-Youngovy-Saksovy věty, ve které se tvrdí, že „výjimečná množina“ je nejen míry nula, ale je dokonce *σ-pórovitá*, byla dokázána nezávisle v [**Zj2**] a [BCEH].

Zde je vhodné krátce pojednat o pojmu pórovitosti a σ-pórovitosti. Pojem pórovitosti (množiny v bodě) se v teorii derivování vyskytuje přirozeně v řadě různých problémů a byl použit (pod různými názvy nebo bez názvu) v řadě prací (počínaje asi r. 1920). Pojem σ-pórovité množiny byl zaveden E. P. Dolženkem r. 1967 v teorii hraničního chování funkcí jako „prostředek k měření velikosti“ výjimečných množin. Každá σ-pórovitá množina má Lebesgueovu míru nula (je zanedbatelná v „metrickém smyslu“) a je také první kategorie (je zanedbatelná v „topologickém smyslu“). Na druhé straně existuje množina $F \subset \mathbb{R}$, která je uzavřená a řídká (a tedy první kategorie), má nulovou Lebesgueovu míru, a přesto není σ-pórovitá. (Tento fakt byl vysloven Dolženkem bez důkazu; první publikovaný důkaz je v práci L. Zajíčka [**MR 56:15935**] z r. 1976, kde je pojem σ-pórovité množiny poprvé podrobně vyšetřován.) Dolženko přitom ukázal, že některé přirozené výjimečné množiny z teorie hraničního chování funkcí komplexní proměnné jsou σ-pórovité a σ-pórovitost je dokonce nejsilnější pojem, ve kterém jsou malé. V teorii derivování byl pojem σ-pórovitosti poprvé užit v [BEH]; další informace lze nalézt v [Th1] nebo v přehledném článku o pórovitosti a σ-pórovitosti [**Zj3**]. Zatím nejhlubší výsledky o σ-pórovitých množinách jsou dokázány v [**ZP**].

Zmíněná „σ-pórovitá analogie“ Denjoyovy-Youngovy-Saksovy věty tvrdí toto:

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je libovolná funkce. Pak existuje σ-pórovitá množina A taková, že pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus A$ platí aspoň jeden z následujících vztahů:

(i) $D^+f(x) = D^-f(x)$ a $D_+f(x) = D_-f(x)$,

(ii) $D_-f(x) = -\infty$, $D^+f(x) = \infty$ a $D_+f(x) \leqq D^-f(x)$,

(iii) $D_+f(x) = -\infty$, $D^-f(x) = \infty$ a $D_-f(x) \leqq D^+f(x)$.

Přitom je v [**Zj2**] také dokázáno, že (i), (ii), (iii) dávají dokonce „nejsilnější vlastnost“, kterou mají Diniho derivace libovolných funkcí ve všech bodech s možnou výjimkou bodů nějaké množiny *první kategorie*.

Velmi podobné výsledky pak byly dokázány v [**PZ1**] i pro aproximativní Diniho derivace. V tomto případě však v podmínkách (ii) a (iii) nefigurují závěrečné nerovnosti a důkazy jsou podstatně složitější.

2.6. Vztah symetrické a obyčejné derivace

Pojem symetrické derivace není již tak důležitý jako pojmy Diniho a aproximativní derivace, ale je to také klasický pojem přirozeně motivovaný teorií trigonometrických řad (srov. [Th2]). Symetrická derivace funkce f v bodě x je definována takto:

$$f'_s(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Píšeme-li místo limity limes superior, resp. limes inferior, dostáváme definice $D^s f(x)$ a $D_s f(x)$ — horní a dolní symetrické derivace funkce f v bodě x.

Klasickým výsledkem o souvislosti symetrické a obyčejné derivace je Chinčinův výsledek z r. 1927:

Nechť f je měřitelná funkce. Pak f má konečnou derivaci ve skoro všech bodech, ve kterých $D^s f(x) < \infty$.

Zaveďme ještě následující značení. Nechť D_f a D_f^* jsou množiny bodů, ve kterých f má konečnou derivaci, resp. derivaci z $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, a nechť SD_f a SD_f^* jsou množiny bodů, ve kterých f má konečnou symetrickou derivaci, resp. symetrickou derivaci z $\mathbb{R}^*$. Z Chinčinova výsledku okamžitě dostáváme:

Je-li f měřitelná funkce, pak $SD_f \setminus D_f$ má Lebesgueovu míru nula.

Na Chinčinovu větu úspěšně navázal M. Uher v pracích [**U1**] a [**U2**], které vycházejí z jeho diplomové práce vedené D. Preissem. Zjednodušená verze (viz [Th2] pro úplné znění) známého Uhrova výsledku, ve kterém se *nepředpokládá měřitelnost* funkce f a připouštějí se i *nekonečné* derivace, tvrdí toto ($\overline{D}f(x) = \max(D^+f(x), D^-f(x))$ je horní Diniho derivace f v x):

Nechť f je libovolná funkce. Pak každá borelovská podmnožina množiny $\{x : D^s f(x) \neq \overline{D}f(x)\}$ má Lebesgueovu míru nula a je první kategorie a také každá borelovská podmnožina množiny $SD_f^* \setminus D_f^*$ má míru nula a je první kategorie.

O množině $SD_f \setminus D_f$ lze někdy říci podstatně více. C. L. Belna, M. J. Evans a P. Humke [BEH] například dokázali, že $SD_f \setminus D_f$ je σ-pórovitá množina, pokud je f spojitá nebo $SD_f = \mathbb{R}$ (tj. f je symetricky diferencovatelná funkce). Na druhé straně J. Foran [Fo] sestrojil příklad spojité symetricky diferencovatelné funkce, pro kterou je $SD_f \setminus D_f$ $(= \mathbb{R} \setminus D_f)$ nespočetná množina. Stále se ale neví, v jakém nejsilnějším smyslu je množina $SD_f \setminus D_f$ malá (pro spojitou nebo symetricky diferencovatelnou f). Nyní se zdá, že pokud tento problém má jednoduché řešení, bude v něm užito pojmu *symetrická pórovitost.* V [**MR 94k:26009**] z r. 1993 L. Zajíček totiž ukázal, že výsledek [BEH] lze zesílit tvrzením, že $SD_f \setminus D_f$ je dokonce σ-symetricky pórovitá množina. Hlavní výsledek práce [**Zj7**] přitom říká, že pro každou množinu A, která je spočetným sjednocením uzavřených symetricky pórovitých množin, existuje spojitá symetricky diferencovatelná funkce f, pro kterou $A = \mathbb{R} \setminus D_f$.

2.7. Diferencovatelnost typických spojitých funkcí

Uvažujme prostor $C[0,1]$ všech spojitých funkcí na intervalu $[0,1]$ opatřený supremovou metrikou (tj. „metrikou stejnoměrné konvergence“). Podle dnes běžně používané terminologie znamená výrok „typická $f \in C[0,1]$ má vlastnost V“ to, že „většina funkcí z $C[0,1]$ v topologickém smyslu“ má tuto vlastnost, což je totéž, že množina $\{f \in C[0,1] : f \text{ nemá vlastnost } V\}$ je první kategorie.

