Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Donald E. Knuth
Nadreálná čísla [Pokračování]

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 23 (1978), No. 3, 130--139

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139926

Nadreálná čísla

Povídka o tom, jak dva bývalí studenti matematiky skrze matematiku ke štěstí došli

Donald E. Knuth, Stanford, California, USA)*

5. Další úspěchy

B. Právě mě něco napadlo. Poslouchej, mohla by existovat dvě čísla, která k sobě nemají vůbec žádný vztah? Myslím to tak, že by

$$x \nleqq y \quad \text{a} \quad y \nleqq x,$$

jako by se jedno z čísel nějak ztratilo z dohledu nebo dostalo do jiné dimenze nebo co já vím. Stát by se to určitě nemělo, ale jak to dokázat?

A. Snad bychom mohli zkusit tu samou techniku, která se nám už jednou osvědčila. Jestliže x a y jsou v tomto smyslu špatná čísla, potom buď nějaké $x_L \geqq y$ nebo $x \geqq$ nějaké y_P.

B. Hm, předpokládejme, že $y \leqq x_L$. Potom jestliže $x_L \leqq x$, dostaneme podle tranzittivního zákona, že $y \leqq x$, ačkoliv jsme předpokládali $y \nleqq x$. Takže $x_L \nleqq x$. Ve druhém případě je $y_P \leqq x$ a úplně stejně by se ukázalo, že $y \nleqq y_P$.

A. No, to je věc! A abychom dokázali, že se tohle nemůže stát, stačí nám dokázat něco, o čem si už dlouho myslím, že platí: každé číslo x musí ležet uprostřed mezi prvky množin X_L a X_P. Tedy

(T2) $$X_L \leqq x \quad \text{a} \quad x \leqq X_P\,.$$

B. Tohle by mělo jít dokázat snadno. Co znamená $x_L \nleqq x$?

A. Buď že existuje číslo x_{LL} z X_{LL} tak, že $x_{LL} \geqq x$, nebo že existuje číslo x_P z X_P tak, že $x_L \geqq x_P$. Ale podle pravidla (1) druhý případ nastat nemůže.

B. Však jsem tušil, že dřív nebo později budeme muset použít pravidlo (1). Ale co se se dá udělat s x_{LL}? Dvojité indexy nemám moc rád.

A. No, x_{LL} je prvek levé množiny čísla x_L. Protože x_L bylo vytvořeno dříve než x, udělejme indukční předpoklad, že $x_{LL} \leqq x_L$.

B. Hm, poslouchám.

A. Zkusme to, $x_{LL} \leqq x_L$ znamená, že $x_{LLL} \ngeqq x_L$ a …

---

*) Pokračování překladu knížky D. E. KNUTHA *Surreal Numbers*, která vyšla v roce 1974 v nakladatelství Addison-Wesley. První část překladu vyšla v čísle 2, zbývající části překladu vyjdou v číslech 4 a 5 tohoto ročníku. Přeložila HELENA NEŠETŘILOVÁ.

B. (ji přeruší) Na tohle už se nebudu dívat, ty tvoje indexy jsou čím dál horší.

A. Ty ale dokážeš člověku pomoct.

B. Vždyť ti pomáhám, říkám ti, aby ses vyhýbala těmhle opentleným indexům.

A. Ale já ... No dobře, máš pravdu, promiň mi, že na to jdu tak hloupě. Víme, že $x \leqq x_{LL}$ a $x_{LL} \leqq x_L$, takže podle tranzitivního zákona je $x \leqq x_L$. Takhle se snad vyhnu dalšímu indexu.

B. Aha, to je ono, x nemůže být $\leqq x_L$, protože to by znamenalo, že $X_L \ngeq x_L$. A to nejde, protože x_L je jedním z prvků X_L.

A. Správně, ale jak víš, že $x_L \leqq x_L$.

B. Já se zblázním ... takhle daleko jsme se dostali a ještě pořád nevíme, že číslo je „jako" ono samo? To snad není možné, to se přece musí dát dokázat jednoduše.

