Hirsh Cohen

Aplikace matematiky, výpočty a složitost problémů

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 20 (1975), No. 3, 146--153

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139868

Aplikace matematiky, výpočty a složitost problémů*)

Hirsh Cohen, New York

V této přednášce chci hovořit o některých otázkách, které nepatří přímo do aplikované matematiky, ale týkají se pracovníků v tomto oboru a jejich činnosti. V našem povolání je měřítkem úrovně článku stručnost vyjadřování, svižnost matematických postupů a harmonické sepětí s reálným světem. Můj článek bude poněkud upovídaný a přitom chudý a neobratný po matematické stránce. Byl bych rád přijal výzvu profesora Davise k filozofickému přístupu, ale měl jsem vždycky pocit, že je to nebezpečný způsob chování na veřejnosti. Předkládám tyto poznámky jako průmyslový matematik a jako jeden z „Old Browns", ze starých žáků Brownovy univerzity.

Když jsem před téměř 25 lety přišel na Brownovu univerzitu, zdál se svět mladému aplikovanému matematiku poněkud odlišný od toho, jak jej vidí nyní aplikovaný matematik středního věku. Bylo tehdy jasné, že na Brownově univerzitě je třeba učit mechanice kontinua a s ní související teorii komplexních funkcí a teorii diferenciálních rovnic. Začínali jsme se potýkat s problémy mechaniky kapalin, pružnosti a plasticity, které von Karman nadhodil ve své přednášce v roce 1940 [1]. Nebyli jsme ještě „vyzbrojeni" k útoku na nelineární problematiku, jak to požadoval v prvním čísle časopisu Quaterly of Applied Mathematics [2], ale začínali jsme chápat její důležitost. Ke konci čtyřicátých let jsme měli na Brownově univerzitě pocit, že stojíme na počátku čehosi – a skutečně to byl počátek – pocit, že existuje nesmírné množství nerozřešených problémů v aerodynamice, chvění a aeroelasticitě, v proudění vazkých kapalin a v teorii mezních vrstev, plasticity i vibrací. Bylo zřejmé, že to vše jsou problémy, kterým je vhodné se věnovat, protože někdo někde potřeboval jejich řešení nebo proto, že byly obtížné, nebo že se k nim právě v příslušném oboru dospělo nebo prostě proto, že tu byly.

Byli jsme (a jsem si samozřejmě vědom shovívavého zkreslení, k němuž dochází při pohledu zpět) optimistická parta, která měla silnou důvěru ve výsledky, techniku a způsob myšlení několika generací evropských aplikovaných matematiků. Pro americkou vědu byla tehdy aplikovaná matematika dost novým oborem, nepříliš početným a nepříliš populárním, ale zřejmě s dobrými předpoklady a možnostmi růstu. Kromě toho, když tehdejší vědci uvažovali o použití matematiky, měli obvykle na mysli aplikace klasické analýzy na problémy fyzikálních věd.

V jednom rohu domu na Brownově ulici 27 byla velká místnost plná děvčat a strojů – našich počítačů. Byl to malý, ale velmi čilý a nezbytný podnik. Jiným důležitým místem bylo softballové hřiště a dům na Benevolent Street, kde se odbývaly v pátek odpoledne pokolokviální schůzky.

---

*) *Mathematical Applications, Computation and Complexity*. Quat. of Appl. Math., April, 1972. Spec. issue: Symposium on "The Future of Applied Mathematics". Přeložil Jiří Jarník.

Než nás přemůže stesk, řekněme si, co se s tím vším stalo. Jaká je situace dnes?

Myslím si, že základní změna v průběhu těchto 25 let nastala v tom, že potřeba matematiky a její použití velmi rychle a dramaticky vzrostly. Vědě se všeobecně dostalo obrovské podpory; matematika jako celek se na ní podílela; a totéž platí o aplikované matematice. Státní i průmyslové technologické podnikání rozkvétalo a společně s ním rostl počet lidí zabývajících se aplikacemi matematiky.

