

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Ivan Netuka

Georg Pick - pražský matematický kolega Alberta Einsteina

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 44 (1999), No. 3, 227--232

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/140999>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1999

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Georg Pick — pražský matematický kolega Alberta Einsteina

Ivan Netuka, Praha

Slavnostní seminář, který se u příležitosti 120. výročí narození Alberta Einsteina konal dne 14. března 1999 v Karolinu, měl pochopitelně zaměření převážně fyzikální. Nicméně organizátoři na matematiku nezapomněli. Krátká přednáška, k níž jsem byl pozván, byla věnována Georgu Pickovi. Tento profesor matematiky na německé univerzitě v Praze byl velmi blízkým kolegou A. Einsteina v průběhu jeho šestnáctiměsíčního pražského pobytu v letech 1911–1912.

Georg Pick se narodil 10. srpna 1859 ve Vídni, kde v letech 1875–1879 studoval na univerzitě matematiku a fyziku. V roce 1880 získal doktorát pod vedením L. Königsbergera, který je považován za žáka K. Weierstrasse. V témže roce Pick přijal na Karlo-Ferdinandově univerzitě v Praze místo pomocného asistenta E. Macha, v r. 1882 se habilitoval a v r. 1888 byl jmenován mimořádným profesorem německé univerzity v Praze. Dva semestry, pravděpodobně v letech 1884–1885, pobýval v Lipsku, kde byl ovlivněn F. Kleinem. Řádným profesorem byl jmenován v r. 1892 a ve školním roce 1900/1901 byl děkanem filozofické fakulty. Aktivní působení na univerzitě ukončil v r. 1929 a vrátil se do Vídně. Po anšlusu Rakouska se v r. 1938 přestěhoval zpět do Prahy. O čtyři roky později byl dne 13. července 1942 deportován pod číslem 824 transportem AAq do Terezína. Tam zemřel ve věku 83 let 26. července 1942. (Další informace o životě G. Picka lze nalézt v [12].)

Celých 46 let působil G. Pick v Praze jako vysokoškolský učitel. Přehled jeho přednášek je uveden v [12]. Těžiště Pickovy pedagogické práce spočívalo v analýze a geometrii. V souvislosti s další diskusí o odborných kontaktech Picka a Einsteina není bez zájmovosti uvést, že ve školním roce 1905/1906 Pick konal přednášku *Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf die Geometrie* (3/0) a ve školním roce 1911/1912, tedy přesně v době Einsteinova pražského pobytu, přednášel *Infinitesimalgeometrie* (5/0). Profesor Pick vedl 20 disertačních prací. Např. v roce 1910/1911 dokončil pod jeho vedením E. Stransky svou práci *Infinitesimalgeometrie der Raumkurven auf Grundlage einer nicht-Euklidischen Massbestimmung*. Patrně nejznámější z Pickových doktorandů je K. Löwner, pozdější profesor německé univerzity v Praze a po nucené emigraci profesor na významných amerických univerzitách. (Viz [13].)

V letech 1876–1939 publikoval G. Pick 67 prací. Jejich zařazení do různých oblastí matematiky může být pouze přibližné, nicméně naznačuje Pickovy odborné zájmy: *Lineární algebra* (2), *Teorie invariantů* (4), *Integrální počet* (8), *Komplexní analýza* (18), *Teorie potenciálu* (2), *Diferenciální rovnice* (9), *Integrální rovnice* (2), *Funkcionální*

Prof. RNDr. IVAN NETUKA, DrSc. (1944), Matematický ústav UK, MFF UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: netuka@karlin.mff.cuni.cz

analýza (4), *Geometrie* (5), *Diferenciální geometrie* (10), 3 práce nejsou zařazeny. Další údaje o publikační činnosti G. Picka i úplný seznam prací lze nalézt v [12]. Ještě pro zajímavost: V letech 1911 a 1912 uveřejnil G. Pick v *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* dvě sdělení s názvem *Sur les notions: droites parallèles et translation et sur la géométrie différentielle dans l'espace non-euclidien*.