A. Tobě je to možná jasné, ale mě určitě ne. Zkusme přece jenom dokázat, že

(T3) $$x \leqq x\,.$$

To znamená, že $X_L \ngeq x$ a $x \ngeq X_P$.

B. Vždyť to je zase něco jako (T2). Ach jo, to jsme zase tam, kde jsme byli, nepodaří se nám dokázat, že $x \leqq x_L$.

A. Tentokrát to, Bille, půjde. Sám jsi přece dokázal, že z $x \leqq x_L$ vyplývá $x_L \ngeq x_L$ a že tohle neplatí, to se dá ukázat indukcí.

B. Tak fajn, to znamená, že (T3) platí a všechno je v pořádku. Dokázali jsme první půlku (T2): $x_L \leqq x$. Druhá polovička půjde už dokázat úplně stejně jenom s tím rozdílem, že se všude zamění levá strana za pravou a naopak.

A. A jak už jsme říkali dřív, platnost (T2) stačí k tomu, aby všechna čísla byla ve vzájemném vztahu, jinak řečeno

(T4) $$\text{jestliže} \quad x \nleqq y\,, \quad \text{pak} \quad y \leqq x\,.$$

B. Fajn, teď už se tedy nemusíme obtěžovat tím, že bychom něco museli formulovat negativně, protože „$x \ngeq y$" znamená úplně totéž jako „x je menší než y".

A. Ano, je to totéž jako „x je menší nebo jako y, ale není jako y". Můžeme už taky psát

$$x < y$$

místo $x \ngeq y$ a pravidla (1) a (2) budou teď vypadat mnohem líp. Zajímalo by mě, proč je Conway hned takhle nedefinoval. Možná, že to vlastně udělal proto, aby nemusel použít ještě třetí pravidlo, kterým by definoval, co to znamená „menší než". Pravděpodobně se snažil, aby počet pravidel byl co nejmenší.

B. Tak mě, Alice, ještě napadlo, jestli dvě různá čísla mohou být jedno „jako" druhé? Myslím to takhle: může být současně $x \leqq y$ a $x \geqq y$, když množina X_L je jiná než Y_L?

A. Jistě, na něco takového jsme narazili už před obědem, nepamatuješ? Zjistili jsme, že pro $y = (\{-1\}, \emptyset)$ je $0 \leqq y$ a $y \leqq 0$ a asi by se dalo taky ukázat, že $(\{0, 1\}, \emptyset)$ je „jako" $(\{1\}, \emptyset)$.

B. Máš pravdu. Navíc si myslím, že když $x \leqq y$ a $x \geqq y$, pak x a y můžeme pro všechny praktické účely považovat za stejná, protože podle tranzitivního zákona $x \leqq z$ tehdy a jen tehdy, je-li $y \leqq z$; x a y jsou tedy navzájem zaměnitelná.

A. Ještě něco, dostali jsme taky další dva tranzitivní zákony, podívej:

(T5) jestliže $x < y$ a $y \leqq z$, pak $x < z$,
a jestliže $x \leqq y$ a $y < z$, pak $x < z$.

B. Fajn, ale oba vlastně vyplývají okamžitě z (T1), když uvážíme, že „$x < y$" je ekvivalentní „$x \ngeqq y$". Pro důkaz (T5) a (T6) se (T2), (T3) a (T4) vůbec nepotřebují.

A. Řeknu ti, Bille, když se tak dívám, co už jsme všechno dokázali, že mi to připadá moc pěkné. Ani se mi nechce věřit, kolik se toho dá z těch dvou Conwayových pravidel odvodit.

B. Takhle tě, Alice, vůbec neznám. Vždyť ty úplně popíráš vžitý názor, že ženská se do matematiky nemá vůbec plést.

A. Díky, Bille, jsi džentlmen.

B. Přiznám se ti, že si po té naší společné „tvůrčí" práci připadám silný jako lev. Já bych si spíš myslel, že tolik duševní námahy ubije každé fyzické přání, ale je fakt, že už jsem se dlouho necítil tak jako dneska.