Z velké části se tento vývoj týkal matematických metod mechaniky kontinua, a proto vedl ke studiu nelineárních problémů, na něž poukázal von Karman. Avšak počínaly se rozvíjet i jiné oblasti matematiky. Rychle se rozvíjely nové metody diskrétní optimalizace, například lineární programování. Do obliby přicházela řada jiných aplikovaných kombinatorických odvětví – teorie her, teorie grafů, teorie hromadné obsluhy, s aplikacemi v rozmanitých vojenských, obchodních, ekonomických a politických operacích. Teorie regulace ve své spojité i diskrétní formě byla aplikována na mnohé průmyslové a konečně i společenské procesy, třebaže původním podnětem jejího rozvoje byly potřeby letectví. Došlo k praktickému i teoretickému pokroku i tak staré vědy, jako je numerická analýza. Operační výzkum a systémová analýza začínaly tak či onak dobývat dříve nematematizovaná odvětví. S růstem počtu pracovníků zabývajících se těmito odvětvími se rozšiřovala také oblast jejich aplikací.

Avšak největší vliv na aplikovanou matematiku měl rozvoj počítačů. Koncem čtyřicátých let pracovalo naše výpočtové středisko na Brownově univerzitě obvykle se vzorci, které byly výsledkem rozsáhlé analýzy a úprav. Postupně, jak se počítače zrychlovaly, mohly zpracovávat větší počet uložených dat a získávaly více vstupních a výstupních příslušenství, bylo více problémů formulováno tak, aby mohly být řešeny numericky v časnějším stadiu. Naučili jsme se nyní, že množství analytické práce na problému musí být pečlivě vyváženo s možnostmi početního zpracování. Existují skupiny problémů (např. v matematickém programování), jejichž rozsah ukazuje jasně od počátku, že řešení počítačem je nevyhnutelné. V některých moderních problémech vzniklých ve fyzice, které jsou formulovány pomocí diferenciálních rovnic, nelze v některých případech vůbec uspět přibližnými metodami aplikované matematiky. To může být sice vinou rozsáhlosti problému, ale pravděpodobněji vlivem silných nelinearit nebo i velmi složitého lineárního vzájemného působení.

Jsou ještě jiné druhy problémů, ve kterých si nejsme jisti dokonce ani jejich formulací. Samotný model může být pochybný. S pomocí počítače jsme dnes schopni experimentovat s formulacemi, zkoumat numerická řešení a zkoušet nové formulace výběrovým způsobem. Užitečné a zajímavé problémy „černé skříňky“ tohoto druhu nacházíme v technice, biologii, ekologii a jinde.

Konečně, jestliže je pouze předložen problém a nemáme ani jeho matematický model ve tvaru soustavy rovnic, existuje soubor postupů, který nazýváme simulací. Ty mají často co dělat s pohybem částic nebo jejich analogií (pohyb automobilů, válečného personálu nebo dopravních prostředků) a často nás dovedou k matematickému modelu.

Všechny tyto možnosti použití počítače ve starých i nových oblastech aplikované matematiky si podle mého názoru přivlastňují některé z funkcí aplikovaného matematika. Jsou prostě některé formulace, některé rozbory i postupy řešení, které se snáze a rychleji zvládnou početně.

Dovolte mi, abych v tomto okamžiku vyvodil z uvedeného popisu změn za poslední čtvrtstoletí dva důsledky. Zaprvé, aplikace matematiky na fyzikální problémy a speciálně na problémy mechaniky kontinua zůstávají i nadále podnětným a plodným polem pro aplikované matematiky. Nicméně, ačkoliv jejich rozsah nepochybně vzrůstá, staly se dnes již jen malou částí celkového použití matematiky a pravděpodobně se bude jejich podíl dále zmenšovat. Zadruhé, počítač převzal mnoho práce aplikovaného matematika.

Obě tyto poznámky naznačují změnu v tom, čím se aplikovaní matematici zabývají a zvláště v tom, jak bude třeba vychovávat aplikované matematiky pro budoucnost.

Zdá se mi, že naše reakce by měla být:

1. Rozšířit výuku směrem k novým oblastem aplikací. To znamená uznat, že aplikace matematiky na fyzikální vědy představují dnes jen malou část použití matematiky.

2. Pochopit, že výpočty jako takové se musí studovat jako základní část aplikované matematiky; nejen numerická analýza, ale mnohem širší pohled na celý výpočtový proces.