Pickův vzorec a Schwarzovo-Pickovo lemma

V [9], s. 318, je G. Pick charakterizován jako obětavý učitel s širokým rozhledem, ale nevelkým badatelským přínosem. Každé takové hodnocení je třeba chápat relativně a nemám v úmyslu se pokoušet o kritický rozbor Pickova vědeckého díla. Jakýkoli závěr by nic nezměnil na skutečnosti, že jméno G. Picka není v matematice do dnešních dnů zapomenuto.

Osobně za velmi elegantní považuji *Pickův vzorec* o výpočtu obsahu mnohoúhelníku s vrcholy v mřížových bodech. Připomeňme, že *mřížové body* v rovině jsou body s oběma celočíselnými souřadnicemi, tedy prvky \mathbb{Z}^2 . Předpokládejme, že P je (uzavřený) mnohoúhelník (ne nutně konvexní) s vrcholy v množině \mathbb{Z}^2 , P° je jeho vnitřek, ∂P jeho hranice a $\lambda(P)$ jeho obsah. Počet prvků množiny $\mathbb{Z}^2 \cap P^\circ$ (resp. $\mathbb{Z}^2 \cap \partial P$) označíme $n(P^\circ)$ (resp. $n(\partial P)$). Zde je Pickův vzorec:

$$\lambda(P) = n(P^\circ) + \frac{1}{2}n(\partial P) - 1.$$

Stačí tedy spočítat mřížové body na obvodu mnohoúhelníku a mřížové body uvnitř mnohoúhelníku a hned máme jeho obsah. Poněkud obecnější situaci, kdy mřížové body jsou určeny systémem přímk, které na sebe nemusí být kolmé, uvažoval G. Pick v práci [15] vydané před 100 lety.

Za speciální mnohoúhelník budeme považovat nyní tzv. elementární trojúhelník, tedy takový trojúhelník s vrcholy v \mathbb{Z}^2 , na jehož stranách ani v jeho vnitřku žádné další mřížové body neleží. Uvažujme elementární trojúhelník T s jedním vrcholem v počátku. Potom dvě jeho strany obsahující počátek tvoří bázi vektorového prostoru nad oborem integrity \mathbb{Z} . Matice přechodu od této báze k bázi složené z vektorů $(0, 1)$ a $(1, 0)$ má celočíselný determinant a totéž platí o matici k ní inverzní. Proto tento determinant je v absolutní hodnotě roven jedné. Geometricky to znamená, že rovnoběžník tvořený stranami trojúhelníku T s vrcholy v počátku má obsah roven jedné. Závěr: každý elementární trojúhelník má obsah $\frac{1}{2}$.

Nedávno se mi dostal do ruky krásný důkaz Pickova vzorce; viz [1], s. 61. V mnohoúhelníku P lze provést triangulaci na elementární trojúhelníky. (To je třeba zdůvodnit, neboť obzvláště u nekonvexního mnohoúhelníku to není hned zcela zřejmé.) Po triangulaci vznikne rovinný graf, jehož vrcholy jsou mřížové body obsažené v P a hrany jsou strany elementárních trojúhelníků triangulace. Počet vrcholů označíme n a počet hran označíme e . Graf rozděluje rovinu na f stěn, z nichž jedna je neomezená (doplněk mnohoúhelníku) a každá z dalších $f - 1$ stěn je elementární trojúhelník. Každý z nich, jak víme, má obsah $\frac{1}{2}$, takže $\lambda(P) = \frac{1}{2}(f - 1)$. Počet hran grafu, které leží na ∂P , označíme $e(\partial P)$, počet ostatních hran (ty mají s P° neprázdný průnik)

označme $e(P^\circ)$. Zřejmě je tedy $3(f - 1) = 2e(P^\circ) + e(\partial P)$ a ovšem $e = e(P_0) + e(\partial P)$. Odtud dostáváme $f = 2(e - f) - e(\partial P) + 3$.