A. Vždyť já taky ne.

B. Podívej se, jak zapadá slunce, připomíná mi to plakát, který jsme si spolu jednou koupili. A ta voda!

A. (běží) Tak pojď!

6. Třetí den

B. Teda takhle dobře už jsem se dávno nevyspal.

A. Vždyť já taky ne, ráno jsem se vzbudila a hned jsem byla úplně svěží, to už se mi dávno nestalo.

B. Kdepak jsme to včera skončili, než jsme ztratili hlavu a zapomněli, že nějaká matematika vůbec existuje?

A. (se směje) Myslím, že jsme právě dokázali, že se Conwayova čísla chovají tak, jak by se všechna malá čísla chovat měla: dají se uspořádat do řady tak, že každé číslo je větší než číslo vlevo před ním a menší než číslo vpravo za ním.

B. Tohle že jsme dokázali?

A. No aspoň to, že podle (T4) se čísla, která nejsou jedno jako druhé", dají seřadit. A každé nově vytvořené číslo musí padnout někam mezi ostatní.

B. Takže teď už bychom s třetím dnem neměli mít žádné velké potíže. Báli jsme se, že budeme muset provést 20 × 20 výpočtů, ale určitě se to zredukuje. Podle vět (T2) a (T3) platí, že

Sedm čísel je už tedy umístěných a stačí mezi ně zařadit ta ostatní. Když se nám to teď všechno takhle pěkně zjednodušilo, je to hned lepší zábava než nějaká křížovka.

A. Dál například víme, že číslo  leží někde mezi  a  .

Zkusme ho srovnat s nulou, která leží uprostřed.

B. Hm, tohle číslo je současně $\leqq 0$ a $\geqq 0$, takže podle pravidla (3) musí být jako 0 a jak už jsem říkal včera, je tedy prakticky rovno nule, proto ho klidně můžeme pustit z hlavy. Tím jsme odbyli osm čísel, ale dvanáct nám jich ještě zbývá.

A. Zkusme se zbavit těch deseti případů, kde X_L nebo X_P mají víc než jeden prvek, tak nějak, jak jsem to zkoušela včera dopoledne. V noci jsem dostala nápad, který by nám snad mohl pomoct. Předpokládejme, že $x = (X_L, X_P)$ je číslo a vezměme libovolné množiny čísel Y_L a Y_P, pro které

$$Y_L < x < Y_P .$$

Řekla bych, že x potom bude jako nějaké z, kde

$$z = (Y_L \cup X_L, X_P \cup Y_P) .$$

Jinak řečeno: x se vlastně nemění, když se množiny X_L a X_P zvětšují tak, že se k nim na příslušných stranách přidávají další čísla.

B. To zní docela přijatelně. V každém případě je z číslo, takže podle pravidla (1) bude stejně dřív nebo později stvořeno.

A. Abychom ukázali, že $z \leqq x$, musíme dokázat, že

$$Y_L \cup X_L < x \quad \text{a} \quad z < X_P .$$

Ale to je teď už jednoduché, protože podle (T3) víme, že

$$Y_L < x , \quad X_L < x \quad \text{a} \quad z < X_P \cup Y_P .$$

B. A úplně stejně se ukáže, že $x \leqq z$, stačí jen zaměnit levou stranu za pravou a naopak. Měla jsi pravdu, platí to:

$$\text{(T7)} \qquad \begin{array}{l} \text{jestliže} \quad Y_L < x < Y_P , \\ \text{pak} \quad x \equiv (Y_L \cup X_L, X_P \cup Y_P) . \end{array}$$

(Budu psát „$x \equiv z$", což má znamenat, že x je jako z a myslím tím, že $x \leqq z$ a $z \leqq x$.)

A. Tím jsme dokázali to, co jsme potřebovali. Tak například

a tak dál.

B. To už nám tedy zbývají jenom dva případy:  a .

A. No, (T7) se vlastně vztahuje i na ně pro $x = 0$.

B. Chytrá holka! Tím jsme tedy úplně rozebrali i celý třetí den: v podstatě se od sebe liší jenom těch sedm čísel, která už jsme si zapsali dřív.