1. Nové aplikace

Jestliže se trochu rozhlédneme, je snadné nalézt matematické aplikace téměř v každé lidské činnosti. Nehovořím teď o hromadném zpracování dat, ačkoliv podle mého názoru toto téma představuje jeden okraj spektra činností formulovaných matematicky. Jak jsem se zmínil jinde ([3]), matematika má dlouhou historii ve fyziologii. Používá se i v jiných oblastech biologie a lékařství. Existuje známá teorie manželství ([4]) v sociologii, práce v lingvistice ([5]), ekonomii, v mnohých oblastech obchodu a podnikání, i řada témat, která lze studovat v rámci operačního výzkumu a systémové analýzy. Avšak nikde se nedosáhlo takových úspěchů jako ve fyzikálních vědách. Je to proto, že matematika a fyzika vyrůstaly společně? Je to proto, že tuto oblast světového dění potřebovalo lidstvo pochopit nejnezbytněji, a proto v tomto směru vyvinulo největší úsilí? Nebo je to proto, že v našich prostorových a časových měřítkách se právě tyto fyzikální otázky snáze převádějí na matematický tvar a řeší? Domnívám se, že skutečnost, že jsme tak dlouho vystačili s lineárním popisem fyzikálních jevů, hovoří pro poslední názor.

Ať již jsou důvody jakékoliv, k největší invazi výpočetní techniky dochází právě v těch oblastech, kde matematika dosáhla největších úspěchů. Na počátku tohoto století byl rozvoj analytických metod vlastních čísel v podivuhodném souladu s potřebami a nalezl své uplatnění v kvantové mechanice a v oblastech vibrační a spektrální teorie. Dnes se provádějí rozsáhlé výpočty při řešení Schrödingerovy rovnice i v jiných oblastech mechaniky kontinua. Dá se říci, že takové výpočty jsou dnes standardní částí projekčních metod v aerodynamice, stavebnictví, nukleární energii atd. V meteorologii, oceánografii, geofyzice, hydrologii, v perturbační teorii a jinde říká přibližné řešení tak málo o složitém jevu, že pracovníci v těchto oborech dávají přednost rozsáhlým a úplným výpočtům.

Jestliže je skutečností, že klasická oblast činnosti aplikovaného matematika se velmi značně posunula směrem k výpočtům, pak ti, kdo chtějí i nadále používat oblíbených přibližných metod aplikované matematiky, se budou muset porozhlédnout po nových možnostech aplikací. Obdobně věřím, že ti, jejichž činnost spočívá ve formulaci problémů, musí přenést tyto účinné přibližné metody – singulární a regulární poruchy, integrální aproximace, srovnávací metody atd. na úrodnější půdu.

Jak to provést? Určitě to neznamená jen prostě „sebrat svých pět švestek" a přejít k novým tématům.

Domnívám se, že je nezbytné matematicky proniknout do nových oblastí možné aplikace do téže hloubky, jaké se dosáhlo ve fyzikálních vědách. Aplikovaní matematici dospěli k rozsáhlým znalostem v dynamice kapalin. Z toho vzešla přesná a podrobná vyšetření velmi složitých jevů. Dnes pozorujeme, jak tato hluboká matematická znalost je přenášena na oceánografii, astrofyziku, meteorologii a jiné oblasti fyzikálního světa, které závisí velmi silně na proudění kapalin. Avšak nezdá se mi, že by stejné úsilí bylo vynakládáno na aplikování matematických postupů dynamiky kapalin na problémy krevního oběhu nebo desalinizace. To bude vyžadovat, aby ti, kdo chtějí skutečně podstatně matematicky přispět k řešení těchto problémů, pronikli mnohem seriózněji do těchto oblastí. Věřím, že stejné úsilí je nezbytné, aby se matematika stala účinnějším prostředkem v sociálních vědách a v sociálním podnikání. Místo abychom pracovali na okraji těchto oblastí, budeme se muset o nich naučit právě tolik jako specialisté v těchto společenských vědách. Jako příklad bych uvedl, že moji spolupracovníci připravili některé pomůcky, většinou výpočetní programy, použitelné při zkoumání některých hledisek výstavby městských sídlišť ([6]). Abychom porozuměli tomu, kde je místo těchto výpočtů (které se již ukázaly být užitečnými pro některé společnosti, zajímající se o ekonomiku stavebnictví) v celém spektru problémů, musíme se něco naučit jak o sociologických, tak i finančních hlediscích stavebnictví a pravděpodobně poměrně hodně i o stavebních a architektonických faktorech.

Jestliže uvažuji správně, je z toho pravděpodobně možno vyvodit, že výuka aplikované matematiky musí aspoň pro někoho zahrnovat seriózní výpravy do společenských a politických oblastí. Samozřejmě to bude těžké uskutečnit na katedrách matematiky nebo aplikované matematiky a nepochybně, jak se to často stává v aplikované matematice, počátky této práce se objeví v samotných aplikačních oborech.