Nyní vstupuje do hry *Eulerův vzorec*, pocházející z poloviny 18. století:

$$n - e + f = 2.$$

Z rovností $e(\partial P) = n(\partial P)$, $n = n(P^\circ) + n(\partial P)$ a $e - f = n - 2$ dosazením vyjde $f = 2(n - 2) - n(\partial P) + 3 = 2n(P^\circ) + n(\partial P) - 1$. Protože $\lambda(P) = \frac{1}{2}(f - 1)$, dokázali jsme Pickův vzorec

$$\lambda(P) = n(P^\circ) + \frac{1}{2}n(\partial P) - 1.$$

Poznámka při korektuře: Pěknou aplikaci Pickova vzorce lze nalézt v článku M. KLAZARA: *Bárány and Larman's Combinatorial Approach to the Circle Problem*, KAM-DIMATIA Series 99-420, 1999.

Pickovo jméno se zapsalo prostřednictvím názvu *Schwarzovo-Pickovo lemma* do analýzy v komplexním oboru. Nejprve připomeneme tradiční znění Schwarzova lemmatu o odhadu modulu holomorfního zobrazení jednotkového kruhu U do sebe:

Schwarzovo lemma. *Nechť $f : U \rightarrow U$ je holomorfní funkce, $f(0) = 0$. Potom $|f(z)| \leq |z|$, $z \in U$, a $|f'(0)| \leq 1$.*

Většinou se formuluje tento dodatek: pokud v jedné z nerovností platí znamení rovnosti (pro $z \neq 0$), potom f je otočení okolo počátku. H. A. Schwarz publikoval podobnou větu v r. 1869, na význam tvrzení pro teorii funkcí upozornil C. Carathéodory v r. 1912; srv. [17], s. 214. Standardní použití tvrzení lze nalézt v učebnicích komplexní analýzy, např. [5].

Dříve než přejdeme k Pickovu zobecnění Schwarzova lemmatu, poukáží na jednu jeho málo známou aplikaci. Důkaz následující věty, jejímž autorem je německý matematik E. Study, pochází od T. Radóa z r. 1929 (viz komentář v [17], s. 216). Domluvme se, že pro $0 < r < 1$ označíme U_r otevřený kruh o středu v počátku a poloměru r .

Věta. *Nechť G je konvexní množina v komplexní rovině a f je prosté holomorfní zobrazení U na G . Potom je pro každé $r \in (0, 1)$ množina $f(U_r)$ konvexní.*

Naznačíme *důkaz* této věty. Lze předpokládat, že $f(0) = 0$. Zvolme $0 < r < 1$ a p, q dva různé body množiny $f(U_r)$. Máme dokázat, že každý bod na úsečce spojující body p a q patří do $f(U_r)$. Zvolme tedy $t \in [0, 1]$ a označme $v := (1 - t)p + tq$, $a := f^{-1}(p)$, $b := f^{-1}(q)$. Můžeme předpokládat, že $|a| \leq |b|$ a tudíž $b \neq 0$. Potom pro každé $z \in U$ platí $zab^{-1} \in U$. Definujeme

$$g(z) := (1 - t)f(zab^{-1}) + tf(z), \quad z \in U.$$

Protože G je konvexní, je $g(U) \subset G$ a tedy má smysl definovat zobrazení $h := f^{-1} \circ g$ na U . Potom h je holomorfní zobrazení U do U splňující $h(0) = 0$, neboť $g(0) = 0$ a $f(0) = 0$. Podle Schwarzova lemmatu je $|h(z)| \leq |z|$, kdykoli $z \in U$, speciálně $|f^{-1}(g(b))| \leq |b|$. Ovšem $g(b) = (1 - t)f(a) + tf(b) = v$ a $|b| < r$. Tudíž $f^{-1}(v) \in U_r$, neboli $v \in f(U_r)$.

Schwarzovo lemma samozřejmě říká, že holomorfní zobrazení jednotkového kruhu do sebe zachovávající počátek nezvětšuje vzdálenosti od počátku. G. Pick si uvědomil, že role počátku není významná, pokud v jednotkovém kruhu uvažujeme hyperbolickou vzdálenost $\Delta(w, z) := |z - w|/|\overline{w}z - 1|$, $w, z \in U$, a dokázal v [16] toto tvrzení:

Schwarzovo-Pickovo lemma. *Nechť $f : U \rightarrow U$ je holomorfní funkce. Potom platí nerovnost $\Delta(f(w), f(z)) \leq \Delta(w, z)$, $w, z \in U$.*

V analogii se Schwarzovým lemmatem platí, že pokud nastává v nerovnosti znamení rovnosti pro dvojici různých bodů, pak f je lineární lomená transformace zobrazující U na U (a rovnost pak nastává pro všechny dvojice bodů).