A. Zajímalo by mě, jestli totéž nebude platit i pro další dny. Předpokládejme, že po n dnech budeme mít m různých čísel

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_m .$$

Potom snad jediná nová čísla stvořená $(n + 1)$ho dne budou

$$(\emptyset, \{x_1\}), (\{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, (\{x_{m-1}\}, \{x_m\}), (\{x_m\}, \emptyset) .$$

B. Alice, ty jsi fantastická! Jestli se nám tohle podaří dokázat, vyřešíme tím nekonečně mnoho dní na jeden zátah. Vždyť ty předčíš i samotného tvůrce!

A. A co když není ještě jisté, že to skutečně dokážeme?

B. Každopádně vyzkoušejme nějaké speciální případy. Třeba, že číslo $(\{x_{i-1}\}, \{x_{i+1}\})$ se musí rovnat nějakému jinému číslu.

A. Ale to se přece díky (T7) rovná x_i. Podívej, každý prvek X_{iL} je $\leqq x_{i-1}$ a každý prvek X_{iP} je $\geqq x_{i+1}$. Podle (T7) odtud dostaneme

$$(\{x_{i-1}\}, \{x_{i+1}\}) \equiv (X_{iL} \cup \{x_{i-1}\}, \{x_{i+1}\} \cup X_{iP}) .$$

A zase podle (T7)

$$x_i \equiv (\{x_{i-1}\} \cup X_{iL}, X_{iP} \cup \{x_{i+1}\}) .$$

Podle tranzitivního zákona je tedy $x_i \equiv (\{x_{i-1}\}, \{x_{i+1}\})$.

B. (kroutí hlavou) To je neuvěřitelné, Sherlocku!

A. Je to přece triviální, drahý Watsone. Pouhé použití dedukce.

B. Ty tvoje indexy už se mi zase moc nelíbí, ale pro tentokrát to zkusím ignorovat. Co například uděláš s číslem $(\{x_{i-1}\}, \{x_{j+1}\})$, když i bude $<j$?

A. (krčí rameny): Já jsem tušila, že se zeptáš. Nevím.

B. Tvoje zdůvodnění by se dalo krásně použít i pro číslo x, pro které by byl každý prvek $X_L \leqq x_{i-1}$ a každý prvek $X_P \geqq x_{j+1}$.

A. Máš pravdu, toho jsem si nevšimla. Ale na to mohou mít vliv i všechny prvky $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$, které leží mezi.

B. Asi jo ... vlastně ne, mám to! Nechť x je to číslo mezi $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$, které bylo stvořeno první a které je tedy nejstarší. Pak X_L a X_P nemohou obsahovat žádné ze zbývajících čísel, takže $(\{x_{i-1}\}, \{x_{j+1}\}) \equiv x$.

A. Dovol, abych tě políbila.

...

...

B. (se směje) Ještě jsme ten problém úplně nevyřešili, musíme ještě uvážit čísla jako $(\emptyset, \{x_{j+1}\})$ a $(\{x_{i-1}\}, \emptyset)$. Ale v prvním případě dostaneme nejstarší z čísel $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_j$ a ve druhém případě zase nejstarší z čísel $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_m$.

A. A co když není jasné, které číslo je nejstarší? Co když třeba víc než jedno číslo pochází z téhož nejstaršího dne?

B. Kruci ... ale to se vlastně nemůže stát. Důkaz totiž zůstává ještě pořád v platnosti a ukázal by tedy, že obě čísla jsou jedno jako druhé, což není pravda.

A. Tím jsi nádherně vyřešil celý problém pro všechny dny najednou.

B. S tvou pomocí. Takže čtvrtého dne vznikne 8 nových čísel, pátého dne dalších šestnáct a tak dál a tak dál.

A. Ano, tím bude po n dnech stvořeno právě $2^n - 1$ různých čísel.

B. Tak si myslím, že ten kluk Conwayů nebyl vlastně tak moc duchaplný. Vždyť mohl zadat mnohem jednodušší pravidla, která by měla úplně stejný efekt. Vůbec nemusel mluvit o číselných množinách a všech těch ostatních nesmyslech, měl prostě a jednoduše říct, že nová čísla se tvoří mezi sousedními již existujícími čísly a na koncích.