Pokud jsme dokázali, že typická $f \in C[0,1]$ má vlastnost V, víme, že *existuje* $f \in C[0,1]$ s vlastností V (to plyne z Baireovy věty: $C[0,1]$ je úplný prostor, a proto je v něm doplněk množiny první kategorie neprázdná — dokonce hustá — množina). Žádnou funkci s vlastností V jsme sice nesestrojili, ale dokázali jsme její existenci tzv. „Baireovou metodou kategorií“ (zde sice hovoříme jen o $C[0,1]$, ale metoda se často používá i v jiných úplných metrických prostorech). Tato nekonstruktivní metoda důkazů existence má tyto výhody:

a) Důkaz existence Baireovou metodou kategorií bývá často jednodušší než explicitní konstrukce.

b) Dokážeme-li prvně Baireovou metodou kategorií existenci objektu s vlastností V_1 a posléze stejnou metodou existenci objektu s vlastností V_2, můžeme tvrdit, že existuje objekt, který má obě vlastnosti — V_1 i V_2. To vyplývá z toho, že sjednocení dvou množin první kategorie je opět množina první kategorie (úvaha je ovšem správná i pro spočetně mnoho vlastností).

Již r. 1872 K. Weierstrass (konstruktivně) dokázal existenci $f \in C[0,1]$, která nemá v žádném bodě derivaci. S. Banach a S. Mazurkiewicz r. 1931 ukázali, že existenci takové funkce lze snadno zdůvodnit Baireovou metodou kategorií — dokázali, že typická $f \in C[0,1]$ nemá v žádném bodě derivaci. Těmito pracemi započal výzkum derivačních vlastností typických spojitých funkcí, ke kterému podstatně přispěl několika pracemi V. Jarník (srov. [**Pr9**]). Pokud jde o Diniho derivace typických spojitých funkcí, výsledky Banacha, Mazurkiewicze a Jarníka mohou být formulovány v následující větě:

Pro typickou $f \in C[0,1]$ v každém bodě $x \in (0,1)$ nastává aspoň jedna z těchto dvou možností:

(a) $D^+f(x) = \infty,\ \ D_-f(x) = -\infty$ a $D_+f(x) \leqq D^-f(x)$;
(b) $D_+f(x) = -\infty,\ \ D^-f(x) = \infty$ a $D_-f(x) \leqq D^+f(x)$.

D. Preiss před téměř dvaceti lety dokázal (ale výsledek nepublikoval), že tato věta dává nejsilnější vztahy, které platí mezi Diniho derivacemi typických spojitých funkcí v každém bodě (důkaz lze nalézt v [**PZ3**]). Platí dokonce (srov. [**Zj4**], [**Zj9**]), že typická spojitá funkce f má následující vlastnost:

Předepíšeme-li libovolně hodnoty čtyř Diniho derivací tak, že „platí (a) nebo (b)“, pak existuje $x \in (0,1)$, ve kterém $D^+f(x)$, $D^-f(x)$, $D_+f(x)$, $D_-f(x)$ mají tyto předepsané hodnoty.

Nalezneme tedy např. x, že $D^+f(x) = \infty,\ D^-f(x) = 1,\ D_+f(x) = -1,\ D_-f(x) = -\infty$, a také x^*, ve kterém $D^+f(x^*) = D_+f(x^*) = D^-f(x^*) = \infty,\ D_-f(x^*) = -\infty$. Předchozí tvrzení o x^* není nové — je to v podstatě slavný Saksův [S1] výsledek z r. 1932, o kterém ještě bude řeč.

Platí také (srov. [**PZ3**], [**Zj9**]) přesné analogie pro aproximativní Diniho derivace všech zmíněných výsledků. Další blízké výsledky lze nalézt v článcích L. Zajíčka z r. 1989 [**MR 90j:26007**] a 1993 [**MR 95f:26007**].

Známý Jarníkův výsledek z r. 1934 říká, že typická $f \in C[0,1]$ nemá v žádném bodě $x \in (0,1)$ aproximativní derivaci (ani nekonečnou). Zeslabením pojmu aproximativní derivace je pojem tzv. preponderantní derivace, přičemž se v literatuře vyskytuje několik mírně odlišných definic tohoto pojmu. Z Jarníkových výsledků snadno vyplývá, že typická $f \in C[0,1]$ nemá v žádném bodě $x \in (0,1)$ dokonce ani preponderantní derivaci, uvažujeme-li *silnou definici* preponderantní derivace. V práci [**Zj6**] je dokázáno, že pro *slabou definici* preponderantní derivace je situace odlišná: typická $f \in C[0,1]$ má v bodech x nespočetné husté množiny *slabou* preponderantní derivaci $f'_{\mathrm{pr}}(x) = \infty$.

Na KMA byly studovány také derivační vlastnosti funkcí $f \in C[0,1]$, které jsou „typické ve smyslu míry“. Práce J. Koláře [**Ko**] podstatně zlepšuje výsledky B. R. Hunta [Hu]. S dosud nepublikovanými výsledky P. Holického a L. Zajíčka je možno se seznámit v [**Zj9**].

2.8. Funkce Besicovitchova typu

Již zmíněný slavný Saksův výsledek lze formulovat jako tvrzení, že typická spojitá funkce není funkcí Besicovitchova typu. Připomeňme, že Besicovitch r. 1925 publikoval dosti složitou konstrukci funkce $f \in C[0,1]$, která nemá v žádném bodě $x \in [0,1]$ jednostrannou derivaci (ani zprava, ani zleva), přičemž — a to je podstatné — se připouštějí i derivace nekonečné. Funkce s touto vlastností se proto nazývají Besicovitchova typu; v jistém smyslu jde o „extrémně nediferencovatelné“ funkce.

Protože výsledky Banacha a Mazurkiewicze ukazovaly, že typické spojité funkce jsou „velmi nediferencovatelné“, byl Saksův výsledek dosti neočekávaný. (K tomu poznamenejme, že D. Preiss dokázal — ale nepublikoval — (srov. [**Zj4**], str. 103 a *důkaz* lemmatu 3.2.1. z [Br]), že každá funkce Besicovitchova typu má konečnou aproximativní derivaci v bodech množiny kladné míry, takže je v tomto smyslu „dosti diferencovatelná“.) Saksův výsledek byl často interpretován tak, že existenci funkce Besicovitchova typu nelze dokázat Baireovou metodou kategorií.

Značnou pozornost proto vzbudila práce J. Malého [**Mal2**], kde je takový důkaz Baireovou metodou kategorií podán — ne ovšem v prostoru $C[0,1]$, ale v jeho uzavřeném metrickém podprostoru, který není lineární a je sestrojen speciálně pro tento účel.

2.9. Jarníkovské body

Bod x je jarníkovským bodem funkce f, jestliže aproximativní limita absolutní hodnoty jejího derivačního podílu v bodě x je ∞:

$$\operatorname*{ap-lim}_{t\to x}\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right| = \infty.$$

Jarník r. 1934 sestrojil borelovsky měřitelnou funkci (druhé Baireovy třídy), pro kterou jsou všechny body jarníkovské, a spojitou funkci, pro kterou jsou skoro všechny body jarníkovské. To byly dosti překvapivé výsledky (srov. [S1], str. 297), protože bylo známo, že jak množina

$$\left\{x : \operatorname*{ap-lim}_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \infty\right\},$$

tak množina

$$\left\{x : \lim_{t\to x}\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right| = \infty\right\}$$

má Lebesgueovu míru nula pro *každou funkci.* Jarník tedy ukázal, že neplatí přirozené společné zobecnění obou uvedených tvrzení.