Poznámka při korektuře: Pěkný důkaz Schwarzova-Pickova lemmatu je podán v článku H. S. BEAR: *Part metric and hyperbolic metric*, Amer. Math. Monthly 98 (1991), 109–123. Tamtéž je ukázáno, jak na aplikaci Schwarzova-Pickova lemmatu je možné založit srozumitelnější důkaz Riemannovy věty o konformním zobrazení. Novou aplikaci Schwarzova-Pickova lemmatu lze nalézt v článku A. MONTES-RODRÍGUES: *The Pick-Schwarz lemma and composition operators on Bloch spaces*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. 56 (1998), 167–170. Za zmínku ještě stojí, že Pickovo jméno se vyskytuje již na s. 1 monografie J. B. GARNETT: *Bounded analytic functions*, Academic Press, New York 1981. V této knize je část 2 v kap. I nazvána Pick's Theorem. Je věnována Pickovu výsledku z r. 1916 o holomorfní interpolaci.

G. Pick a A. Einstein

Studium dostupných materiálů nás nenechává na pochybách, že Georg Pick byl v průběhu Einsteinova pobytu v Praze v letech 1911–1912 jeho velmi blízkým kolegou. Shodují se na tom autoři knih o A. Einsteinovi i další prameny. V dopise z 12. 6. 1912 (viz dokument 408 z *Collected papers of Albert Einstein*) A. Einstein např. píše L. Hopfovi: (...) *Vede se nám velmi dobře a všichni se těšíme na Curych. Mrzí mě pouze rozloučení s kolegou Pickem, s nímž jsem se velice spřátelil. Ital by řekl: Sanguis non è aque!*

O vztahu Picka a Einsteina píše také M. Brdička v [3]: *Einsteinův duchovní život se v té době skládal hlavně z vědy a hudby. Spřátelil se s G. Pickem, který byl nejen výborným geometrem ochotným pomoci při nejasnostech absolutního diferenciálního počtu a při jeho aplikacích na geometrizaci fyziky, resp. v položení základů obecné relativity, ale i nevšedním komorním hudebníkem, jenž zprostředkoval Einsteinovi místo ve smyčcovém kvartetu. Přátelské kontakty mezi Pickem a o 20 let mladším Einsteinem nebyly přerušeny ani po Einsteinově odchodu z Prahy, poslední Pickův dopis Einsteinovi do Princetonu je z r. 1939, z doby po okupaci Čech a nedlouho před Pickovým transportem do koncentračního tábora v Terezíně, z něhož se již nevrátil. V témže článku lze nalézt dokonce úvahu, že odborné zaměření G. Picka mohlo hrát roli při Einsteinově rozhodování o přijetí místa: Možná však, že hlavním důvodem Einsteinova pobytu v Praze byly zájmy odborné. Již od r. 1907 Einstein „viděl“ cestu k obecné relativitě, tj. způsob, jak se oprostit od inerciálních systémů, a jako osamělý poutník nastoupil tuto gigantickou pouť. Brzy mu bylo jasné, že jedním z nezbytných cestovních prostředků je Riemannova geometrie. Aby mohl řešit složité fyzikálně geometrické stránky budované*

teorie, potřeboval mít zřejmě jistotu o řadě moderních aspektů čtyř- a vícerozměrných geometrií. V Evropě přicházeli v úvahu dva geometři, T. Levi-Civita v Itálii a G. Pick v Praze. Jak z jazykových důvodů, tak i celkovým životním prostředím se Einsteinovi zřejmě více zamlouvala Praha, a proto mu Lampova nabídka mohla přijít vhod.