C. **Nesmysl. Počkejte, až se dostanete k nekonečným množinám.**

A. Co to bylo? Slyšel jsi něco? Vypadalo to jako bouřka.

B. Zdá se, že už zase pomalu začnou monzunové deště.

7. Objev

A. Tak to bychom měli vyřešeno všechno, o čem se na desce mluví. Přesto se nemohu zbavit dojmu, že nám toho ještě hodně chybí.

B. Co tím chceš říct?

A. Tak třeba víme, co se stalo třetího dne: byla stvořena čtyři nová čísla. Ale jak je asi Conway nazval?

B. Jedno z těch čísel bylo větší než 1, tak si myslím, že ho nazval „2". Další leželo mezi 0 a 1, tomu mohl říkat „$\frac{1}{2}$" ...

A. To jsem zrovna neměla na mysli. Mě by zajímalo, proč jsou to „čísla". Totiž, aby něco bylo číslo, musí se to dát sečítat, odčítat a tak.

B. (bručí) Aha. Ty si myslíš, že na ulomeném kusu kamene zadal Conway ještě nějaká další pravidla, která by dělala čísla čísly. Všechno, co zatím víme, je, že je dána hromada objektů, které jsou pěkně seřazeny do přímky, ale zatím s nimi neumíme nic dělat.

A. Nejsem vševědoucí, abych věděla, co s nimi Conway udělal dál, jestli s nimi vůbec ještě něco dělal.

B. Pak se teda dál nedostaneme, dokud se nám nepodaří najít zbývající část desky. A já už si ani nepamatuju, kde jsme našli tu první.

A. Spolehni se na mne, všimla jsem si toho přesně. Čistě pro případ, že bychom se chtěli vrátit.

B. Co bych si bez tebe počal? Tak jdeme!

A. Nepospíchej tolik, neměli bychom se napřed trochu naobědvat?

B. Ze samého vzrušení jsem na jídlo úplně zapomněl. Tak jo, rychle něco sníme a dáme se do hledání.

...

A. (kope) Mám silnou obavu, že to takhle nepůjde. Hornina pod pískem je tak tvrdá, že bychom nejspíš potřebovali speciální rypadlo.

B. Nemá to cenu, tímhle nožem to nanejvýš poškrábu. A navíc začíná pršet. Neměli bychom se dát na ústup?

A. Leje opravdu jako z konve. Ale podívej, tamhle pod útesem je jeskyně, přečkáme bouřku tam.

...

B. Tady je ale tma. Au, kopl jsem se o něco do palce. Kruci ...

A. Sláva Bille, ty jsi to našel! Zakopl jsi o druhou půlku Conwayova kamene.

B. (couvne) Sakramente, máš asi pravdu. To už je osud. Ale můj palec není zdaleka tak nadšen jako já.

A. Dokážeš to přečíst, Bille? Je to skutečně to, co hledáme nebo jsi zakopl o něco úplně jiného?

B. Není tu moc vidět. Pomoz mi, vytáhneme to ven na déšť, aby se spláchnul prach ... Páni, tady je napsáno „Conway" a „číslo", určitě je to ono!

A. Fajn, to nás zachránilo, hned máme zase co dělat.

B. Tak, to bychom měli, ale nezlob se, jdu zpátky do jeskyně, tenhle liják nemůže trvat dlouho.

A. (jde za ním) Máš pravdu, promočilo nás to úplně skrz naskrz.

...

B. Tak ti nevím, proč mě ta matematika najednou tak baví, ve škole mě totiž vždycky hrozně nudila. Pamatuješ na starého Landaua? Jeho přednášku jsem z duše nenáviděl: věta, důkaz, lemma, poznámka, věta, důkaz, taková otrava.

A. Já se pamatuju, co mi to vždycky dalo práce, abych neusnula. Ale co bychom si namlouvali, nestane se z naší krásné teorie totéž?