To, že existuje *spojitá* funkce, pro kterou je *každý* bod jarníkovský, bylo poprvé dokázáno v teorii náhodných procesů: S. M. Berman [Be] r. 1970 dokázal, že trajektorie jednorozměrného Brownova pohybu je takovou funkcí s pravděpodobností 1. (Tím byl podán nekonstruktivní důkaz existence takové spojité funkce „pravděpodobnostní metodou“, která je analogická již zmíněné Baireově metodě kategorií. Až poté byla v práci [**MZ**] podána jednoduchá explicitní konstrukce takové funkce.)

Bermanův výsledek říká, že pro „typickou $f \in C[0,1]$ ve smyslu Wienerovy míry“ je každý bod jarníkovský; z Jarníkových výsledků však vyplývá, že pro typickou funkci $f \in C[0,1]$ ve smyslu kategorie má množina J_f jejích jarníkovských bodů míru nula. Hlavní výsledek práce [**MZ**] přesto tvrdí, že pro typickou $f \in C[0,1]$ ve smyslu kategorie je množina J_f hustá a nespočetná.

2.10. Některé další výsledky

Zajímavé výsledky patřící do teorie derivací obsahují práce D. Preisse z r. 1969 [**MR 40:4397**], D. Preisse a J. Vilímovského z r. 1980 [**MR 82b:54022**] a D. Preisse a V. Šveráka [**PŠ**].

Pojem aproximativní derivace je vyšetřován v článcích D. Preisse z r. 1971 [**MR 44:4158**] a L. Zajíčka z r. 1973 [**MR 48:2322**] a r. 1981 [**MR 82m:26004**].

Výsledky o preponderantních derivacích (a další zajímavé výsledky) lze nalézt v práci [**MPZ**]; výsledky z diplomové práce K. Pekára o těchto derivacích jsou popsány v článku [**Zj5**].

Poznámka P. Holického z r. 1973 [**MR 48:4219**] se týká diferencovatelných restrikcí libovolných funkcí.

Elementární důkaz jednorozměrné Rademacherovy věty uveřejnil L. Zajíček r. 1992 [**MR 93b:26008**].

3. Derivování funkcí více proměnných a funkcí na Banachových prostorech

3.1. Diferencovatelnost lipschitzovských funkcí

Připomeňme, že reálná funkce f na metrickém prostoru (P, ϱ) se nazývá lipschitzovská, jestliže existuje $K > 0$ takové, že $|f(x) - f(y)| \leqq K\varrho(x,y)$, kdykoliv $x, y \in P$. V analýze má velký význam Rademacherova věta z r. 1919:

Každá lipschitzovská funkce $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je fréchetovsky diferencovatelná (tj. má totální diferenciál) ve skoro všech bodech.

V 70. letech Rademacherovu větu zobecnili na případ lipschitzovských funkcí na separabilním Banachově prostoru nezávisle P. Mankiewicz, J. P. R. Christensen a N. Aronszajn (srov. [BL]).

V příslušných větách je však použit pojem *Gâteauxovy derivace*, který je slabší než pojem Fréchetovy derivace (pro lipschitzovské funkce na konečně-rozměrném prostoru tyto dva pojmy derivace splývají). Protože v žádném nekonečně-rozměrném Banachově prostoru neexistuje přirozené zobecnění Lebesgueovy míry (neexistuje tam „rozumná“ translačně invariantní míra), každý ze tří jmenovaných autorů definoval (každý jiným způsobem) pouze pojem „nulové množiny“. Zatím nejsilnější pojem

„nulových množin“, při kterém platí nekonečně-rozměrná Rademacherova věta, byl nalezen v práci [**PZ4**].

Doposud nejhlubšího výsledku v teorii diferencovatelnosti lipschitzovských funkcí dosáhl D. Preiss ve své práci [**Pr8**] z r. 1990. Věta má zajímavou historii. V řadě prací se vyskytovalo tvrzení, že na separabilním Hilbertově prostoru existuje lipschitzovská funkce, která není fréchetovsky diferencovatelná v žádném bodě. R. R. Phelps však r. 1979 zjistil, že ve všech případech šlo o chybné příklady nebo odkazy. Nebylo tedy jasné, zda uvedené tvrzení vůbec platí. Vzniklým problémem se D. Preiss zabýval v pracích [**MR 84h:46054**] z r. 1982 a [**MR 85k:46051**] z r. 1984. Ve známé práci [**Pr8**] se mu pak podařilo dokázat tuto hlubokou větu:

Reálná lipschitzovská funkce na Asplundově Banachově prostoru je fréchetovsky diferencovatelná v bodech husté nespočetné množiny.

(Poznamenejme, že v rámci separabilních prostorů jsou Asplundovými právě ty Banachovy prostory X, které mají separabilní duální prostor X^*, takže např. separabilní Hilbertův prostor je Asplundův.)

V Preissově větě se ale netvrdí, že by f měla Fréchetovu derivaci „skoro všude“ v nějakém smyslu (je stále důležitým otevřeným problémem, zda nějaký takový smysl malosti existuje). Proto také není známo, zda každé lipschitzovské zobrazení $F : X \to \mathbb{R}^n$ (kde X je Asplundův prostor) má Fréchetovu derivaci aspoň v jednom bodě.

Významná Preissova práce [**Pr8**] však obsahuje ještě další zajímavé výsledky. Jedním z nich je výsledek o *gâteauxovské diferencovatelnosti* lipschitzovské funkce f na *neseparabilním* Banachově prostoru:

Jestliže X má gâteauxovsky hladkou normu (mimo počátek), pak f je gâteauxovsky diferencovatelná v bodech husté nespočetné množiny.

Dalším zajímavým výsledkem je důkaz toho, že Rademacherovu větu v jistém smyslu nelze obrátit:

Existuje lebesgueovsky nulová množina $M \subset \mathbb{R}^n$ (kde $n > 1$) taková, že každá lipschitzovská funkce na $\mathbb{R}^n$ je diferencovatelná aspoň v jednom bodě množiny M.

Klasickým zobecněním Rademacherovy věty je Stepanovova věta. J. Malý r. 1999 uveřejnil [**Mal5**] překvapivé pozorování, jak tuto obecnější Stepanovovu větu lze z Rademacherovy věty snadno elementárně odvodit.

Poznamenejme také, že A. Nekvinda a L. Zajíček r. 1988 [**MR 90c:26043**] publikovali elementární důkaz Rademacherovy věty.

Diferencovatelností funkcí vzdálenosti od obecné uzavřené množiny v Banachově prostoru — což je vždy lipschitzovská funkce — se zabývají práce L. Zajíčka [**MR 85k:46025**], [**MR 85k:49046**], [**MR 86i:46020**], [**MR 99b:46066**] a E. Matouškové z r. 1992 [**MR 96a:46029**].

3.2. Diferencovatelnost konvexních funkcí

V základním kurzu analýzy se dokazuje, že každá konvexní funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má konečné jednostranné derivace v každém bodě. Z toho již snadno vyplývá, že množina N_f bodů nediferencovatelnosti funkce f je spočetná. Naopak snadná konstrukce ukazuje, že pro každou spočetnou množinu $S \subset \mathbb{R}$ existuje konvexní funkce f, pro kterou $N_f = S$.