Není žádných pochyb o tom, že Pick a Einstein vedli odborné diskuse. Svědčí o tom např. závěrečná poznámka v rozšířeném textu Einsteinovy přednášky z 28. 2. 1914; viz dokument 30 v [10], s. 607: *Na závěr vyslovuji poděkování mému dřívějšímu kolegovi G. Pickovi za jeho poznámky, které výklad věci zásadně zjednodušily.*

Často se v literatuře setkáváme s názorem, že G. Pick přivedl Einsteina k matematickému aparátu potřebnému k dotvoření obecné teorie relativity. Bez komentáře zde uvedeme několik úryvků z různých pramenů: *Během dlouhých procházek se Einstein Pickovi svěřil s matematickými potížemi, s nimiž se setkával při pokusech zobecnit teorii relativity. Již tehdy navrhl Pick jako vhodný matematický nástroj k dalšímu rozvíjení Einsteinovy myšlenky „absolutní diferenciální počet“ italských matematiků Ricciho a Levi-Civity; viz [8], překlad [2], s. 49.*

(...) *A v Praze byl Einstein přiveden k matematickému aparátu, který mu pomohl vyřešit problémy obecné relativity. K tomuto rozšíření jeho znalostí došlo zásluhou o dvacet let staršího Georga Picka, kdysi asistenta Ernsta Macha. Picka a Einsteina spojoval zájem o hudbu. Vytvořilo se mezi nimi silné přátelství, a když Einstein hovořil o svých těžkostech, Pick mu navrhl užít Ricciho a Levi-Civity absolutní diferenciální počet; viz [4], s. 143. Stejně konstatování je uvedeno v [11], s. 113, 114.*

Sám Einstein však v předmluvě k [6] píše toto: *Rozhodující myšlenku o obdobě mezi Gaussovou teorií ploch a matematickým problémem svojí teorie pojal jsem ovšem teprve r. 1912 po svém návratu do Curychu, aniž jsem zprvu znal bádání, jež v tom směru vykonali Riemann, Ricci a Levi-Civita. Na ně byl jsem upozorněn teprve svým přítelem Grossmannem v Curychu.*

Podrobně se k otázce matematického aparátu potřebného k obecné teorii relativity vyjadřuje A. Pais v [14], s. 211. (...) *Ve své přednášce proslouené v Kyotu v prosinci 1922 A. Einstein řekl: „Jestliže všechny [zrychlené] systémy jsou ekvivalentní, pak ve všech z nich nemůže euklidovská geometrie platit. Vzdát se geometrie a ponechat [fyzikální] zákony je totéž, jako popisovat myšlenky beze slov. Co tedy je potřeba hledat? Řešení tohoto problému jsem neznal do roku 1912, kdy jsem si uvědomil, že Gaussova teorie ploch poskytuje klíč k rozluštění této záhady. Uvědomil jsem si, že Gaussovy souřadnice na ploše mají hluboký význam. Avšak v té době jsem nevěděl, že Riemann studoval základy geometrie dokonce mnohem zevrubněji. Najednou jsem si vzpomněl, že Gaussova teorie byla součástí přednášek z geometrie, které jsme jako studenti měli s Geiserem. Uvědomil jsem si, že základy geometrie mají fyzikální podstatu. Můj milý matematický přítel Grossmann byl na místě, když jsem se vrátil z Prahy do Curychu. Od něho jsem se poprvé dozvěděl o Riccim a později o Riemannovi. Tak jsem se svého přítele zeptal, zda by se moje problémy daly řešit pomocí Riemannovy teorie, totiž zda by invarianty elementů křivek mohly úplně určovat veličiny, které jsem hledal.“ Dále A. Pais říká: Věřím, že toto první setkání s diferenciální geometrií sehrálo druhotnou roli v Einsteinových úvahách z r. 1912. Během dlouhých rozhovorů s Einsteinem vyjádřil v Praze matematik Georg Pick domněnku, že potřebný matematický nástroj pro další*