B. Dost možná. Skoro bych měl chuť postavit se jednou před posluchárnu a přednést naše výsledky: věta, důkaz lemma, poznámka. Upravil bych to tak pěkně, že by určitě nikdo nepoznal, jak jsme na to přišli a na všechny by to ohromně zapůsobilo.

A. Nebo by je to pěkně nudilo.

B. To bude asi v tom, že člověk se dokáže pro věc nadchnout, jenom když ji sám objevuje, ale nebaví ho poslouchat to, co objevili jiní.

A. Není to úplně pravda, já se pro tvoje nápady dokážu nadchnout stejně jako pro svoje. Takže v čem je ten podstatný rozdíl?

B. Abych mluvil za sebe, já jsem byl schopen vážit si tvých nápadů hlavně proto, že jsem se právě sám potýkal se stejným problémem.

A. Dřív nás matematika nudila, protože se nás netýkala. Vždycky nám jenom řekli, abychom „absorbovali" to, co udělal někdo jiný, a protože jsme se nikdy nedozvěděli, jak to udělal, neviděli jsme na tom nic zvláštního.

B. Až budu příště číst nějakou matematickou knížku, budu se vždycky snažit, abych sám věděl, jak na to, dřív než se podívám na řešení. I když na to pokaždé sám nepřijdu, pochopím tím alespoň, v čem spočívá krása důkazu.

A. Řekla bych, že by bylo taky dobře snažit se při čtení odhadnout, jaké věty budou následovat nebo aspoň proč a jak je vůbec dokazovat. Člověk by se měl sám vžívat do role objevitele, tvůrčí část je vždycky mnohem zajímavější než vlastní odvození, a naučit se dávat dobré otázky je mnohem důležitější než pouhé hledání správných odpovědí.

B. Něco na tom je. Škoda, že nám naši učitelé nedávali problémy jako „Najděte něco zajímavého o x" místo „Dokažte x".

A. Přesně tak. Ale učitelé jsou hrozně konzervativní, určitě by se báli, aby se nedotkli „biflounů", kteří jim poslušně a mechanicky dělají všechny domácí úkoly. Taky by jim přibylo hodně práce, kdyby museli známkovat odpovědi na takhle široké otázky. Ze studia se skoro až do konce tradičně vypouštějí všechny tvůrčí aspekty. Student je sedmnáct i více let vychováván ke skládání zkoušek, a když už těch zkoušek složí předepsaný počet, pak se mu najednou řekne, aby udělal něco samostatně.

B. Máš pravdu, ale myslíš, že skutečně samostatný student se toho drží až do konce?

A. Nevím, možná, že se občas najde někdo takový, kdo si vymyslí způsob, jak si tenhle školní systém může i oblíbit, třeba tak, jak jsme o tom před chvílí mluvili.

B. Myslím, že jsi moc velká optimistka a představuješ si věci příliš růžově. Ale podívej se, už přestalo pršet. Pojď, odneseme si desku s sebou a zjistíme, co se tam říká.