Tak či onak, abychom povzbudili jiné obory k jejich vlastní matematizaci, musíme vyučovat matematice takovým způsobem, který bere ohled na jejich potřeby. Objevily se již jisté náznaky. Např. jako součást rozvoje biomatematiky byly zavedeny na Cornellově lékařské fakultě a v Sloan-Ketteringově ústavu pro výzkum rakoviny v New Yorku postgraduální kursy pro studenty lékařských věd (příprava na doktorát v biochemii, fyziologii, farmakologii atd.). Tyto kursy měly formu studia problémů z různých oblastí biologie a medicíny, v nichž je možno dospět ke zřejmě užitečným výsledkům použitím diferenciálních rovnic, pravděpodobnostních metod, teorie matic a vlastních čísel atd. Je důležité ukázat užitečnost výsledků; z vlastní zkušenosti vím, že posluchači medicíny projevují velmi málo nadšení pro řešení nelineárních parciálních diferenciálních rovnic pro nervové vzruchy, jestliže mohou tyto procesy doslova vidět na osciloskopu.

Na lékařských školách a univerzitách se objevily i jiné kursy tohoto typu. Budou hrát užitečnou roli. Avšak nenahradí proniknutí, o němž jsem hovořil. Nevidím pro mladé pracovníky v aplikované matematice jiné cesty než získat co nejvíce znalostí z ostatních oborů.

Chtěl bych se zmínit ještě o jednom důsledku změn v aplikované matematice. Chtěl bych tvrdit, že jsme se až dosud zabývali poměrně jednoduchými systémy. Obrátíme-li se k jiným vědám než fyzikálním, setkáme se s větší složitostí ve struktuře a vztazích, s větším počtem proměnných a často, jak se zdá, s vyšším stupněm vzájemného působení, a tedy s nelineární závislostí. Nemohu to dokázat. Možná, že je to jen zdání, protože jsme dosud nepochopili, jak zjednodušit a strukturalizovat jiné oblasti tak, jak jsme to dokázali ve fyzikálních vědách.

Je jasné, že nemáme dokonce ani dobrá měřítka obtížnosti takového rozboru. Co se týče matematiky ve fyzikálních vědách, existují dalekosáhlé fyzikální zákonitosti pevně spjaté s pojmy entropie, práce atd., které nám umožňují hledat optima, měřit účinnost samotných fyzikálních procesů, a tím i metod řešení problémů. V jiných vědách nebo v mimovědecké činnosti tomu tak není. Můžeme usilovat o dobro lidstva, snažit se o nejrychlejší řešení, o zvýšení zisku, o rovnoměrnější rozdělení zboží, o zvýšení demokratické účasti, o ulehčení života nebo prostě o přežití. To všechno jsou samy o sobě chvályhodné cíle, avšak jak zkoumat obtížnost řešení problémů? Jak blízko se dostáváme k řešení? Jak účinná a účelná jsou získaná řešení z daných hledisek a jak účinné jsou naše metody získání těchto řešení?

Dovolte mi uvést několik příkladů z neurofyziologie. Ve svých pracích [3], [7] jsem ukázal, že existuje rozumná teorie šíření nervových vzruchů membránami nervových vláken. Nelineární systém parciálních diferenciálních rovnic, které tento proces popisují, používá přímo fyzikálních vztahů a empirických chemicko-kinetických údajů a předpokladů. Všeobecně známý tvar Hodgkinových-Huxleyových rovnic platí pro nervovou membránu, která je spojitá a spojitě přenáší impulsy. V našem těle stejně jako v nervových systémech většiny obratlovců je však nervová membrána podél nervového vlákna přerušena. Energie potřebná pro šíření vzruchů vstupuje ve skutečnosti pouze v těchto přerušeních, která se nazývají Ranvierovy uzly. Napětí na membráně se mezi uzly řídí pasívní difúzní rovnicí. V každém uzlu se z nelineárního systému stane soustava obyčejných diferenciálních rovnic. Protože vzdálenost mezi uzly je aspoň 2 mm, zatímco uzly mají délku asi 1 μ, můžeme je považovat za body na přímce. Chtěli bychom najít způsob, jak vypočítat průběh šíření nervových vzruchů, zejména jak je ovlivňován změnami vzdálenosti uzlů, chemickým prostředím, poškozením membrány atd.