Diferencovatelností konvexních funkcí více (a nekonečně mnoha) proměnných se zabývala řada matematiků. Pro případ konvexní funkce f na $\mathbb{R}^n$ se již dost dlouho v podstatě vědělo (přinejmenším pro $n = 2$), že množinu N_f bodů nediferencovatelnosti lze pokrýt spočetně mnoha plochami dimenze $n - 1$, které jsou „grafy lipschitzovských funkcí $n - 1$ proměnných“ (při vhodné volbě kartézských souřadnic).

V práci [**Zj1**] se podařilo podat úplnou charakterizaci velikosti množin N_f konvexních funkcí na $\mathbb{R}^n$. Ukazuje se, že při pokrývání N_f vystačíme s grafy funkcí, které jsou nejen lipschitzovské, ale jsou i *δ-konvexní* (tj. jsou rozdílem dvou konvexních funkcí). A naopak: lze-li množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ pokrýt spočetně mnoha plochami uvedeného typu, pak existuje konvexní funkce f, která není diferencovatelná v žádném bodě množiny M.

Při vyšetřování konvexních funkcí na (nekonečně-rozměrných) *Banachových prostorech* je nutné se omezit na vyšetřování *spojitých* konvexních funkcí a rozlišovat mezi (slabší) *Gâteauxovou* derivací a (silnější) *Fréchetovou* derivací; pro oba druhy derivace byly na KMA dokázány zajímavé výsledky. (Poznamenejme, že konvexní funkce na prostoru konečné dimenze je vždy spojitá a oba typy derivací pro ni splývají.)

Klasická Mazurova věta z r. 1931 o derivování v Gâteauxově smyslu tvrdí, že množina N_f^G bodů gâteauxovské nediferencovatelnosti spojité konvexní funkce na separabilním Banachově prostoru X je množina první kategorie. Protože spojitá konvexní funkce na libovolném Banachově prostoru je lokálně lipschitzovská, z již zmíněných vět o derivování lipschitzovských funkcí na separabilních prostorech vyplývá, že pokud je X separabilní, je N_f^G v jistém smyslu také množinou „míry nula“ (a tento výsledek byl ještě zesílen Aronszajnem r. 1976). V práci [**Zj1**] byla i pro případ separabilního Banachova prostoru X podána úplná charakterizace velikosti množin N_f^G, která je (i s důkazem) zcela analogická již uvedenému výsledku pro funkce na $\mathbb{R}^n$ — místo „$(n-1)$-rozměrných δ-konvexních ploch“ je pouze nutno použít „δ-konvexní nadplochy (plochy kodimenze 1)“.

V šedesátých letech se ukázalo, že Mazurovu větu lze zobecnit — tvrzení platí i v některých neseparabilních Banachových prostorech; takové prostory se nazývají slabými Asplundovými prostory. O těchto prostorech je mnoho známo (srov. [Fa]), ale stále není známa uspokojivá „vnitřní charakterizace“ slabých Asplundových prostorů.

Velmi významně přispěl k teorii slabých Asplundových prostorů D. Preiss, když r. 1990 (srov. [**PPN**]) dokázal, že každý Banachův prostor, který má gâteauxovsky hladkou normu (mimo počátek), je slabým Asplundovým prostorem. Tím vyřešil přirozený problém, který dlouho vzdoroval úsilí řady známých matematiků.

Této práci předcházela důležitá práce [**BP**], ve které byla dokázána první varianta důležitého *„hladkého variačního principu“* (a jako důsledek podáno částečné řešení výše zmíněného problému).

Za zmínku stojí také výsledek práce [**HŠZ**], který tvrdí, že na „prakticky každém“ *neseparabilním* Banachově prostoru X existuje spojitá konvexní funkce f, pro kterou je množina N_f^G neborelovská — předtím se nevědělo, zda taková funkce může existovat na nějakém slabém Asplundově prostoru.

Uvažujme nyní pro spojitou konvexní funkci f na Banachově prostoru X množinu N_f^F bodů fréchetovské nediferencovatelnosti funkce f. Prostory, pro které je N_f^F vždy první kategorie, se nazývají Asplundovými prostory. Pro Asplundovy prostory je známa řada pěkných „vnitřních charakterizací" (srov. [Ph]).

Zda lze (třeba alespoň v separabilním Hilbertově prostoru) jednoduše charakterizovat velikost množin N_f^F, je stále otevřený problém. Zatím jsou známy pouze poměrně přesné „odhady velikosti" množin N_f^F (pomocí speciální „σ-pórovitosti") [**PZ2**] pro případ separabilních Asplundových prostorů; částečné zobecnění na případ neseparabilních prostorů je dokázáno v článku L. Zajíčka z r. 1991 [**MR 92d:46112**].

Množiny bodů nediferencovatelnosti konvexních funkcí zkoumají také práce L. Veselého z r. 1986 [**MR 88c:47108**], D. Preisse z r. 1990 [**MR 92h:46061**] a L. Zajíčka z r. 1993 [**MR 95e:26006**].

Derivování konvexních funkcí „na malých množinách" se týkají práce E. Matouškové z r. 1993 [**MR 95i:46055**] a L. Zajíčka z r. 1997 [**MR 99d:46066**].

Práce E. Matouškové a L. Zajíčka z r. 1998 [**MR 99m:46107**] dává částečnou odpověď na zajímavou otevřenou otázku, zda každá spojitá konvexní funkce na separabilním Hilbertově prostoru má aspoň v jednom bodě *druhou derivaci* (ve velmi slabém přirozeném smyslu).

3.3. Vlastnosti derivací funkcí více proměnných

Nechť X je Banachův prostor a $f : X \to \mathbb{R}$ má Fréchetovu derivaci $f'(x)$ v každém bodě $x \in X$. Pak $f'(x) \in X^*$ a derivace funkce f je tedy zobrazení $f' : X \to X^*$. Jestliže $X = \mathbb{R}^n$, zpravidla ztotožňujeme derivaci a gradient: $f'(x) = \operatorname{grad} f(x)$. Potom je derivace zobrazení $f' = \operatorname{grad} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

O vlastnostech f' je velmi málo známo i pro $X = \mathbb{R}^n$, $n > 1$. Teprve nedávno se J. Malému [**Mal1**] podařilo dokázat, že f' má vlastnost, která je přirozeným zobecněním Darbouxovy vlastnosti reálných funkcí jedné proměnné:

Nechť X je Banachův prostor, $f : X \to \mathbb{R}$ má Fréchetovu derivaci $f'(x)$ v každém bodě $x \in X$ a $C \subset X$ je konvexní uzavřená množina s neprázdným vnitřkem. Pak množina $\{f'(x) : x \in C\}$ je souvislá podmnožina X^*.

Stále se ale např. neví, zda „gradientové zobrazení" $f' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n > 1$, musí mít tzv. Denjoyovu-Clarksonovu vlastnost, tj. zda $\lambda_n\{x : f'(x) \in G\} > 0$, kdykoliv $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\{x : f'(x) \in G\} \neq \emptyset$. O tomto „Weilově gradientovém problému" jsou známy pouze částečné výsledky. Z. Buczolich [Bu] například dokázal, že za výše zmíněných okolností je *jednorozměrná* Hausdorffova míra množiny $\{x : f'(x) \in G\}$ kladná. Zobecnění a upřesnění tohoto výsledku je dokázáno (zcela jinou metodou) v [**HMWZ**].