8. Sčítání

A. Oba kusy se k sobě báječně hodí, tak to snad budeme mít celé. Čti, Bille, jsem už hrozně zvědavá.

B. Tohle se mi překládá daleko hůř, jsou tu nějaká podivná slova, ale snad to bude nějak takhle:

> **... dne. I řekl Conway: „Nechť čísla se k sobě přičítají tímto způsobem: Levá množina součtu dvou čísel budiž tvořena součty všech levých částí každého čísla s číslem zbývajícím a stejným způsobem pravá množina budiž z pravých částí, každá podle druhu svého." Dokázal Conway, že každé číslo přičteno k nule zůstává nezměněno a viděl, že sčítání je dobré. A byl večer a bylo ráno, den třetí.**
>
> **I řekl Conway: „Nechť zápor nějakého čísla má jako svoje množiny zápory opačných množin tohoto čísla a nechť odčítání je přičítání záporu." A stalo se. Dokázal Conway, že odčítání je opakem sčítání a to bylo velmi dobré.**
>
> **A byl večer a bylo ráno, den čtvrtý.**
>
> **I řekl Conway číslům: „Buďte plodná a násobte se. Nechť část prvního čísla je násobena druhým číslem a přičtena k součinu prvního a části druhého čísla a nechť součin těchto částí je odečten. Toto budiž uděláno všemi možnými způsoby, jsou-li obě části stejného druhu, bude získáno číslo z levé množiny součinu, ale z pravé množiny, jsou-li druhu opačného." Dokázal Conway, že každé číslo násobeno jednou zůstává nezměněno.**
>
> **A byl večer a bylo ráno, den pátý.**
>
> **A ejhle! Když byla čísla tvořena nekonečně mnoho dní, objevil se samotný vesmír.**
>
> **A byl večer a bylo ráno, den $\aleph$.**
>
> **I přehlédl Conway všechna pravidla, která pro čísla stvořil a viděl, že jsou velmi, velmi dobrá. I nařídil jim, aby souhlasila se znaménky a řadami a podíly a kořeny.**

Tu potom povstalo nekonečné číslo menší než nekonečno. A nekonečna dnů dala vznik násobným řádům nekonečen.

To je celé.

A. To je ale podivný konec. A co je to „alef den“?

B. No, alef je hebrejský písmeno a je tu napsáno jenom tak samo, podívej: ℵ. Asi to znamená nekonečno. Tak do toho, přijít tomuhle na kloub nebude žádná legrace.

A. Mohl bys to třeba napsat, než udělám večeři? Sama si to přečíst nedokážu a pamatovat si to všechno člověk nemůže, je toho moc.

B. Tak jo, aspoň si to přitom taky sám ujasním.

...

A. To je zvláštní, o těch čtyřech číslech, co měla být stvořena třetí den, nikde ani zmínka. Ještě pořád by mě zajímalo, jak jim Conway říkal.

B. Možná, že na to přijdeme, až vyzkoušíme pravidla pro sčítání a odčítání.

A. Jo, jestli na ně vůbec přijdeme.Pojď zkusit, jestli se nám podaří dostat pravidlo pro sčítání do symbolického tvaru. Mohli bychom tak zjistit, co znamená ... Myslím, že ,,stejného druhu“ musí prostě znamenat, že levá část patří k levé a pravá k pravé. Co bys řekl tomuhle:

$$x + y = \big((X_L + y) \cup (Y_L + x),\ (Y_P + x) \cup (X_P + y)\big). \tag{3}$$

B. Vypadá to příšerně. A co to vůbec znamená?

A. Abys dostal levou množinu $x + y$, vezmeš všechna čísla tvaru $x_L + y$, kde x_L je z X_L, a taky všechna čísla $y_L + x$, kde y_L je z Y_L. Pravá množina je vytvořena stejným způsobem z pravých částí.

B. Aha, ,,levá část“ x je tedy prvek X_L. Vypadá to, že tvoje symbolická definice odpovídá Conwayově slovní formulaci.

A. A navíc má smysl, protože každé $x_L + y$ nebo $x + y_L$ by mělo být menší než $x + y$.

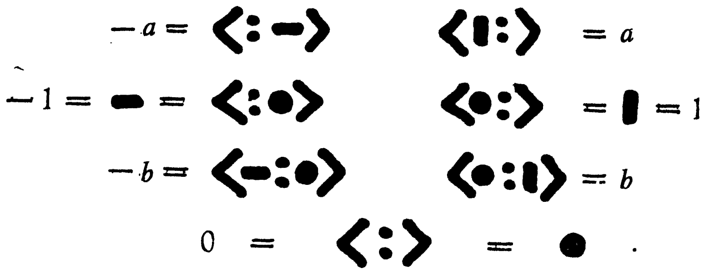
B. Dobře, zkusím zjistit, jak to vyjde. Vidím, že tomu říkáš pravidlo (3).