Rovnice popisující napětí $v(x, t)$ na membráně mezi uzly má tvar

$$(1) \qquad C(\partial v/\partial t) + (v/r_s) = (a/2r_i)(\partial^2 v/\partial x^2), \quad x_i < x < x_{i+1},$$

kde x_i jsou souřadnice uzlu, C kapacita membrány ($\mathrm{fd/cm^2}$), r_s měrný příčný odpor membrány ($\mathrm{ohm/cm^2}$), r_i měrný odpor materiálu uvnitř vlákna ($\mathrm{ohm/cm}$) a a poloměr nervového vlákna.

V uzlech $x = x_i$ je napětí $v = v_i(x_i)$ dáno rovnicemi

$$C_n(\partial v_i/\partial t) + I_m(v, m, n, h) = I_i,$$

$$I_m = m_i^3 h_i \bar{g}_{Na} v_i \frac{[\exp(v_i - \bar{v}_{Na}) - 1]}{\exp(v_i) - 1} + \bar{g}_K n_i^4(v_i - \bar{v}_K) + I_L,$$

$$I_i = \left(\lim_{x \to x_i+} (\partial v/\partial x) - \lim_{x \to x_i-} (\partial v/\partial x)\right)(1/r_n),$$

$$I_0 = (1/r_n)\left(r_n I_e(t) + 2 \lim_{x \to 0} (\partial v/\partial x)\right),$$

$$\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = (1/\tau_m(v_i))\,(m - m_\infty(v_i)),$$

$$\mathrm{d}h/\mathrm{d}t = (1/\tau_h(v_i))\,(h - h_\infty(v_i)),$$

$$\mathrm{d}n/\mathrm{d}t = (1/\tau_n(v_i))\,(n - n_\infty(v_i)),$$

kde C_n je kapacita uzlu, I_m proud v membráně, I_0 znamená impuls I_e v bodě $x = 0$, r_n je měrný odpor uzlu, m, h, n jsou proměnné popisující chování iontových proudů sodíku a draslíku, $\bar{g}_{Na}$, $\bar{g}_K$, $\bar{v}_K$, $\bar{v}_{Na}$ jsou konstanty související s těmito proudy, $\tau_m(v)$, $\tau_h(v)$, $\tau_n(v)$, $m_\infty(v)$, $h_\infty(v)$, $n_\infty(v)$ jsou empirické funkce, které lze pro každý typ nervového vlákna změřit v uzlech a I_L je lineární funkce napětí, která popisuje proudění ostatních iontů (vyjma sodík a draslík).

Předpokládejme, že z lineární difúzní rovnice (1) nalezneme napětí v každém úseku mezi uzly. Řešení lze zapsat pomocí okrajových podmínek pro (neznámé) napětí v obou krajních uzlech uvažovaného úseku. Z tohoto vyjádření lze vypočítat derivace v x_i^+ a x_i^- a použít je k vyjádření I_i. Jestliže předpokládáme, že se vzruch šíří v uzlech rychlostí Θ, platí

$$\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} + k\frac{C}{C_n} r_s I_m(v_i) = k\frac{C}{C_n}\frac{r_s}{r_n}\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \int_0^t \exp\left(-k(t-\lambda)\right).$$

$$.\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2}(t-\lambda)\right)\left(2v_i(\lambda) - (-1)^n v_i\left(\lambda + \frac{l}{\Theta}\right) - (-1)^n v_i\left(\lambda - \frac{l}{\Theta}\right)\right)\mathrm{d}\lambda,$$

kde $k = 2r_i/ar_s$ a l je délka úseku mezi uzly. Problém nalezení průběhu vzruchu jako funkce času a určení hodnoty Θ, odpovídající tomuto průběhu, je převeden na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic. Jde o nelineární problém vlastních čísel, protože I_m závisí nelineárně na v_i.

V této formě není snadné řešit uvedený problém analyticky; je možno buď řešit numericky obyčejnou diferenciální rovnici, nebo se vrátit k původním rovnicím a ty řešit numericky. Můžeme také použít přibližného řešení, jestliže uvážíme lineární změnu napětí mezi uzly (předpokládajíce, že funkce uzlového napětí se mění pomalu). Bylo by zajímavé najít analytický vztah mezi Θ, rychlostí šíření vzruchu, vzdáleností sousedních uzlů l a elektrickými a chemickými parametry. Toho však dosud nebylo dosaženo. Podle mého názoru je to příklad zajímavého problému, v němž analytické aproximace pravděpodobně nelze dovést příliš daleko.