rozvoj Einsteinových myšlenek by se mohl najít v článcích Ricciho a Levi-Civity [8]. Pochybují, že by tato poznámka v oné době učinila na Einsteina jakýkoli dojem. Určitě se v průběhu svého pražského pobytu neobtěžoval studiem těchto důležitých prací. V [2], s. 11, je vyjádřen tento názor: *Není podstatné, že Philipp Frank (a po něm mnoho biografů) vyzdvihuje, jak již v Praze matematik Georg Pick Einsteinovi navrhl, aby v teorii gravitace používal aparátu Riemannovy geometrie („Ricciho a Levi-Civituův absolutní počet“), zatímco Einstein v předmluvě uvádí, že na tuto myšlenku přišel v roce 1912, až po odjezdu z Prahy do Curychu. Hésiodos napsal, že „cenou velkého díla je lopota, a bohové stanovili, že musíš platit předem“. Einstein platil mnoho v Praze. Alespoň myšlenkově, v hledání pojmů a ve formulování principů.*

Pro vývoj fyziky je skutečně nevýznamné, že úlohu Georga Picka v matematické inspiraci Alberta Einsteina obklopuje přece jen určité tajemno. Skončíme tím, co o pocitu tajemna A. Einstein říká ve své knize [7]: *Nejkrásnější, co můžeme prožívat, je tajemno. To je základní pocit, který stojí u kolébky pravého umění a vědy. Komu to není známo, kdo se už neumí divit, neumí žasnout, ten je takřkajíc mrtev a jeho oko vyhaslé.*

Poděkování. Při přípravě přednášky mi byly užitečné materiály, které mi poskytli tito kolegové: doc. RNDr. J. BEČVÁŘ, CSc., Mgr. M. BEČVÁŘOVÁ, Dr., prof. RNDr. J. BIČÁK, DrSc., RNDr. J. FOLTA, CSc., Mgr. J. LUDVÍKOVÁ a RNDr. A. ŠOLCOVÁ. Za pomoc při vyhledávání pramenů děkuji také Archivu Univerzity Karlovy a knihovně Matematicko-fyzikální fakulty UK.

L i t e r a t u r a

- [1] AIGNER, M., ZIEGLER, G. M.: *Proofs from THE BOOK*. Springer, Berlin 1998.
- [2] BIČÁK, J.: *Einstein a Praha*. JČSMF, Praha 1979.
- [3] BRDIČKA, M.: *Einstein a Praha, Česká einsteinovská pohlednice*. Čs. čas. fyz. A 29 (1979), 269–275.
- [4] CLARK, R. W.: *Einstein, The life and times*. Hodder and Stoughton, London 1983.
- [5] ČERNÝ, I.: *Analýza v komplexním oboru*. Academia, Praha 1983.
- [6] EINSTEIN, A.: *Theorie relativity speciální a obecné*. Praha 1923.
- [7] EINSTEIN, A.: *Jak vidím svět*. Československý spisovatel, Praha 1961.
- [8] FRANK, PH.: *Einstein — His life and times*. Alfred A. Knopf, New York 1947.
- [9] HAVRÁNEK, J., POUSTA, Z. (Eds.): *Dějiny Univerzity Karlovy IV (1918–1990)*. Univerzita Karlova, Praha 1998.
- [10] KLEIN, M. J., KOX, A. J., SCHULMANN, R. (Eds.): *The collected papers of Albert Einstein, Vol. 5*. Princeton University Press, Princeton 1993.
- [11] KUZNEČOV, B. G.: *Einstein — život, smrt, nesmrtelnost*. SPN, Praha 1984.
- [12] LUDVÍKOVÁ, J.: *Georg Pick (1859–1942): Život a hlavní směry jeho činnosti* (diplomová práce). Pedagogická fakulta UK, Praha 1997.
- [13] NETUKA, I.: *Karel Löwner a Loewnerův elipsoid*. PMFA 38 (1993), 212–218.
- [14] PAIS, A.: *Subtle is the Lord ... The science and the life of Albert Einstein*. Clarendon Press, Oxford 1982.
- [15] PICK, G.: *Geometrisches zur Zahlenlehre*. Lotos, NF 19 (1899), 311–319.
- [16] PICK, G.: *Über eine Eigenschaft der konformen Abbildung kreisförmiger Bereiche*. Math. Ann. 77 (1916), 1–6.
- [17] REMMERT, R.: *Funktionentheorie 1*. Springer, Berlin 1995.