3.4. Slabě diferencovatelné funkce

Pro aplikace v teorii parciálních diferenciálních rovnic a ve variačním počtu má velký význam pojem derivace funkce ve smyslu distribucí. Funkce n proměnných definovaná na nějaké oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se obvykle nazývá *slabě diferencovatelná*, jestliže její (parciální) derivace ve smyslu distribucí jsou lokálně integrovatelné funkce (srov. [Zm]).

Nejdůležitějšími třídami slabě diferencovatelných funkcí jsou klasické Sobolevovy prostory $W^{1,p}$ funkcí, jejichž slabé derivace leží v L^p.

V práci [**Mal3**] dokázal J. Malý pro funkce z $W^{1,p}$ větu analogickou klasické Luzinově větě:

Pro každou funkci $f \in W^{1,p}$ existuje *hölderovská* funkce $g \in W^{1,p}$, pro kterou je množina $\{x : f(x) \neq g(x)\}$ „velmi malá" (přesněji: má q-kapacitu menší než ε, kde $1 < q < p$ a $\varepsilon > 0$ byly předem libovolně zadány; exponent hölderovskosti závisí na p a q).

K nejdůležitějším větám o slabě diferencovatelných funkcích patří věty o vnoření. Známá Sobolevova věta o vnoření říká, že pro „rozumné" oblasti Ω je Sobolevův prostor $W^{1,p}$ spojitě vnořen do prostoru L^q, kde $q \leqq np/(n-p)$ (tj. platí nerovnost $\|u\|_{L^q} \leqq C\|u\|_{W^{1,p}}$).

Pokud je oblast Ω „méně rozumná", může nastat případ, že věta o vnoření již neplatí pro každý exponent $q \leqq np/(n-p)$, ale stále platí pro exponenty $q \leqq q_0 < np/(n-p)$. V práci [**KM**] je vyšetřeno, jak (maximální) q_0 závisí na geometrických vlastnostech oblasti Ω.

Hlavním přínosem práce J. Malého a L. Picka [**MP**] je nový elementární důkaz klasických vět o vnoření i jejich „upřesněných variant", ve kterých se vnořuje do Lorentzových a Lorentzových-Zygmundových prostorů.

Klasická věta o substituci pro Lebesgueův integrál předpokládá, že zobrazení f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, kterým se transformují souřadnice, je regulární; je dobře známo, že stačí předpokládat lokální lipschitzovskost f. Přirozený problém, pro která f věta o substituci platí, závisí ovšem podstatně na derivačních vlastnostech f. Zajímavým příspěvkem k tomuto problému je práce [**MM**], ve které je dokázáno, že věta o substituci platí pro hölderovská zobrazení $f \in W^{1,n}$. V práci [**KKM**] je dokázáno, že postačující podmínkou je také to, že derivace f leží v Lorentzově prostoru $L_{n,1}$ (a f je spojitá). Podobnou problematikou se zabývají práce J. Malého z r. 1994 [**MR 95h:28007**] a z r. 1999 [**FM**] (spoluautorka I. Fonseca).

Významným přínosem J. Malého je také nalezení nového pojmu absolutně spojitých (skalárních i vektorových) funkcí n proměnných a vyjasnění jeho důležité role v teorii slabě diferencovatelných zobrazení, zvláště v otázkách spojených se záměnou proměnných v integrálu ([**Mal4**], [**KKM**], [**Mal6**]). Jak zcela nedávno ukázala M. Csörnyei, tato třída funkcí (pro případ stejné dimenze výchozího i cílového prostoru) překvapivě splývá s formálně užší třídou „zobecněných lipschitzovských transformací", kterou v padesátých letech studovali T. Radó a P. V. Reichelderfer.

3.5. Některé další výsledky

Rozšiřováním diferencovatelné funkce z podmnožiny $\mathbb{R}^n$ na celý prostor se zabývá zajímavá práce V. Aversy, M. Laczkoviche a D. Preisse [**ALP**].

Řadu výsledků o fréchetovské diferencovatelnosti, (silnější) striktní diferencovatelnosti a (slabší) fréchetovské subdiferencovatelnosti funkcí na Banachově prostoru obsahuje práce L. Zajíčka z r. 1991 [**MR 92j:46081**].

Práce L. Zajíčka z r. 1983 [**MR 85e:41041**] se týká derivování metrických projekcí na uzavřené podmnožiny konečně-rozměrného Banachova prostoru.

Derivováním ve spojitosti s pojmem delta-konvexních (d. c.) funkcí a zobrazení se zabývají práce L. Veselého a L. Zajíčka z r. 1989 [**MR 91h:47073**] a E. Kopecké (Matouškové) a J. Malého z r. 1990 [**MR 91k:26011**].

4. Derivování měr

4.1. Geometrická teorie míry a derivování měr

Teorie k-rozměrných měr v n-rozměrném prostoru byla založena Carathéodorym a Hausdorffem na začátku století. Tato hluboká teorie, která je podstatnou částí geometrické teorie míry a má řadu důležitých aplikací (např. ve variačním počtu), byla poslední dobou popularizována zásluhou známé „teorie fraktálů“. Na rozvoji teorie k-rozměrných (především Hausdorffových) měr se podíleli A. S. Besicovitch, H. Federer (jenž je autorem základní monografie [Fe]) a řada dalších význačných matematiků. K nim se připojil r. 1987 D. Preiss svou významnou prací [**Pr7**], ve které vyřešil známý starý problém o vztahu rektifikovatelnosti a derivací (hustot) měr.

Pro vysvětlení Preissova výsledku uvažujme celé číslo k, $0 < k < n$, a konečnou borelovskou míru μ na $\mathbb{R}^n$, která je soustředěná na k-rektifikovatelné množině a je absolutně spojitá vzhledem ke k-rozměrné Hausdorffově míře $\mathcal{H}_k$. Jinými slovy: předpokládáme, že

(i) existuje posloupnost (P_i) k-rozměrných hladkých ploch (třídy C_1) v $\mathbb{R}^n$ takových, že $\mu\Big(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i\Big) = 0$, a

(ii) $\mu(B) = 0$, kdykoliv $B \subset \mathbb{R}^n$ je borelovská množina a $\mathcal{H}_k(B) = 0$.

(Za předpokladu platnosti (i) je podmínka (ii) ekvivalentní existenci borelovsky měřitelné funkce f takové, že $\mu(B) = \int_B f(x)\,\mathrm{d}\mathcal{H}_k(x)$ pro každou borelovskou B.)

Z výsledků A. S. Besicovitche z 30. let vyplývá, že za těchto předpokladů pro μ-skoro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ existuje k-rozměrná derivace (neboli hustota)

$$D^k(\mu, x) = \lim_{r\to 0+} \frac{\mu B(x,r)}{r^k}$$

(kde $B(x,r)$ je uzavřená koule o středu x a poloměru r), a navíc

$$0 < D^k(\mu, x) < \infty. \qquad (*)$$

(Přitom $D^k(\mu, x) = \alpha_k f(x)$, kde α_k je objem jednotkové koule v $\mathbb{R}^k$. Proto v případě, že μ je restrikce $\mathcal{H}_k$ na borelovskou podmnožinu sjednocení spočetně mnoha hladkých k-rozměrných ploch, platí pro μ-skoro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ rovnost $D^k(\mu, x) = \alpha_k$.)