Výpočet původní soustavy byl proveden FITZHUGHEM ([8]) a HARDYM ([9]). Hardy ukazuje, jak je rychlost šíření ovlivněna chemickými a elektrickými změnami. Důvod, proč jsem se o tomto problému zmínil, je však ten, že jakmile máme po ruce takovýto výpočet, můžeme začít klást otázky týkající se konstrukce nervového vlákna. Proč jsou vzdálenosti mezi uzly právě takové, jaké jsou? Umožňuje to nejvyšší rychlost šíření vzruchu? Nebo je tím spíše dosaženo nejvyšší celkové spolehlivosti přenosu informace ve formě vzruchu? Existuje v organismu všeobecný princip „přežití", který platí „v malém" pro jednotlivé nervové vlákno obdobně jako platí zákony rovnováhy v mechanice?

Závisí přežití na minimalizaci energie nebo je třeba pozorovat organismus v jeho vztahu k okolí a vnitřní potřebě energie, abychom pochopili přežití? A tak dále.

Navzdory těmto všem otázkám je vidět, že fyzikální i chemický charakter jednotlivého nervového vlákna či aktivní svalové membrány (která se řídí podobnými rovnicemi) i jejich měřitelné fyziologické funkce mohou být vcelku úspěšně zvládnuty klasickými metodami diferenciálních rovnic. Zpracování informace, zprostředkované šířícími se vzruchy, se asi také dá zvládnout metodami zpracování signálů a hluku ([10]) teorie komunikace. Obtížnější je zvládnutí malých souborů nervů a vzájemného působení nervů a svalů ([11]), ale dá se předpokládat, že smyslovou činnost jako zrak a sluch zvládneme, až dostaneme více experimentálních údajů. Velké soubory nervových vláken, které vykonávají vyšší nervové funkce, jsou zatím nad naše možnosti. Je možno studovat matematicky paměť? Můžeme stroze matematickou cestou vyjádřit vztah mezi chováním a nervovou reakcí? Domnívám se, že ano, ale nejsem si vůbec jist, že to dokážeme klasickou analýzou, která stačí na jednotlivá nervová vlákna. Potřebujeme nové matematické struktury. Avšak dříve potřebujeme matematiky, kteří by byli v takových oborech, jako je neurofyziologie, mnohem více doma.

Matematika fyzikálních věd má dostatečně pevné základy a je dostatečně hluboce propracována, aby dovolovala nějakým způsobem měřit složitost fyzikálních jevů. Naučili jsme se sestavovat soustavy rovnic, které popisují přirozené nebo experimentálně řízené chování tak, že je zřejmý stupeň aproximace, který poskytují. Velmi úplná soustava meteorologických rovnic bude brát v rovnicích zachování hmoty, momentu a energie v úvahu důsledky záření a chemických změn, rozmanité vzájemné vlivy pevnin a oceánů, směsi plynů a kapalin a fázová posunutí. Rozměrová analýza a empirická znalost mnoha faktorů nám dovoluje sestavit přibližné soustavy. Mohou to být aproximace pro rozdílná měřítka jevu (velké globální cyklony nebo lokální chování nad obilnými poli), pro rozmanité meteorologické zóny (chování hurikánů poblíž rovníku) nebo např. pro různé stupně vertikálního rozvrstvení (dvojhladinové modely pro globální chování, 23hladinové modely pro vyšetřování tzv. skleníkového jevu). V těchto i v jiných takových otázkách jsme se naučili chápat aproximace konec konců ve smyslu různých druhů rozvojů, poruch či asymptotického chování, takže máme jisté měřítko, jak složitý je řešený problém ve srovnání s celým zadaným problémem. Avšak je důležité upozornit, že jakmile začneme v kterémkoliv okamžiku řešení takového problému se strojovými výpočty, ať již s úplnou soustavou rovnic nebo s některou její aproximací, nemáme dosud taková měřítka složitosti a obtížnosti vlastního výpočetního procesu. Budu o tom hovořit v následující kapitole.