A. Víme tedy, že po třetím dni existuje sedm čísel, říkejme jim třeba 0, 1, -1, a, b, c, d.

B. Počkej, napadlo mě, že bychom mohli využít symetrie a nazvat je

$$-a < -1 < -b < 0 < b < 1 < a\,,$$

kde



A. To se ti moc povedlo. Určitě máš pravdu, protože další Conwayovo pravidlo zní

$$-x = (-X_P, -X_L)\,. \tag{4}$$

B. Je to tak! Teď můžeme začít čísla sčítat. Kolik je třeba $1 + 1$ podle pravidla (3).

A. Spočítej to ty, já zatím zkusím $1 + a$.

B. Tak jo, dostávám $(\{0 + 1, 0 + 1\}, \emptyset)$, $0 + 1$ je $(\{0 + 0\}, \emptyset)$ a $0 + 0$ je $(\emptyset, \emptyset) = 0$. Báječně nám to vychází, $1 + 1 = (\{1\}, \emptyset) = a$, však jsme si už dřív mysleli, že a bude 2.

A. Gratuluju, Bille, vymyslel jsi nejdelší důkaz toho, že $1 + 1$ jsou 2.

B. Už jsi někdy viděla kratší?

A. Vlastně neviděla. Ale podívej, tvoje výpočty pomohly i mně. Dostávám $1 + 2 = (\{2\}, \emptyset)$, to je číslo, které bylo stvořeno až čtvrtý den.

B. Navrhuju, abychom mu říkali „3“.

A. Prima, pravidlo (3) tedy pracuje. Zkusme, jestli b je $\frac{1}{2}$, spočítáme $b + b \ldots$

B. Hm, je to nějaké špatné. Vychází mi $(\{b\}, \{b + 1\})$, tohle číslo nebylo ještě stvořeno.

A. $b + 1$ je $(\{b, 1\}, \{2\})$, to je jako $(\{1\}, \{2\})$, které bude stvořeno čtvrtý den, a $b + b$ se tedy dostane na řadu až pátý den.

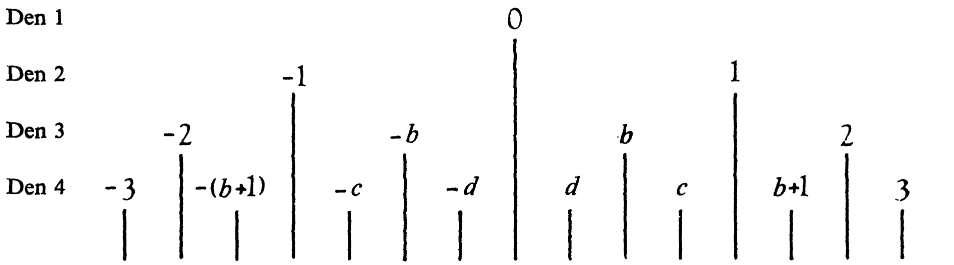
B. Neříkej mi, že $b + b$ se bude rovnat nějakému dalšímu číslu, které ještě není pojmenované.

A. Tak co teď?

B. Vymysleli jsme teorii, která nám říká, jak spočítat všechna čísla tak, jak jsou postupně tvořena; měli bychom to tedy umět taky udělat. Nakresleme si tabulku pro první čtyři dny.

A. Ale Bille, to je spousta práce.

B. Není, schéma je úplně jednoduché, podívej:



A. Už to vidím, $b + b$ je $(b, b + 1)$, je tedy tvořeno čísly, která spolu nesousedí. Potom podle naší teorie bude $b + b$ rovno nejstaršímu číslu mezi b a $b + 1$.

B. A to je 1, protože jednička je starší než c.

A. b je tedy skutečně $\frac{1}{2}$, i když jeho numerická hodnota se zavádí až od dva dny později. To je úžasné, kolik se toho dá odvodit z několika pravidel. Ani tomu nemohu věřit, jak těsně spolu všechno navzájem souvisí.

B. Řekl bych, že d je $\frac{1}{3}$ a c je $\frac{2}{3}$.

A. Bille, já už vůbec nemohu. Pojď, vyspíme se na to, sluníčko už zapadá a času máme přece spoustu.

Pokračování překladu v dalším čísle