Nejdůležitější z řady Preissových výsledků obsažených v **[Pr7]** říká, že předchozí tvrzení lze obrátit:

Jestliže μ je borelovská míra a pro μ-skoro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ platí $(*)$, pak již nutně platí podmínky (i) *a* (ii).

(Jestliže pro μ-skoro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ platí $D^k(\mu, x) = \alpha_k$, dostáváme, že μ je restrikce $\mathcal{H}_k$ na borelovskou podmnožinu sjednocení spočetně mnoha hladkých k-rozměrných ploch.)

Předchozí větu dokázal pro $n = 2$ a $k = 1$ již A. S. Besicovitch r. 1938 a pro případ obecného n a $k = 1$ E. F. Moore r. 1950. D. Preiss kromě řady známých metod použil i novou metodu „tečných měr", která již našla řadu uplatnění i v problémech jiného typu.

Problematikou přímo související s Preissovou větou se zabývají práce O. Kowalského a D. Preisse **[KP]** a B. Kirchheima **[Ki1]**.

Práce **[KP]** podává zajímavý popis všech borelovských měr μ na $\mathbb{R}^{n+1}$, které mají tu vlastnost, že pro každý bod $x \in \operatorname{spt} \mu$ z nosiče míry μ platí, že $\mu B(x, r) = \alpha_n r^n$ (kde α_n je objem jednotkové koule v $\mathbb{R}^n$). Autoři ukazují, že tuto vlastnost nemá pouze restrikce Hausdorffovy míry $\mathcal{H}_n$ na libovolnou nadrovinu, ale také (pro $n \geqq 3$) její restrikce na jakoukoliv kvadriku, která má při vhodné volbě kartézských souřadnic rovnici $y_4^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. Důkaz toho, že žádné jiné míry s touto vlastností neexistují, je značně hluboký a náročný.

Velmi zajímavé, ale dosud nepublikované výsledky o vztahu rektifikovatelnosti a derivací měr obsahuje diplomová práce M. Chlebíka **[Chl]** (vedená D. Preissem).

Článek B. Kirchheima **[Ki2]** (který vychází z diplomové práce vedené D. Preissem) obsahuje mj. toto cenné zobecnění již zmíněného Besicovitchova výsledku (případ $M \subset \mathbb{R}^n$):

Jestliže borelovská podmnožina M *libovolného* metrického prostoru X má konečnou k-rozměrnou Hausdorffovu míru $\mathcal{H}_k$ a je pokryta spočetně mnoha lipschitzovskými obrazy podmnožin $\mathbb{R}^k$, pak pro $\mathcal{H}_k$-skoro všechny body $x \in M$ platí

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\mathcal{H}_k\big(M \cap B(x, r)\big)}{\alpha_k r^k} = 1,$$

kde α_k je objem jednotkové koule v $\mathbb{R}^k$.

4.2. Derivování měr v Banachových prostorech

Důležitá teorie derivování měr má svůj počátek v Lebesgueových pracích ze začátku století. S jejím stavem v r. 1975 se lze seznámit v [Gu]. Klasická Lebesgueova *věta o derivování* neurčitého integrálu říká toto (symbolem λ zde označujeme Lebesgueovu míru v $\mathbb{R}^n$ a $B(x, r)$ je uzavřená koule se středem x a poloměrem r):

Je-li $f \in L^1(\lambda)$, pak pro λ-skoro všechny body $x \in \mathbb{R}^n$ platí, že

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\displaystyle\int_{B(x,r)} f \,\mathrm{d}\lambda}{\lambda\big(B(x,r)\big)} = f(x).$$

Obvyklý důkaz věty o derivování je založen na platnosti Vitaliovy věty o pokrytí (pro Lebesgueovu míru a systém uzavřených koulí). Věta byla zobecňována v různých směrech:

a) Místo středních hodnot (integrálních průměrů) funkce f v uzavřených koulích se středem x lze uvažovat střední hodnoty f v množinách B z jisté „derivační báze" (velmi zajímavý je například případ, kdy za B připouštíme uzavřené intervaly v $\mathbb{R}^n$, které obsahují bod x).

b) Místo Lebesgueovy míry λ lze uvažovat lokálně konečnou borelovskou míru μ. I pak věta o derivování platí (pro derivační bázi „soustředných koulí"), jak ukázal A. S. Besicovitch r. 1945. Pro důkaz je však třeba místo Vitaliovy věty použít obtížnější Besicovitchovu větu o pokrytí.

c) Místo $\mathbb{R}^n$ je přirozené vyšetřovat i obecnější prostory (například variety).

Velmi zajímavým příspěvkem do této problematiky jsou výsledky prezentované bez důkazu v [**Pr6**] (důkazy — i pro obecnější derivační báze — budou obsaženy v připravované knize [MPT]). Zde D. Preiss uvažuje obecný úplný separabilní prostor (X, ϱ) a zkoumá, kdy platí věta o derivování integrálu pro *libovolnou* konečnou borelovskou míru a derivační bázi „soustředných koulí" (tj. kdy platí zobecnění Besicovitchovy věty). Nachází pěknou úplnou charakterizaci prostorů, ve kterých věta platí, a to pomocí poměrně jednoduché geometrické podmínky, která říká, že metrika ϱ je v jistém smyslu σ-konečně dimenzionální. Jako důsledek pak např. dostává, že v Banachově prostoru platí zobecnění Besicovitchovy věty právě tehdy, když X má konečnou dimenzi.

V dalších pracích se D. Preiss zabýval otázkou, zda klasické výsledky z teorie derivování integrálů přece jen nelze zobecnit do některých Banachových nekonečněrozměrných prostorů alespoň pro speciální míry. Protože v nekonečně-rozměrných Banachových prostorech neexistuje přirozená analogie Lebesgueovy míry, vyšetřuje gaussovské míry (které tvoří velmi důležitou třídu měr).

Ukazuje [**Pr1**], že v separabilním Hilbertově prostoru existuje gaussovská míra, pro kterou neplatí zobecnění Vitaliovy věty (pro uzavřené soustředné koule) ani věty o hustotě [**Pr3**] (a [**MR 85a:60015**] z r. 1982), takže neplatí ani zobecnění Lebesgueovy věty o derivování integrálu.

Poznamenejme ještě, že J. Tišer v práci [**Ti**] (vycházející z kandidátské práce vedené D. Preissem) překvapivě dokázal, že pro některé (nedegenerované, ale velmi speciální) gaussovské míry na separabilním Hilbertově prostoru věta o hustotě přece jen platí. (Zcela nedávno J. Tišer zesílil výsledek z [**Pr1**]: Vitaliova věta neplatí v separabilním Hilbertově prostoru pro žádnou nedegenerovanou gaussovskou míru.)

4.3. Některé další výsledky

Derivováním měr na metrických grupách se zabývá práce M. Studeného [**MR 84j:28007**] z r. 1983, která vychází z diplomové práce vedené D. Preissem.

Zajímavý rozbor otázky, zda jednorozměrná Lebesgueova věta o hustotě je v nějakém smyslu „kanonická“, je obsažen v článku [**AP**].