Také v mnoha kombinatorických problémech máme měřítko složitosti. Problémy plánování a distribuce mají konečný počet alternativních řešení, ze kterých vybíráme optimální možnost. Prostým výčtem dojdeme k faktoriálnímu počtu možných pokusů, odpovídajícímu například počtu n bodů, do nichž distribuujeme. V některých případech se speciální strukturou můžeme tento počet redukovat na mocninný růst v proměnné n. Neexistuje obecná teorie pro tento způsob redukce. Také v jiných oblastech jsou měřítka, která dávají představu o struktuře, složitosti nebo obtížnosti řešení. Teorie informace vytváří taková měřítka pro jisté způsoby komunikace. Tato měřítka prokázala svoji užitečnost v případě reálných fyzikálních kanálů elektronické komunikace, pro které byla navržena. Zdá se však, že v jiných oblastech, v nichž byly činěny pokusy o jejich aplikaci, dávají jen velmi neúplné informace. Například, jak ukázal LANDAUER ([13]), Shannonova teorie informace se týká sdělení vysílaných komunikačními kanály; logické systémy v počítačích pracují s toky informací, mezi nimiž platí nelineární vzájemné vztahy.

Jsem přesvědčen, že naše povolání, aplikovaná matematika, se musí vyvíjet takovým směrem, abychom se naučili o jiných vědách a mimovědeckých činnostech právě tolik, kolik jsme se naučili o vědách fyzikálních. Jsem také přesvědčen, že budeme pronikat do oblastí, které jsou složitější než ty, které jsme studovali dosud. Je v našem vlastním zájmu, abychom získali nějaké poznatky o růstu této složitosti.

Dokončení v příštím čísle.

Literatura

[1] T. VON KARMAN: *The engineer grapples with nonlinear problems.* Bull. A. M. S. 46, 615 (1940).

[2] T. VON KARMAN: *Tooling up mathematics for engineering.* Quart. Appl. Math. 1, *1* (1943).

[3] H. COHEN: *Mathematics and the biomedical sciences*, in *The mathematical sciences: a collection of essays*, ed. National Research Council's Committee on Support of Research in the Mathematical Sciences (COSRIMS), The MIT Press, Cambridge, Mass., 1969, pp. 217—231.

[4] A. WEYL: Appendix to C. B. Lévi-Strauss: *Les structures élémentaires de la parenté.* Presses universitaires de France, Paris 1949.

[5] N. CHOMSKY: *Formal Properties of grammars*, in *Handbook of Math. Psych.*, ed. R. D. LUCE, R. R. BUSH and E. GALANTER. John Wiley, New York 1963, Vol. 2.

[6] D. C. GAZIS: *A computer model for the financial analysis of urban housing projects.* Socio-Econ. Plan. Science 5, 125—144 (1971).

[7] H. COHEN: *Nonlinear diffusion problems*, in *MAA Studies in Mathematics*, Vol. 7, *Studies in Applied Mathematics*, ed. A. H. TAUB. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1971, pp. 27—64.

[8] R. FITZHUGH: *Computation of impulse initiation and saltatory conduction in a myelinated nerve fiber.* Biophys. J. *2*, 11—21 (1962).

[9] W. L. HARDY: *Propagation speed in myelinated nerve: dependence on external sodium.* Ph. D. dissertation, University of Washington (1969).

[10] R. STEIN: *The role of spike trains in transmitting and distorting sensory signals*, in *The neurosciences second study program.* Ed. F. O. SCHMITT, Rockefeller University Press, 1970, pp. 597—604.

[11] D. KENNEDY: *Nerve cells and behavior.* Amer. Sci. *59*, 36—42 (1971).

[12] F. RATLIFF: *Mach Bands.* Holden-Day, New York, 1965.

[13] R. LANDAUER: *Cooperative effects, soft models, and fluctuations in data processing.* Ferroelectrics 2, 1 (1971).

Idea permanentní reformy je pro mnoho učitelů noční můrou. Tito učitelé dosud doufají, že reforma brzy přejde a vrátí se znovu klid. Nejlepší učitelé jsou ochotni vzít na sebe tíhu průkopnické práce, ale jsou dezorientováni příliš mnoha protichůdnými návrhy. Měly by zde být nějaké orientační hvězdy, aby ukazovaly cestu, kterou by měla reforma jít. *Navrhuji použít jako orientační hvězdu moderní oblasti aplikované matematiky.* To není stálice, následujete-li ji, stane se samozřejmým nepřetržité vzdělávání a adaptace k modernímu světu. *A. Engel*