Elementární důkaz (jednorozměrné) věty o hustotě uveřejnil L. Zajíček r. 1979 [**MR 80c:28004**].

Jednostranných hustot podmnožin přímky se týká [**MPZ**] a poznámka L. Zajíčka z r. 1994 [**MR 95e:26006**].

L i t e r a t u r a

[ABBM] Agronsky, S. J., Biskner, R., Bruckner, A. M., Mařík, J.: *Representations of functions by derivatives.* Trans. Amer. Math. Soc. *263* (1981), 493–500.

[AP] Aversa, V., Preiss, D.: *Hearts density theorems.* Real Anal. Exchange *13* (1987/88), 28–32.

[ALP] Aversa, V., Laczkovich, M., Preiss, D.: *Extension of differentiable functions.* Comment. Math. Univ. Carolinae *26* (1986), 597–609.

[BBM] Blažek, J., Borák, E., Malý, J.: *On Köpcke and Pompeiu functions.* Časopis Pěst. Mat. *103* (1978), 53–61.

[BCEH] Belna, C. L., Cargo, G. T., Evans, M. J., Humke, P. D.: *Analogues of the Denjoy-Young-Saks theorem.* Trans. Amer. Math. Soc. *271* (1982), 253–260.

[Be] Berman, S. M.: *Gaussian process with stationary increments: local times and sample function properties.* Ann. Math. Statist. *41* (1970), 1260–1272.

[BEH] Belna, C. L., Evans, M. J., Humke, P. D.: *Symmetric and ordinary differentiation.* Proc. Amer. Math. Soc. *72* (1978), 261–267.

[BL] Benyamini, Y., Lindenstrauss, J.: *Geometric Nonlinear Functional Analysis.* Vol. 1: Colloq. publications (American Mathematical Society); v. 48: Providence, Rhode Island 2000.

[BP] Borwein, J. M., Preiss, D.: *A smooth variational principle with applications to subdifferentiability and to differentiability of convex functions.* Trans. Amer. Math. Soc. *303* (1987), 517–527.

[Br] Bruckner, A. M.: *Differentiation of Real Functions.* CRM Monographs Series, vol. 5, Providence 1994.

[Bu] Buczolich, Z.: *The n-dimensional gradient has the 1-dimensional Denjoy--Clarkson property.* Real Anal. Exchange *18* (1992–93), 221–224.

[Fa] Fabian, M.: *Gâteaux differentiability of convex functions and topology — weak Asplund spaces.* John Wiley and Sons, Interscience 1997.

[Fe] Federer, H.: *Geometric Measure Theory.* Springer-Verlag, Berlin–New York 1969.

[FM] Fonseca, I., Malý, J.: *Relaxation of multiple integrals below the growth exponent.* Anal. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire *14* (1997), 309–338.

[Fo] Foran, J.: *The symmetric and ordinary derivative.* Real Anal. Exchange *2* (1977), 105–108.

[Fr] Freiling, Ch.: *On the problem of characterizing derivatives.* Real Anal. Exchange *23* (1997/98), 805–812.

[Gu] de Guzmán, M.: *Differentiation of integrals in* $\mathbb{R}^n$. Lecture Notes in Math. 481, Springer-Verlag, Berlin, New York 1975.

[HMWZ] Holický, P., Malý, J., Weil, C. E., Zajíček, L.: *A note on the gradient problem.* Real Anal. Exchange *22* (1996/97), 225–235.

[HŠZ] Holický, P., Šmídek, M., Zajíček, L.: *Convex functions with nonmeasurable set of Gâteaux differentiability points.* Comment. Math. Univ. Carolinae *39* (1998), 469–482.

[Hu] Hunt, B. R.: *The prevalence of continuous nowhere differentiable functions.* Proc. Amer. Math. Soc. *122* (1994), 711–717.

[Chl] Chlebík, M.: *Geometrická teória miery.* Diplomová práce, MFF UK 1984.

[Cho] Choquet, Ch.: *Application des propriétés descriptives de la fonction contingent a la théorie des fonctions de variable réelle et a la géometrie différentielle des variétés cartésiennes* (These). J. Math. Pures Appl. *26* (1947), 115–256.

[Ke] Kelar, V.: *On the first and the fifth class of Zahorski.* Real Anal. Exchange *9* (1983/84), 233–250.

[Ki1] Kirchheim, B.: *Uniformly distributed measures, tangent measures and analytic varieties.* Collection: Proceedings of the Conference: Topology and Measure V (Binz, 1987), 54–60.

[Ki2] Kirchheim, B.: *Rectifiable metric spaces: local structure and regularity of the Hausdorff measure.* Proc. Amer. Math. Soc. *121* (1994), 113–123.

[KKM] Kauhanen, J., Koskela, P., Malý, J.: *On functions with derivatives in a Lorentz space.* Manuscripta Math. *100* (1999), 87–101.

[KM] Kilpeläinen, T., Malý, J.: *Sobolev inequalities on sets with irregular boundaries.* Z. Anal. Angew. *19* (2000), 369–380.

[Ko] Kolář, J.: *Nowhere approximately differentiable and nowhere Hölder continuous functions — Porous sets and Haar null sets.* Proc. Amer. Math. Soc. (v tisku).

[KP] Kowalski, O., Preiss, D.: *Besicovitch-type properties of measures and submanifolds.* J. Reine Angew. Math. *379* (1987), 115–151.

[LMZ] Lukeš, J., Malý, J., Zajíček, L.: *Fine Topology Methods in Real Analysis and Potential Theory.* Lecture Notes in Math. 1189, Springer–Verlag, Berlin, New York 1986.

[Mal1] Malý, J.: *The Darboux property for gradients.* Real Anal. Exchange *22* (1996/97), 167–173.

[Mal2] Malý, J.: *Where the continuous functions without unilateral derivatives are typical.* Trans. Amer. Math. Soc. *283* (1984), 169–175.

[Mal3] Malý, J.: *Hölder type quasicontinuity.* Potential Anal. *2* (1993), 249–254.

[Mal4] Malý, J.: *Absolutely continuous functions of several variables.* J. Math. Anal. Appl. *231* (1999), 492–508.

[Mal5] Malý, J.: *A simple proof of the Stepanov theorem on differentiability almost everywhere.* Expo. Math. *17* (1999), 59–61.

[Mal6] Malý, J.: *Sufficient conditions for change of variables in integral.* Preprint MFF UK, KMA-2000-19, Proceedings "Analysis and Geometry", Novosibirsk 1999 (v tisku).

[Max] Maximoff, I.: *Sur la transformation continue de quelques fonctions en dérivées exactes.* Bull. Soc. Phys. Math. Kazan (3) *12* (1940), 57–81.

[MM] Malý, J., Martio, O.: *Lusin's condition (N) and mappings of the class $W^{1,n}$.* J. Reine Angew. Math. *458* (1995), 19–36.

[MP] Malý, J., Pick, L.: *An elementary proof of sharp Sobolev embeddings.* Preprint MFF UK, MATH-KMA-2000/33, Proc. Amer. Math. Soc. (v tisku).

[MPZ] Malý, J., Preiss, D., Zajíček, L.: *An unusual monotonicity theorem with applications.* Proc. Amer. Math. Soc. *102* (1988), 925-932.

[MPT] Mejlbro, L., Preiss, D., Tišer, J.: *Differentiation and determination of measures* (připravovaná kniha).

[MZ] Malý, J., Zajíček, L.: *Approximate differentiation: Jarník points.* Fund. Math. *140* (1991), 87–97.

[Ph] PHELPS, R. R.: *Convex functions, monotone operators and differentiability.* Lecture Notes in Math. 1364, Springer-Verlag, Berlin 1993.

[Pr1] PREISS, D.: *Gaussian measures and covering theorems.* Comment. Math. Univ. Carolinae *20* (1979), 95–99.

[Pr2] PREISS, D.: *Maximoff's theorem.* Real Anal. Exchange *5* (1979–80), 92–104.

[Pr3] PREISS, D.: *Gaussian measures and the density theorem.* Comment. Math. Univ. Carolinae *22* (1981), 181–193.

[Pr4] PREISS, D.: *Level sets of derivatives.* Trans. Amer. Math. Soc. *272* (1982), 161–184.

[Pr5] PREISS, D.: *Algebra generated by derivatives.* Real Anal. Exchange *8* (1982–83), 208–216.

[Pr6] PREISS, D.: *Dimension of metrics and differentiation of measures.* In collection: General topology and its relations to modern analysis and algebra, V (Prague, 1981). Sigma Ser. Pure Math. 3, Heldermann, Berlin 1983, 565–568.

[Pr7] PREISS, D.: *Geometry of measures in $\mathbb{R}^n$: distribution, rectifiability, and densities.* Ann. Math. *125* (1987), 537–643.

[Pr8] PREISS, D.: *Differentiability of Lipschitz functions in Banach spaces.* J. Funct. Anal. *91* (1990), 312–345.

[Pr9] PREISS, D.: *The work of Professor Jarník in Real Analysis.* In collection: Life and work of Vojtěch Jarník, B. NOVÁK ed., Prometheus 1999, 55–65.

[PPN] PREISS, D., PHELPS, R. R., NAMIOKA, I.: *Smooth Banach spaces, weak Asplund spaces and monotone or usco mappings.* Israel J. Math. *72* (1990), 257–279.

[PŠ] PREISS, D., ŠVERÁK, V.: *Derivatives of type* 1. Real Anal. Exchange (1986/87), 354–360.

[PZ1] PREISS, D., ZAJÍČEK, L.: *On the symmetry of approximate Dini derivates of arbitrary functions.* Comment. Math. Univ. Carolinae *23* (1982), 691–697.

[PZ2] PREISS, D., ZAJÍČEK, L.: *Stronger estimates of smallness of sets of Fréchet non-differentiability of convex functions.* Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. no. *3* (1984), 219–223.

[PZ3] PREISS, D., ZAJÍČEK, L.: *On Dini and approximate Dini derivates of typical continuous functions.* Preprint MFF UK, KMA-1999-13, Real Anal. Exchange (v tisku).

[PZ4] PREISS, D., ZAJÍČEK, L.: *Directional derivatives of Lipschitz functions.* Preprint MFF UK, KMA-2000-28.

[S1] SAKS, S.: *On the functions of Besicovitch in the space of continuous functions.* Fund. Math. *19* (1932), 211–219.

[S2] SAKS, S.: *Theory of the Integral.* Monogr. Matematyczne 7, New York 1937.

[Th1] THOMSON, B. S.: *Real Functions.* Lecture Notes in Math. 1170, Springer-Verlag, Berlin 1985.

[Th2] THOMSON, B. S.: *Symmetric properties of real functions.* M. Dekker, New York 1994.

[Ti] TIŠER, J.: *Differentiation theorem for Gaussian measures on Hilbert space.* Trans. Amer. Math. Soc. *308* (1988), 655–666.

[U1] UHER, J.: *Symmetrically differentiable functions are differentiable almost everywhere.* Real Anal. Exchange *8* (1982/83), 253–261.

[U2] UHER, J.: *Symmetric semicontinuity implies continuity.* Trans. Amer. Math. Soc. *293* (1986), 421–429.

[Zh] ZAHORSKI, Z.: *Sur la première dérivée.* Trans. Amer. Math. Soc. *69* (1950), 1–54.

[Zj1] ZAJÍČEK, L.: *On the differentiation of convex functions in finite and infinite dimensional spaces.* Czechoslovak Math. J. *29* (1979), 340–348.

[Zj2] ZAJÍČEK, L.: *On the symmetry of Dini derivates of arbitrary functions.* Comment. Math. Univ. Carolinae *22* (1981), 195–209.

[Zj3] ZAJÍČEK, L.: *Porosity and σ-porosity.* Real Anal. Exchange *13* (1987/88), 314–350.

[Zj4] Zajíček, L.: *The differentiability structure of typical functions in* $C[0,1]$. Real Anal. Exchange *13* (1987/88), 119, 113–116, 93.
[Zj5] Zajíček, L.: *Unpublished results of K. Pekár and H. Zlonická on preponderant derivatives and* M_4 *sets.* Real Anal. Exchange *15* (1989/90), 413–418.
[Zj6] Zajíček, L.: *On preponderant differentiability of typical continuous functions.* Proc. Amer. Math. Soc. *124* (1996), 789–798.
[Zj7] Zajíček, L.: *Ordinary derivative via symmetric derivative and Lipschitz condition via symmetric Lipchitz condition.* Real Anal. Exchange *23* (1997/98), 653–669.
[Zj8] Zajíček, L.: *On results of Jan Mařík in the theory of derivatives.* Math. Bohem. *121* (1996), 385–395.
[Zj9] Zajíček, L.: *Differentiability properties of typical continuous functions.* Real Anal. Exchange *25* (1999/2000), 149–157.
[Zm] Ziemer, W.: *Weakly differentiable functions.* Graduate Texts in Mathematics 120, Springer-Verlag, New York 1989.
[ZP] Zelený, M., Pelant, J.: *The structure of the* σ*-ideal of* σ*-porous sets.* Preprint MFF UK, KMA-1999-01.

Počítačová lingvistika ve vztahu k informatice

Jarmila Panevová a kolektiv, Praha

1. Úvod

Vývoj počítačových technologií a počítačového zpracování jazykových dat spolu s převratnými změnami v obou složkách jsou spolu zcela neodmyslitelně spjaty. Jejich vzájemnou souvislost i podmíněnost nových možností automatického zpracování přirozeného jazyka v kontextu nových informačních technologií se tu pokusíme ukázat z hlediska dneška ([9]). Na začátku se letmo podívejme na nedávnou minulost. Obor u nás tehdy nazývaný matematická lingvistika se konstituoval v 50. letech. Podle používaných přesných metod se tehdy rozvíjel ve dvou směrech: jako lingvistika

Prof. PhDr. Jarmila Panevová, DrSc. (1938), Ústav formální a aplikované lingvistiky (ÚFAL) MFF UK; Mgr. Jan Cuřín, Mgr. Martin Čmejrek, Mgr. Nino Peterek, Mgr. Daniel Zeman, studenti doktorského studia v ÚFAL; Mgr. Barbora Hladká, Ph. D., Mgr. Kiril Ribarov, odb. pracovníci Laboratoře pro zpracování jazykových dat při ÚFAL MFF UK; RNDr. Vladislav Kuboň, odb. asistent ÚFAL MFF UK.

Práce byla podporována grantovými projekty VS 96151 a GAČR 405/96/K214.